УДК 519.85

О. А. Емец, Т. Н. Барболина

Об оптимизационных задачах с вероятностной неопределенностью

(Представлено академиком НАН Украины И. В. Сергиенко)

Для использования в постановках оптимизационных задач предложены два подхода к упорядочиванию дискретных случайных величин. В рамках первого подхода вводится отношение линейного порядка на множестве дискретных случайных величин. Второй подход предполагает разбиение множества дискретных случайных величин на классы эквивалентности на основе сравнения их моментов и введение линейного порядка на полученном фактор-множестве. Рассмотрены некоторые свойства предложенных отношений порядка. При использовании введенных отношений порядка сформулированы оптимизационные задачи, которые учитывают вероятностную неопределенность данных.

Вероятностный характер исходной информации, имеющий место во множестве практических задач, обращает внимание исследователей на развитие моделей и методов стохастического программирования (см., например, [1–5]). При построении моделей задач стохастической оптимизации возникает вопрос о том, что считать допустимым решением и каким образом определять лучшее решение. Для оптимизационных задач интервальной и нечеткой оптимизации был предложен подход, основанный на введении отношения порядка [6, 7]. В работе развиваются указанные идеи на случай вероятностной неопределенности. Предлагается два способа упорядочивания дискретных случайных величин, которые могут быть использованы в постановке оптимизационных задач.

Определение порядка на множестве дискретных случайных величин. Обозначим дискретные случайные величины большими латинскими буквами X, Y, Z, их возможные значения — малыми x_i, y_i, z_i, а соответствующие вероятности — p_i^x, p_i^y, p_i^z. Рассмотрим только те случайные величины, среди возможных значений которых существует наименьшее. Далее полагаем, что возможные значения упорядочены по возрастанию, причем наименьшее значение имеет индекс 1.

Через $M(X)$ будем обозначать математическое ожидание случайной величины X, а через $D(X)$ — дисперсию.

Введем бинарное отношение упорядочивания на множестве дискретных случайных величин в соответствии со следующим определением.

Определение 1. Будем называть две дискретные случайные величины упорядоченными в возрастающем (X предшествует Y) порядке $\prec$ (и обозначать этот факт $X \prec Y$), если выполнено одно из следующих условий:

1) $M(X) < M(Y)$;

2) $M(X) = M(Y)$ и $D(X) < D(Y)$;

3) $M(X) = M(Y)$, $D(X) = D(Y)$ и найдется такой индекс t, что $x_i = y_i$, $p_i^x = p_i^y$ для всех $1 \leqslant i < t$, и при этом:

a) либо $x_t < y_t$;

б) либо $x_t = y_t$ и $p_t^x > p_t^y$.

Утверждение 1. *Отношение $\prec$ на множестве дискретных случайных величин является строгим порядком.*

Определение 2. Будем называть две дискретные случайные величины X, Y упорядоченными в неубывающем порядке $\preceq$ (и обозначать этот факт $X \preceq Y$), если $X \prec Y$ или $X = Y$.

Утверждение 2. *Отношение $\preceq$ на множестве дискретных случайных величин является линейным порядком.*

Доказательство. Так как отношение $\preceq$ является объединением строгого порядка $\prec$ и диагонали, то оно является порядком [8].

Покажем, что этот порядок является линейным, т. е. для любых двух дискретных случайных величин X и Y выполняется одно из условий $X \preceq Y$ или $Y \preceq X$.

Предположим, что неравенство $X \preceq Y$ не имеет места. Следовательно, X и Y — различные случайные величины, причем $M(X) \geqslant M(Y)$. Если $M(X) > M(Y)$, то, согласно п. 1 определения 1, $Y \prec X$, а значит, $Y \preceq X$. Если $M(X) = M(Y)$, но $D(X) > D(Y)$, то также $Y \preceq X$.

Рассмотрим теперь случай, когда $M(X) = M(Y)$ и $D(X) = D(Y)$. Так как X и Y — различны, то существует такой индекс t, что $x_t \neq y_t$ или $p_t^x \neq p_t^y$. По предположению неравенство $X \preceq Y$ не выполняется. Следовательно, $x_t \geqslant y_t$. При $x_t > y_t$ имеем $Y \prec X$, согласно п. *а* определения 1. Если $x_t = y_t$, то $p_t^x > p_t^y$, а значит, $Y \prec X$ (п. *б* определения 1). Таким образом, если для случайных величин X и Y не имеет места соотношение $X \preceq Y$, то $Y \preceq X$. Утверждение доказано.

Для потребностей моделирования ряда практических задач естественным было бы требовать, чтобы для введенных определенным образом порядка и суммы упорядочивание двух случайных величин сохранялось при прибавлении к левой и правой части соотношения одной и той же случайной величины.

Рассмотрим сумму $Z = X + Y$, где X и Y — независимые случайные величины. Множество значений дискретной случайной величины Z есть множество различных значений сумм вида $x_i + y_j$, а соответствующие вероятности равны

$$p_k^z = \sum_{x_i + y_j = z_k} p_i^x p_j^y.$$

Утверждение 3. *Если для дискретных случайных величин X, Y выполняется условие $X \prec Y$ и случайные величины X и Z, Y и Z независимы, также имеет место $X + Z \prec Y + Z$.*

Следствие 1. *Если для дискретных случайных величин X, Y выполняется условие $X \preceq Y$ и величины X и Z, Y и Z независимы, также имеет место $X + Z \preceq Y + Z$.*

Следствие 2. *Если для дискретных случайных величин X, Y выполняется условие $X \preceq Y$ и величины X и Z, Y и Z независимы, причем все возможные значения величины Z неотрицательны, также имеет место соотношение $X \preceq Y + Z$.*

Упорядочивание дискретных случайных величин при помощи моментов. Как известно, во многих практически значимых задачах закон распределения случайной величины не может быть получен. В этом случае целесообразно использовать упорядочивание, которое основывается на сравнении значений моментов случайных величин.

Пусть Ω — некоторое множество попарно независимых случайных величин.

Как и в [9], начальным моментом k-го порядка случайной величины X будем называть математическое ожидание k-й степени этой случайной величины:

$$\mu_k(X) = M(X^k) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k p_i^x.$$

Определение 3. Будем называть две дискретные случайные величины X, $Y \in \Omega$ μ_k-эквивалентными (обозначать $X \simeq {}_k Y$), если равны их начальные моменты по k-й включительно, т. е. $\mu_i(X) = \mu_i(Y)$ для всех $i = 1, \ldots, k$.

Утверждение 4. *Отношение $\simeq {}_k$ на множестве попарно независимых дискретных случайных величин является отношением эквивалентности.*

Класс эквивалентности по отношению $\simeq {}_k$ с представителем X будем обозначать $[X]_k$, т. е. $[X]_k \in \Omega/ \simeq {}_k$. Через $\mu_i([X]_k)$ $(i \leqslant k)$ будем обозначать начальный момент i-го порядка некоторой дискретной случайной величины $X \in [X]_k$ (в соответствии с определением 3, эти моменты равны для всех представителей класса $[X]_k$).

Определение 4. Будем называть классы $[X]_k$, $[Y]_k \in \Omega/ \simeq {}_k$ упорядоченными по неубыванию (обозначать $[X]_k \preceq [Y]_k$), если для всех $i \leqslant k$ таких, что $\mu_i([X]_k) > \mu_i([Y]_k)$, найдется такое $j < i$, что $\mu_j([X]_k) < \mu_j([Y]_k)$.

Иными словами, $[X]_k \preceq [Y]_k$ тогда и только тогда, когда первая отличная от нуля разность $\mu_i([X]_k) - \mu_i([Y]_k)$ является отрицательной.

Утверждение 5. *Отношение $\preceq$ на множестве классов эквивалентности по отношению $\simeq {}_k$ является линейным порядком.*

Доказательство. Покажем сначала, что $\preceq$ является порядком, т. е. рефлексивным, антисимметричным и транзитивным отношением.

Рефлексивность. Так как $\mu_i([X]_k) = \mu_i([X]_k)$ для всех $i = 1, \ldots, k$, т. е. условие $\mu_i([X]_k) > > \mu_i([X]_k)$ не выполняется ни при одном i, то $[X]_k \preceq [X]_k$.

Антисимметричность. Предположим, что имеют место соотношения $[X]_k \preceq [Y]_k$ и $[Y]_k \preceq [X]_k$. Пусть i — наименьший из таких порядков, что $\mu_i([X]_k) > \mu_i([Y]_k)$. Из условия $[X]_k \preceq [Y]_k$ следует, что существует $j < i$ такое, что $\mu_j([X]_k) < \mu_j([Y]_k)$, но тогда из $[Y]_k \preceq [X]_k$ следует, что должно существовать такое $l < j < i$, что $\mu_l([X]_k) > \mu_l([Y]_k)$. Но последнее неравенство противоречит правилу выбора значения i. Таким образом, $\mu_i([X]_k) \leqslant \leqslant \mu_i([Y]_k)$ для всех $i = 1, \ldots, k$. Проведя аналогичные рассуждения для предположения, что $\mu_i([X]_k) < \mu_i([Y]_k)$ для некоторого i, получим, что $\mu_i([X]_k) \geqslant \mu_i([Y]_k)$ для всех $i = 1, \ldots, k$. Следовательно, для всех $i = 1, \ldots, k$ имеет место $\mu_i([X]_k) = \mu_i([Y]_k)$, т. е. $[X]_k = [Y]_k$.

Транзитивность. Пусть $[X]_k \preceq [Y]_k$ и $[Y]_k \preceq [Z]_k$. Если $[X]_k = [Y]_k$ или $[Y]_k = [Z]_k$, то транзитивность очевидна. В противном случае найдутся такие r и s, что $\mu_r([X]_k) \neq \mu_r([Y]_k)$, $\mu_s([Y]_k) \neq \mu_s([Z]_k)$. Пусть r и s — наименьшие возможные из таких порядков. Тогда из определения 4 следует, что $\mu_r([X]_k) < \mu_r([Y]_k)$ и $\mu_s([Y]_k) < \mu_s([Z]_k)$. Если $t = \min\{r, s\}$, то $\mu_t([X]_k) < \mu_t([Z]_k)$. Пусть для некоторого i выполняется неравенство $\mu_i([X]_k) > \mu_i([Z]_k)$. Тогда, очевидно, $\mu_i([X]_k) > \mu_i([Y]_k)$ или $\mu_i([Y]_k) > \mu_i([Z]_k)$, откуда, в соответствии с определением 4, следует, что $i > r$ или $i > s$, т. е. $i > t$. Следовательно, $[X]_k \preceq [Z]_k$, т. е. отношение является транзитивным. Таким образом, отношение является частичным порядком.

Для доказательства линейности порядка рассмотрим два произвольных класса $[X]_k$ и $[Y]_k$. Если $[X]_k = [Y]_k$, то, согласно определению 4, $[X]_k \preceq [Y]_k$ и $[Y]_k \preceq [X]_k$. Пусть теперь классы $[X]_k$ и $[Y]_k$ различны. Тогда существует $r = \min\{i | \mu_i([X]_k) \neq \mu_i([Y]_k)\}$. Для r-х моментов выполняется одно из двух неравенств: $\mu_r([X]_k) < \mu_r([Y]_k)$ или $\mu_r([X]_k) > \mu_r([Y]_k)$.

В первом случае $[X]_k \preceq [Y]_k$, во втором — $[Y]_k \preceq [X]_k$. Таким образом, для любых двух классов — $[X]_k$ и $[Y]_k$ выполняется одно из соотношений — $[X]_k \preceq [Y]_k$ или $[Y]_k \preceq [X]_k$, т. е. порядок является линейным. Утверждение доказано.

Рассмотрим вопрос о сохранении введенного порядка для суммы случайных величин.

Лемма 1. *Пусть дискретные случайные величины X_1 и X_2 принадлежат классу эквивалентности $[X]_k \in \Omega/\simeq_k$, а величины Y_1 и Y_2 — классу $[Y]_k \in \Omega/\simeq_k$. Тогда $X_1 + Y_1 \simeq_k X_2 + Y_2$.*

Определение 5. Суммой классов $[X]_k$, $[Y]_k \in \Omega/\simeq_k$ будем называть класс с представителем $X_1 + Y_1$, где $X_1 \in [X]_k$, $Y_1 \in [Y]_k$.

Утверждение 6. *Если для классов $[X]_k$, $[Y]_k \in \Omega/\simeq_k$ выполняется условие $[X]_k \preceq [Y]_k$, то также имеет место $[X]_k + [Z]_k \preceq [Y]_k + [Z]_k$, где $[Z]_k \in \Omega/\simeq_k$.*

Постановки оптимизационных задач. Существенным в задачах оптимизации является определение минимума и максимума на заданном множестве дискретных случайных величин. Используя введенный в определении 2 линейный порядок, упорядочим элементы заданного конечного множества D дискретных случайных величин: $X^1 \preceq X^2 \preceq \cdots \preceq X^s$. Максимумом является величина X^s, а минимумом — величина X^1.

Аналогично для порядка, введенного в соответствии с определением 4, минимумом будет класс $[X^1]_k$, являющийся первым в порядке классов, пронумерованных согласно линейному порядку: $[X^1]_k \preceq [X^2]_k \preceq \cdots \preceq [X^s]_k$. Максимумом, соответственно, будет класс $[X^s]_k$.

Введение понятий минимума и максимума дает возможность ставить задачи оптимизации для нахождения экстремальных элементов при определенных условиях.

Рассмотрим сначала оптимизационные задачи на конечном множестве D дискретных случайных величин, на котором введен порядок в соответствии с определением 2. Пусть $\overline{X} = (X^1, X^2, \ldots, X^n)$ — многомерная случайная величина. Рассмотрим борелевскую функцию $F(X^1, X^2, \ldots, X^n)$. Как известно [10], эта функция также является случайной величиной $R = F(X^1, X^2, \ldots, X^n)$. Пусть функция F такова, что среди значений R есть наименьшее. Тогда задача оптимизации на множестве может быть сформулирована следующим образом: найти минимум функции $F(X^1, X^2, \ldots, X^n)$ в некоторой области $S \subset D$

$$\min_{(X^1, X^2, \ldots, X^n) \in S} F(X^1, X^2, \ldots, X^n).$$

В частности, линейная задача состоит в поиске минимума функции

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

в области

$$S = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \preceq b_i, i = 1, \ldots, m \right\}.$$

В зависимости от конкретного содержания задачи величины x_j, c_j, a_{ij}, b_i могут быть как случайными, так и детерминированными.

Постановка оптимизационных задач на фактор-множестве $\Omega/\simeq_k$ в достаточно общем случае требует определения операций над классами эквивалентности. При этом следует отметить, что поэлементное определение операций не гарантирует их корректности, т. е. независимости результата от выбора элементов класса.

Учитывая сложность постановки оптимизационной задачи в общем случае, предложим формулировку одного класса задач, которая использует операции сложения классов (введенную в определении 5) и умножения класса на число.

Лемма 2. *Пусть дискретные случайные величины X, $Y \in \Omega$ являются μ_k-эквивалентными, c — некоторое число. Тогда $cX \simeq {}_k cY$.*

Определение 6. Произведением класса $[X]_k \in \Omega/ \simeq {}_k$ на число c будем называть класс с представителем cX, где $X \in [X]_k$.

Используя введенные определениями 5 и 6 операции над элементами фактор-множества $\Omega/ \simeq {}_k$ (Ω — конечное множество), понятие минимума, можем сформулировать следующую оптимизационную задачу на множестве классов эквивалентности по отношению $\simeq {}_k$: найти минимум функции

$$\sum_{j=1}^{n} c_j [X^j]_k$$

в области

$$S = \left\{ ([X_1]_k, [X_2]_k, \ldots, [X^n]_k) \middle| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} [X^j]_k \preceq b_i, \ i = 1, \ldots, m \right\},$$

где c_{ij}, a_{ij}, b_i — детерминированные величины, $[X^j]_k \in \Omega/ \simeq {}_k$.

Таким образом, в работе предложены два похода к упорядочиванию дискретных случайных величин для реализации возможности ставить задачи оптимизации для нахождения экстремальных элементов при определенных условиях. Как направление дальнейших исследований можно рассматривать изучение свойств сформулированных оптимизационных задач и разработку методов их решения.

1. *Сергиенко И. В., Михалевич М. В.* Применение методов стохастической оптимизации для исследования трансформационных процессов в экономике // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2004. – № 4. – С. 7–29.
2. *Ермольев Ю. М., Ястремский А. И.* Стохастические модели и методы в экономическом планировании. – Москва: Наука, 1979. – 256 с.
3. *Юдин Д. Б.* Математические методы управления в условиях неполной информации. – Москва: Сов. радио, 1974. – 400 с.
4. *Кан Ю. С., Кибзун А. И.* Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 375 с.
5. *Емец О. А., Роскладка А. А.* О комбинаторной оптимизации в условиях неопределенности // Кибернетика и систем. анализ. – 2008. – № 5. – С. 35–44.
6. *Сергиенко И. В., Емец О. А., Емец А. О.* Задачи оптимизации с интервальной неопределенностью: метод ветвей и границ // Там же. – 2013. – № 5. – С. 38–50.
7. *Ємець О. О., Ємець Ол-ра О.* Розв'язування задач комбінаторної оптимізації на нечітких множинах. – Полтава: ПУЕТ, 2011. – 239 с. – Режим доступу: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/352/.
8. *Мельников О. В., Ремесленников В. Н., Романьков В. А. и др.* Общая алгебра. Т. 1 / Под общ. ред. Л. А. Скорнякова. – Москва: Наука, 1990. – 592 с.
9. *Вентцель Е. С.* Теория вероятностей. – Москва: Гл. ред. физ.-мат. лит., 1969. – 576 с.
10. *Гнеденко Б. В.* Курс теории вероятностей. – Изд. 8-е, исправл. и дополн. – Москва: Едиториал УРСС, 2005. – 448 с.

Полтавский университет экономики и торговли
Полтавский национальный педагогический университет им. В. Г. Короленко

Поступило в редакцию 12.05.2014

О. О. Ємець, Т. М. Барболіна

Про оптимізаційні задачі з імовірнісною невизначеністю

Для використання в постановках оптимізаційних задач запропоновано два підходи до упорядкування дискретних випадкових величин. У рамках першого підходу вводиться відношення лінійного порядку на множині дискретних випадкових величин. Другий підхід передбачає розбиття множини дискретних випадкових величин на класи еквівалентності на основі порівняння їх моментів і введення лінійного порядку на одержаній фактор-множині. Розглянуто деякі властивості запропонованих відношень порядку. З використанням введених відношень порядку сформульовано оптимізаційні задачі, які враховують ймовірнісну невизначеність даних.

O. O. Iemets, T. M. Barbolina

About optimization problems with probabilistic uncertainty

Two approaches to the ordering of discrete random variables for the use in optimization problem statements are proposed. Within the first approach, the relation of a linear order on a set of discrete random variables is introduced. The second approach assumes the partition of a set of discrete random variables into equivalence classes on the basis of the comparison of their moments and the introduction of a linear order on the obtained quotient set. Some properties of the offered orders are considered. Using the introduced orders, some optimization problems, which consider the probabilistic uncertainty of data, are posed.