Доповіді національної академії наук України

11 • 2014

ІНФОРМАТИКА ТА КІБЕРНЕТИКА

УДК 519.63:532.5

А. Я. Бомба, А. П. Сафоник

Моделювання процесу фільтрування рідини від багатокомпонентного забруднення просторовим фільтром за умов ідентифікації масообмінного коефіцієнта

(Представлено членом-кореспондентом НАН України С. І. Ляшком)

Розглядається задача моделювання процесу очищення рідин від багатокомпонентного забруднення просторовим фільтром, яка враховує зворотний вплив визначальних факторів (концентрації забруднення рідини та осаду) на характеристики середовища (коефіцієнт пористості, дифузії) і надає можливість визначення малого масообмінного коефіцієнта за умов домінування конвективних складових над дифузійними. Запропоновано алгоритм розв'язання відповідної нелінійної оберненої сингулярно збуреної задачі типу конвекція–дифузія–масообмін.

Аналіз результатів досліджень [1–11] свідчить про наявність складної структури взаємозалежності різних факторів, які визначають процеси фільтрації та фільтрування через пористі середовища й не враховувалися в традиційних (класичних, феноменологічних) моделях таких систем. Мотивом для побудови математичних моделей процесів очищення рідин від багатокомпонентного забруднення просторовим фільтром є відсутність "модельних механізмів", що враховують зворотний вплив різного роду характеристик процесу на характеристики середовища, та ідентифікація невідомих параметрів, які входять до відповідних моделей.

У роботі [8] розроблено математичну модель процесу очищення рідини у пористій фільтруючій насадці, що враховує зворотний вплив характеристик процесу (концентрації осаду) на фільтраційні параметри, при цьому деякі коефіцієнти розглянутого процесу визначалися експериментальним шляхом.

У даній роботі побудовано математичну модель процесу фільтрування рідини від багатокомпонентного забруднення в просторовому фільтрі з урахуванням невідомого малого масообмінного коефіцієнта за умов домінування конвективних складових над дифузійними. Розв'язок відповідної оберненої задачі дає можливість істотно наблизити числові розрахунки до реальних експериментальних даних (у порівнянні з класичними, феноменологічними моделями [8]), більш точно прогнозувати й розраховувати ефективність процесу осадження домішок різних технологічних водно-дисперсних систем.

Постановка задачі. Розглянемо криволінійний паралелепіпед (фільтр) $G_z = ABCDA_* B_*C_*D_*$, обмежений гладкими ортогональними між собою в кутових точках і ребрах еквіпотенціальними поверхнями $ABB_*A_* = \{z\colon f_1(x,y,z) = 0\}$, $CDD_*C_* = \{z\colon f_2(x,y,z) = 0\}$, а також поверхнями течії $ADD_*A_* = \{z\colon f_3(x,y,z) = 0\}$, $BCC_*B_* = \{z\colon f_4(x,y,z) = 0\}$, $ABCD = \{z\colon f_5(x,y,z) = 0\}$, $A_*B_*C_*D_* = \{z\colon f_6(x,y,z) = 0\}$. Припускаємо [8], що частинки забруднення домішок речовини можуть переходити з одного стану в інший (процеси захоплення–відриву, сорбції–десорбції), при цьому концентрації забруднення впливають на характеристики відповідного середовища (пористість, коефіцієнт фільтрації тощо). Концентрація забруднення є багатокомпонентною ($C = C(x,y,z,t) = (C_1,\ldots,C_m) = (C_1(x,y,z,t),\ldots,C_m(x,y,z,t))$), де C_i — концентрація i-ї компоненти домішки ($i = \overline{1,m}$) у рідкому фільтруючому середовищі. Відповідний процес фільтрування для області $G = G_z \times (0,\infty)$ опишемо такою модельною задачею:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(\sigma(P)C_i)}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}C_i + \beta_i C_i + \varepsilon \displaystyle\sum_{l,g=1, l\neq g}^{m} k_{l,g}C_l C_g = D_i \Delta C_i + \varepsilon\alpha(t)P, \\ \dfrac{\partial P}{\partial t} = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\beta_i C_i\right) - \varepsilon\alpha(t)P, \qquad i = \overline{1,m}, \end{cases} \tag{1}$$

$$C_i|_{ABB_*A_*} = C_{i,*}(M,t), \qquad \left.\frac{\partial C_i}{\partial \vec{n}}\right|_{CDD_*C_*} = 0,$$

$$\left.\frac{\partial C_i}{\partial \vec{n}}\right|_{ADD_*A_*\cup BCC_*B_*\cup ABCD\cup A_*B_*C_*D_*} = 0, \tag{2}$$

$$C_i(x,y,z,0) = C_{i,0}^0(x,y,z), \qquad P(x,y,z,0) = P_0^0(x,y,z),$$

$$\vec{v} = \kappa(P)\nabla\varphi, \qquad \nabla\cdot\vec{v} = 0, \tag{3}$$

$$\varphi|_{ABB_*A_*} = \varphi_*, \qquad \varphi|_{CDD_{**}} = \varphi^*, \qquad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}}\right|_{ADD_*A_*\cup BCC_*B_*\cup ABCD\cup A_*B_*C_*D_*} = 0; \tag{4}$$

$$\alpha(t)\iiint\limits_G P(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z},t)\,d\widetilde{x}d\widetilde{y}d\widetilde{z} = \mu(t), \tag{5}$$

де $P(x,y,z,t)$ — концентрація осаду у внутрішній точці (x,y,z) області G (завантаження фільтра) в момент часу t; β_i — коефіцієнти, що характеризують масові об'єми осадження домішок за одиницю часу; $\alpha(t)$ — шуканий коефіцієнт, що характеризує масові об'єми відірваних від гранул завантаження частинок; $\mu(t)$ — функція, що характеризує масові розподіли осаду з часом (знаходиться експериментально [9]); (5) — умова перевизначення; $\sigma(P)$ — пористість середовища ($\sigma(P) = \sigma_0 - \varepsilon\sigma_* P(x,y,z,t)$); $\vec{\nabla}$ — оператор Гамільтона; $\Delta = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}$ — оператор Лапласа; $D_i = d_{0i}\varepsilon$ — коефіцієнт дифузії домішки у рідині; σ_*, d_{0i}, ε — тверді параметри (характеризують відповідний м'який параметр $\sigma(P)$), що знаходяться експериментально; ε — малий параметр (він характеризує переваги одних складових процесу над іншими, а саме, десорбційні складові та явища міжкомпонентної взаємодії цього процесу є малими порівняно з іншими його складовими); $C_i^*(M,t)$, $C_{i,0}^0(x,y,z)$ — достатньо гладкі функції, узгоджені між собою на ребрах області G; M — довільна точка відповідної поверхні; φ — фільтраційний потенціал ($0 < \varphi_* \leqslant \varphi \leqslant \varphi^* < \infty$); $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ — вектор швидкості фільтрації ($|\vec{v}| > v_* \gg \varepsilon$); $\kappa = K(P)$ — коефіцієнт фільтрації відповідного пористого середовища ($K(P)$ — задана, достатнього гладка функція); $\vec{n}$ — зовнішня нормаль до відповідної поверхні.

Шляхом введення пари функцій $\psi = \psi(x, y, z)$, $\eta = \eta(x, y, z)$ (просторово квазікомплексно спряжених із функцією $\varphi(x, y, z)$) таких, що $\kappa \operatorname{grad} \varphi = \operatorname{grad} \psi \operatorname{grad} \eta$ [9] і заміною граничних умов на умови $\psi|_{ADD_*A_*} = 0$, $\psi|_{BCC_*B_*} = Q_*$, $\eta|_{ABCD} = 0$, $\eta|_{A_*D_*C_*B_*} = Q^*$, ця задача замінюється більш загальною прямою задачею на знаходження просторового аналога квазіконформного відображення області G_z на відповідну область комплексного квазіпотенціалу $G_w = \{w = (\varphi, \psi, \eta) \colon \varphi_* \leqslant \varphi \leqslant \varphi^*, 0 < \psi < Q_*, 0 < \eta < Q^*\}$, де Q_*, Q^* — невідомі параметри; $Q_* Q^* = Q = \displaystyle\int\limits_{EFF_*E_*} \frac{\partial \varphi}{\partial s} ds$ — кількість рідини, що проходить через деяку квазіеквіпотенціальну поверхню EFF_*E_* області G_z (повна фільтраційна витрата). Приймемо, що дана задача на просторове конформне відображення $G_w \mapsto G_z$ ($G_w = \{w = (\varphi, \psi, \eta) \colon \overline{\varphi_*} < \varphi < \overline{\varphi^*}, 0 < \psi < Q_*, 0 < \eta < Q^*\}$ — відповідна G_z область комплексного потенціалу) при деякому усередненому значенні κ розв'язана [7, 8], зокрема, побудовано динамічну сітку та поле швидкості $\vec{v}$, обчислено фільтраційну витрату $Q = Q_* Q^*$. Тоді, здійснивши заміну змінних $x = x(\varphi, \psi, \eta)$, $y = y(\varphi, \psi, \eta)$, $z = z(\varphi, \psi, \eta)$ у системі (1) та умовах (2), приходимо до відповідної задачі для області $G_w \times (0, \infty)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(\sigma(\rho) c_i)}{\partial t} + v^2 \dfrac{\partial c_i}{\partial \varphi} + \beta_i c_i + \varepsilon \displaystyle\sum_{l,g=1, l \neq g}^{m} k_{l,g} c_l c_g = \\ \qquad = \varepsilon d_{0i} \left(v^2 \dfrac{\partial^2 c_i}{\partial \varphi^2} + b_1 \dfrac{\partial^2 c_i}{\partial \psi^2} + b_2 \dfrac{\partial^2 c_i}{\partial \eta^2} + d_1 \dfrac{\partial c_i}{\partial \psi} + d_2 \dfrac{\partial c_i}{\partial \eta} \right) + \varepsilon \alpha(t) \rho, \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \beta_i c_i - \varepsilon \alpha(t) \rho, \end{cases} \tag{6}$$

$$c_i(\overline{\varphi}_*, \psi, \eta, t) = c_i^*(\psi, \eta, t), \qquad c_{i,\varphi}(\overline{\varphi}^*, \psi, \eta, t) = 0,$$

$$c_{i,\psi}(\varphi, 0, \eta, t) = c_{i,\psi}(\varphi, Q_*, \eta, t) = c_{i,\eta}(\varphi, \psi, 0, t) = c_{i,\eta}(\varphi, \psi, Q^*, t) = 0 \tag{7}$$

$$c_i(\varphi, \psi, \eta, 0) = c_{i,0}^{\,0}(\varphi, \psi, \eta), \qquad \rho(\varphi, \psi, \eta, 0) = \rho_0^0(\varphi, \psi, \eta),$$

$$\alpha(t) \iiint\limits_{G_w} \rho(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}, \widetilde{\eta}, t)\, d\widetilde{\varphi} d\widetilde{\psi} d\widetilde{\eta} = \mu(t), \tag{8}$$

де

$$c_i = c_i(\varphi, \psi, \eta, t) = C_i(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta), t),$$

$$\rho = \rho(\varphi, \psi, \eta, t) = P(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta), t),$$

$$b_1 = b_1(\varphi, \psi, \eta) = (\vec{\nabla} \psi)^2, \qquad b_2 = b_2(\varphi, \psi, \eta) = (\vec{\nabla} \eta)^2,$$

$$d_1 = d_1(\varphi, \psi, \eta) = \Delta \psi, \qquad d_2 = d_2(\varphi, \psi, \eta) = \Delta \eta,$$

$$v^2(\varphi, \psi, \eta) = v_x^2(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta)) + v_y^2(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta)) + \\ + v_z^2(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta)) \qquad \text{(див., напр., [7, 8]).}$$

Асимптотика розв'язку. Розв'язок задачі (6), (8) з точністю $O(\varepsilon^n)$ шукаємо у вигляді асимптотичних рядів [7, 8]:

$$c_i = c_{i,0} + \sum_{j=1}^{n} \varepsilon^j c_{i,j} + \sum_{j=0}^{n} \varepsilon^j \Pi_{i,j} + \sum_{j=0}^{n} \varepsilon^j \overline{\Pi}_{i,j} + \sum_{j=0}^{n+1} \varepsilon^{j/2} \widetilde{\Pi}_{i,j} + \sum_{j=0}^{n+1} \varepsilon^{j/2} \overline{\overline{\Pi}}_{i,j} + $$
$$+ \sum_{j=0}^{n+1} \varepsilon^{j/2} \widetilde{\widetilde{\Pi}}_{i,j} + \sum_{j=0}^{n+1} \varepsilon^{j/2} \widehat{\Pi}_{i,j} + R_{c,i}, \tag{9}$$

$$\rho = \rho_0 + \sum_{j=1}^{n} \varepsilon^j \rho_j + \sum_{j=0}^{n} \varepsilon^j P_j + \sum_{j=0}^{n} \varepsilon^i \overline{P}_j + \sum_{j=0}^{n+1} \varepsilon^{j/2} \widetilde{P}_j + \sum_{j=0}^{n+1} \varepsilon^{j/2} \overline{\overline{P}}_j +$$
$$+ \sum_{j=0}^{n+1} \varepsilon^{j/2} \widetilde{\widetilde{P}}_j + \sum_{j=0}^{n+1} \varepsilon^{j/2} \widehat{P}_j + R_\rho, \tag{10}$$

$$\alpha(t) = \alpha_0(t) + \sum_{j=1}^{k} \varepsilon^j \alpha_j(t) + R_\alpha(t,\varepsilon), \tag{11}$$

де $R_{c,i}(\varphi,\psi,\eta,t,\varepsilon)$, $R_\rho(\varphi,\psi,\eta,t,\varepsilon)$, $R_\alpha(\varphi,\psi,\eta,t,\varepsilon)$ — залишкові члени, $c_{i,j}(\varphi,\psi,\eta,t)$, $\rho_j(\varphi,\psi,\eta,t)$; $\alpha_j(t)$ — члени регулярної частини асимптотики ($i = \overline{1,m}$; $j = \overline{0,n}$); $\Pi_{i,j}(\xi,\psi,\eta,t)$, $P_j(\xi,\psi,\eta,t)$ — функції типу примежового шару в околі $\varphi = \overline{\varphi}^*$ (поправки на виході з фільтра) ($j = \overline{0,2}$), $\overline{\Pi}_{i,j}(\overline{\xi},\psi,\eta,t)$, $\overline{P}_j(\overline{\xi},\psi,\eta,t)$ — в околі $\varphi = \overline{\varphi}_*$ (поправки на вході у фільтр) ($j = \overline{0,2}$), а функції $\widetilde{\Pi}_{i,j}(\varphi,\widetilde{\psi},\eta,t)$, $\overline{\overline{\Pi}}_{i,j}(\varphi,\overline{\overline{\psi}},\eta,t)$, $\widetilde{\widetilde{\Pi}}_{i,j}(\varphi,\psi,\widetilde{\widetilde{\eta}},t)$, $\widehat{\Pi}_{i,j}(\varphi,\psi,\widehat{\eta},t)$ та $\widetilde{P}_j(\varphi,\widetilde{\psi},\eta,t)$, $\overline{\overline{P}}_j(\varphi,\widetilde{\widetilde{\psi}},\eta,t)$, $\widetilde{\widetilde{P}}_j(\varphi,\psi,\widetilde{\eta},t)$, $\widehat{P}_j(\varphi,\psi,\widetilde{\widetilde{\eta}},t)$ ($j = \overline{0,3}$) — в околах $\psi = 0$, $\psi = Q$, $\eta = 0$, $\eta = Q$ (поправки в околі бічних "стінок" фільтра) відповідно; $\xi = (\varphi^* - \varphi)/\varepsilon$, $\overline{\xi} = (\varphi - \varphi_*)/\varepsilon$, $\widetilde{\psi} = \psi/\sqrt{\varepsilon}$, $\widetilde{\psi} = (Q_* - \psi)/\sqrt{\varepsilon}$, $\widetilde{\widetilde{\eta}} = \eta/\sqrt{\varepsilon}$, $\widehat{\eta} = (Q^* - \eta)/\sqrt{\varepsilon}$ — "розтяги" відповідних змінних.

Шляхом підстановки співвідношень (9)–(11) у (6)–(8) і виконання стандартної процедури "прирівнювання" коефіцієнтів при однакових степенях ε одержимо такі задачі для знаходження $c_{i,j}(\varphi,\psi,\eta,t)$, $\rho_j(\varphi,\psi,\eta,t)$ ($j = \overline{0,n}$):

$$\begin{cases} \sigma_0 \dfrac{\partial c_{i,0}}{\partial t} + v^2 \dfrac{\partial c_{i,0}}{\partial \varphi} + \beta_i c_{i,0} = 0, \qquad \dfrac{\partial \rho_0}{\partial t} = \sum\limits_{i=1}^{m} \beta_i c_{i,0}, \\ c_{i,0}(\varphi,\psi,\eta,0) = c^0_{i,0}, \qquad c_{i,0}(\varphi_*,\psi,\eta,t) = c_{i*}(\psi,\eta,t), \\ \rho_0(\varphi,\psi,\eta,0) = \rho^0_0; \end{cases}$$

$$\alpha_0(t) \iiint\limits_{G_w} \rho_0(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi},\widetilde{\eta},t)\, d\widetilde{\varphi} d\widetilde{\psi} d\widetilde{\eta} = \mu(t),$$

$$\begin{cases} -\sigma_* \rho_{j-1} \dfrac{\partial c_{i,j}}{\partial t} + v^2 \dfrac{\partial c_{i,j}}{\partial \varphi} + \beta_i c_{i,j} + \sum\limits_{l,g=1, l\neq g}^{m} k_{l,g} c_{l,j-1} c_{g,j-1} = U_{i,j}, \\ \dfrac{\partial \rho_j}{\partial t} = \sum\limits_{i=1}^{m} \beta_i c_{i,j} - \sum\limits_{k=1}^{j} \alpha_{j-k}(t) \rho_{k-1}, \\ c_{i,j}(\varphi,\psi,\eta,0) = 0, \qquad c_{i,j}(\varphi_*,\psi,\eta,t) = 0, \\ \rho_j(\varphi,\psi,\eta,0) = 0; \end{cases}$$

$$\alpha_0(t)\iiint\limits_{G_w}\rho_0(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi},\widetilde{\eta},t)\,d\widetilde{\varphi}d\widetilde{\psi}d\widetilde{\eta}+\alpha_1(t)\iiint\limits_{G_w}\rho_{j-1}(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi},\widetilde{\eta},t)\,d\widetilde{\varphi}d\widetilde{\psi}d\widetilde{\eta}+\cdots+$$

$$+\alpha_j(t)\iiint\limits_{G_w}\rho_0(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi},\widetilde{\eta},t)\,d\widetilde{\varphi}d\widetilde{\psi}d\widetilde{\eta}=0.$$

В результаті їх розв'язання отримаємо:

$$c_{i,0}=\begin{cases} c_{i,*}(\psi,\eta,t-f)\exp\left[-\beta_i\int\limits_{\varphi_*}^{\varphi}\dfrac{d\widetilde{\varphi}}{v^2(\widetilde{\varphi},\psi,\eta)}\right], & t\geqslant f,\\ c_{i,0}^0(f^{-1}(f-t,\psi,\eta),\psi,\eta)\exp\left[-\dfrac{\beta_i t}{\sigma_0}\right], & t<f,\end{cases}$$

$$\rho_0=\int\limits_0^t\left(\sum_{i=1}^m\beta_i c_{i,0}\right)d\widetilde{t}+\rho_0^0,\quad \alpha_0(t)=\frac{\mu(t)}{\iiint\limits_{G_w}\rho_0(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi},\widetilde{\eta},t)\,d\widetilde{\varphi}d\widetilde{\psi}d\widetilde{\eta}},$$

$$c_{i,j}=\begin{cases} e^{-\lambda_1}\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi}\dfrac{U_{i,j}(s,\psi,\eta,f(s,\psi,\eta)-f+t)}{v^2(s,\psi,\eta)}e^{\lambda_2(s,\psi,\eta,t)}ds, & t\geqslant f,\\ -\dfrac{e^{-\lambda_1}}{\sigma_*}\int\limits_0^t\dfrac{U_{i,j}(f^{-1}(s+f-t,\psi,\eta),\psi,\eta,s)}{\rho_{j-1}(f^{-1}(s+f-t,\psi,\eta),\psi,\eta)}e^{\lambda_2(\varphi,\psi,\eta,s)}ds, & t<f,\end{cases}$$

$$\rho_j=\int\limits_0^t\left(\sum_{i=1}^m\beta_i c_{i,j}-\sum_{k=1}^j\alpha_{j-k}(t)\rho_{k-1}\right)d\widetilde{t},\quad \alpha_j(t)=\frac{\sum\limits_{k=1}^j\alpha_{j-k}(t)\iiint\limits_{G_w}\rho_j(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi},\widetilde{\eta},t)\,d\widetilde{\varphi}d\widetilde{\psi}d\widetilde{\eta}}{\iiint\limits_{G_w}\rho_0(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi},\widetilde{\eta},t)\,d\widetilde{\varphi}d\widetilde{\psi}d\widetilde{\eta}},$$

де

$$U_{i,j}(\varphi,\psi,\eta,t)=d_{0i}\left(v^2\frac{\partial^2 c_{i,j}}{\partial\varphi^2}+b_1\frac{\partial^2 c_{i,j}}{\partial\psi^2}+b_2\frac{\partial^2 c_{i,j}}{\partial\eta^2}+d_1\frac{\partial c_{i,j}}{\partial\psi}+d_2\frac{\partial c_{i,j}}{\partial\eta}\right)+$$

$$+\alpha_{j-1}(t)\rho_{j-1}-\sum_{l,g=1,l\neq g}^m k_{l,g}c_{l,j-1}c_{g,j-1},\qquad (j=\overline{2,n}),$$

$$\lambda_1(\varphi,\psi,\eta,t)=-\beta_i\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{\rho_{j-1}(s,\psi,\eta,f(\widetilde{\varphi},\psi,\eta)+t-f)c_{i,j}(s,\psi,\eta,f(\widetilde{\varphi},\psi,\eta)+t-f)}{v^2(s,\psi,\eta)}ds,$$

$$\lambda_2(\varphi,\psi,\eta,t)=-\beta_i\int\limits_0^t\frac{\rho_{j-1}(f^{-1}(\widetilde{s}+f-t,\psi,\eta),\psi,\eta,\widetilde{s})c_{i,j}(f^{-1}(\widetilde{s}+f-t,\psi,\eta),\psi,\eta,\widetilde{s})}{\sigma(f^{-1}(\widetilde{t}+f-t,\psi,\eta),\psi,\eta)}d\widetilde{s},$$

$f(\varphi,\overline{\psi},\overline{\eta})=\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi}\dfrac{ds}{v^2(s,\overline{\psi},\overline{\eta})}$ — час проходження відповідною частинкою шляху від точки $(x(\varphi_*,\overline{\psi},\overline{\eta}),y(\varphi_*,\overline{\psi},\overline{\eta}),z(\varphi_*,\overline{\psi},\overline{\eta}))\in ABB_*A_*$ до точки $(x(\varphi,\overline{\psi},\overline{\eta}),\,y(\varphi,\overline{\psi},\overline{\eta}),\,z(\varphi,\overline{\psi},\overline{\eta}))\in G_z$

уздовж відповідної лінії течії (як перетину деяких двох поверхонь $\psi(x, y, z) = \overline{\psi}$, $0 \leqslant \overline{\psi} \leqslant Q_*$, $\eta(x, y, z) = \overline{\eta}$, $0 \leqslant \overline{\eta} \leqslant Q^*$), f^{-1} — функція, обернена до f відносно змінної φ (відзначимо, що така функція існує, оскільки $v^2(\varphi, \psi, \eta)$ — неперервно диференційовна, обмежена, додатно визначена функція.

Функції $\Pi_{i,j}(\xi, \psi, \eta, t)$, $P_j(\xi, \psi, \eta, t)$ $\varphi = \overline{\varphi}^*$, $(j = \overline{0, 2})$, $\overline{\Pi}_{i,j}(\overline{\xi}, \psi, \eta, t)$, $\overline{P}_j(\overline{\xi}, \psi, \eta, t)$, $(j = \overline{0, 2})$, $\widetilde{\Pi}_{i,j}(\varphi, \widetilde{\psi}, \eta, t)$, $\overline{\overline{\Pi}}_{i,j}(\varphi, \overline{\overline{\psi}}, \eta, t)$, $\widetilde{\widetilde{\Pi}}_{i,j}(\varphi, \psi, \widetilde{\widetilde{\eta}}, t)$, $\widehat{\Pi}_{i,j}(\varphi, \psi, \widehat{\eta}, t)$ та $\widetilde{P}_j(\varphi, \widetilde{\psi}, \eta, t)$, $\overline{\overline{P}}_j(\varphi, \widetilde{\widetilde{\psi}}, \eta, t)$, $\widetilde{\widetilde{P}}_j(\varphi, \psi, \widetilde{\eta}, t)$, $\widehat{P}_j(\varphi, \psi, \widetilde{\widetilde{\eta}}, t)$ $(j = \overline{0, 3})$ знаходяться аналогічно [8]. Оцінка залишкових членів проводиться згідно з [8].

Розв'язок відповідної оберненої нелінійної модельної задачі, що описує процес фільтрування рідини від багатокомпонентного забруднення в просторовому фільтрі, дає можливість істотно наблизити числові розрахунки до реальних експериментальних даних (у порівнянні з класичними, феноменологічними моделями), більш точно прогнозувати й розраховувати ефективність процесу осадження домішок різних технологічних водно-дисперсних систем. У перспективі — моделювання процесів фільтрування в умовах неповних даних та автоматизація відповідних процесів (див., наприклад, [8, 10, 11]).

1. *Elimelech M.* Predicting collision efficiencies of colloidal particles in porous media // Water Research. – 1992. – **26**, No 1. – P. 1–8.
2. *Elimelech M.* Particle deposition on ideal collectors from dilute flowing suspensions: Mathematical formulation, numerical solution and simulations // Separ. Technology. – 1994. – **4**. – P. 186–212.
3. *Jegatheesan V.* Effect of surface chemistry in the transient stages of deep bed filtration. – PhD Thesis, Univ. of Technology, Sydney, 1999. – 300 p.
4. *Johnson P. R., Elimelech M.* Dynamics of colloid deposition in porous media: Blocking based on random sequential adsorption // Langmuir. – 1995. – **11**, No 3. – P. 801–812.
5. *Ison C. R., Ives K. J.* Removal mechanisms in deep bed filtration // Che. Engng. Sci. – 1969. – **24**. – P. 717–729.
6. *Ives K. J.* Rapid filtration // Water Research. – 1970. – **4**, No 3. – P. 201–223.
7. *Бомба А. Я., Барановський С. В., Присяжнюк І. М.* Нелінійні сингулярно-збурені задачі типу "конвекція-дифузія". – Рівне: НУВГП, 2008. – 252 с.
8. *Бомба А. Я., Гаврилюк В. І., Сафоник А. П., Фурсачик О. А.* Нелінійні задачі типу фільтрація-конвекція-дифузія-масообмін за умов неповних даних. – Рівне: НУВГП, 2011. – 276 с.
9. *Иванчов Н. И.* Об определении зависящего от времени старшего коэффициента в параболическом уравнении // Сиб. мат. журн. – 1998. – **39**, № 3. – С. 539–550.
10. *Сергиенко И. В., Дейнека В. С.* Решения комбинированных обратных задач для параболических многокомпонентных распределенных систем // Кибернетика и систем. анализ. – 2007. – № 5. – С. 48–71.
11. *Сергиенко И. В., Дейнека В. С.* Идентификация градиентными методами параметров задач диффузии вещества в нанопористой среде // Пробл. управления и информатики. – 2010. – № 6. – С. 5–18.

Національний університет водного господарства та природокористування, Рівне

Надійшло до редакції 07.04.2014

А. Я. Бомба, А. П. Сафоник

Моделирование процесса фильтрования жидкости от многокомпонентного загрязнения пространственным фильтром при условии идентификации массообменного коэффициента

Рассматривается задача моделирования процесса очистки жидкостей от многокомпонентного загрязнения пространственным фильтром, которая учитывает обратное влияние определяющих факторов (концентрации загрязнения жидкости и осадка) на характеристики среды (коэффициент пористости, диффузии) и предоставляет возможность определения малого массообменного коэффициента при условиях доминирования конвективных составных над диффузными. Предложен алгоритм решения соответствующей нелинейной обратной сингулярно возмущенной задачи типа конвекция–диффузия–массообмен.

A. Ya. Bomba, A. P. Safonyk

Modeling the process of filtration of a fluid from a multicomponent pollution by a spatial filter under the condition of identification of the mass-exchange coefficient

The problem of modeling of the process of purification of liquids from a multicomponent pollution by a spatial filter is considered. The influence of the determining factors (concentrations of the contamination and the sediment) on the environmental characteristics (porosity coefficient, diffusion) is taken into account. The problem provides the opportunity for the definition of a small mass exchange factor under conditions of domination of convective constituents over diffusive ones. An algorithm of solution the corresponding nonlinear inverse singularly perturbed task of the convection–diffusion–mass exchange type is proposed.