



УДК 517.5

В. Ф. Бабенко, О. В. Коваленко

Об интерполяционных и экстремальных свойствах периодических идеальных сплайнов

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В. П. Моторным)

Доказано существование и экстремальное свойство периодического идеального сплайна, интерполирующего заданную функцию в среднем.

Пусть C^m ($m \in \mathbb{Z}_+$) обозначает пространство m раз непрерывно дифференцируемых (непрерывных при $m = 0$) 2π -периодических функций; L_∞ — пространство всех измеримых 2π -периодических функций с конечной нормой $\|f\| = \|f\|_\infty$. Для $r \in \mathbb{N}$ через L_∞^r будем обозначать пространство функций $f \in C$ таких, что функция $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывна, а $f^{(r)} \in L_\infty$.

Для $r \in \mathbb{N}$ функцию $s(t) \in C^{r-1}$ назовем сплайном порядка r с узлами в точках

$$t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} := t_0 + 2\pi, \quad (1)$$

если на каждом из промежутков $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, n$, $s(t)$ совпадает с сужением на этот промежуток некоторого алгебраического многочлена степени не выше r .

Идеальным сплайном порядка r назовем сплайн $s(t)$ порядка r с узлами в точках (1), у которого $s^{(r)}(t) = (-1)^i \epsilon$, $\epsilon \in \{1, -1\}$, $t \in (t_i, t_{i+1})$, $i = 0, \dots, n$.

Для $r, n \in \mathbb{N}$ обозначим через Γ_n^r множество 2π -периодических идеальных сплайнов порядка r с не более чем n узлами.

Идеальные сплайны играют важную роль при точном решении многих экстремальных задач теории аппроксимации (см., например, [1, 2]).

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $r, m \in \mathbb{N}$, $\varphi_k(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — интегрируемые четные функции с компактными носителями $[-\epsilon_k, \epsilon_k]$, положительные на $(-\epsilon_k, \epsilon_k)$ и такие, что

$$\int_{-\epsilon_k}^{\epsilon_k} \varphi_k(x) dx = 1, \quad k = 1, \dots, 2m + 1.$$

Пусть также числа $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{2m+1} < 2\pi$ таковы, что носители $[x_k - \varepsilon_k, x_k + \varepsilon_k]$ функций $\varphi_k(x - x_k)$ попарно не пересекаются и содержатся в $[0, 2\pi)$, $k = 1, \dots, 2m + 1$. Тогда для любой функции $f \in L_\infty^r$ существуют число ξ и сплайн $s(t) \in \xi\Gamma_{2m}^r$ такие, что

$$\int_{x_k - \varepsilon_k}^{x_k + \varepsilon_k} \varphi_k(x - x_k) s(x) dx = \int_{x_k - \varepsilon_k}^{x_k + \varepsilon_k} \varphi_k(x - x_k) f(x) dx, \quad k = 1, \dots, 2m + 1.$$

При этом

$$\|s^{(r)}\|_\infty = |\xi| \leq \|f^{(r)}\|_\infty. \quad (2)$$

Из теоремы 1, в частности, следует возможность обыкновенной и кратной интерполяции периодическими идеальными сплайнами.

Теорема 2. Пусть $r, m \in \mathbb{N}$, $0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_l < 2\pi$, $k_1, \dots, k_l \leq r - 1$ — целые неотрицательные числа такие, что $\sum_{j=1}^l (k_j + 1) = 2m + 1$. Тогда для любой функции $f \in L_\infty^r$ существуют число ξ и сплайн $s(t) \in \xi\Gamma_{2m}^r$ такие, что

$$s^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i), \quad j = 0, \dots, k_i; \quad i = 1, \dots, l.$$

При этом выполняется экстремальное свойство (2).

В частности, если заданы числа $0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{2m+1} < 2\pi$ и функция $f \in L_\infty^r$, то существуют число ξ и сплайн $s(t) \in \xi\Gamma_{2m}^r$ такие, что

$$s(x_i) = f(x_i), \quad i = 1, \dots, 2m + 1.$$

При этом выполняется экстремальное свойство (2).

Теорема 2 дает периодический аналог результатов, которые в непериодическом случае были получены С. Карлиным [3, 4]. Методы доказательства, используемые нами, значительно проще тех, которые применял С. Карлин, и могут быть использованы для решения других задач.

Приведем основные этапы доказательства теоремы 1. Теорема 2 легко устанавливается с помощью теоремы 1.

Символом $*$ далее будем обозначать операцию свертки 2π -периодических функций. Пусть $f \in C$. Обозначим через $\nu(f)$ количество перемен знака f на периоде. Для $\varepsilon > 0$ и $x \in \mathbb{R}$ положим

$$A_\varepsilon(x) := \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{e^{ijx}}{\operatorname{ch} \varepsilon j}.$$

Отметим некоторые свойства A_ε . Если $f \in C$, то $(A_\varepsilon * f)$ — аналитическая функция на вещественной прямой (см. [5, 6], а также [7, § 3]); $(A_\varepsilon * f)$ равномерно сходится к f при $\varepsilon \rightarrow 0$ на вещественной прямой; $\nu(A_\varepsilon * f) \leq \nu(f)$ (см., например, [8]); A_ε — четная функция; $\int_{\mathbb{R}} A_\varepsilon(x) dx = 1$. Всюду далее через $B_r(t)$, $r \in \mathbb{N}$, будем обозначать ядро Бернулли порядка r (см., например, [1, § 3.1]).

Положим $C_k := \int_{x_k - \varepsilon_k}^{x_k + \varepsilon_k} \varphi_k(x - x_k) f(x) dx$, $k = 1, 2, \dots, 2m + 1$. Для $\varepsilon > 0$ рассмотрим экстремальную задачу

$$\int_0^{2\pi} \left| c + \sum_{k=1}^{2m+1} c_k (A_\varepsilon * B_r * \varphi_k)(x - x_k) \right| dx \rightarrow \min \quad (3)$$

при условиях

$$\sum_{k=1}^{2m+1} c_k C_k = 1, \quad (4)$$

$$\sum_{k=1}^{2m+1} c_k = 0. \quad (5)$$

Свертка с ядром A_ε нам нужна для того, чтобы подынтегральная функция была аналитической, а значит, минимизируемая функция была непрерывно дифференцируемой по параметрам c и c_k , $k = 1, \dots, 2m + 1$. Нетрудно доказать, что минимум в экстремальной задаче (3)–(5) существует.

Введем функцию Лагранжа:

$$L := \eta \int_0^{2\pi} \left| c + \sum_{k=1}^{2m+1} c_k (A_\varepsilon * B_r * \varphi_k)(x - x_k) \right| dx + \lambda \left(\sum_{k=1}^{2m+1} c_k C_k - 1 \right) + \mu \sum_{k=1}^{2m+1} c_k.$$

Согласно методу неопределенных множителей Лагранжа (см. например, [9, § 2]), существуют числа $\eta_\varepsilon, \lambda_\varepsilon, \mu_\varepsilon \in \mathbb{R}$ такие, что $\eta_\varepsilon^2 + \lambda_\varepsilon^2 + \mu_\varepsilon^2 \neq 0$ (мы можем, например, считать, что $\eta_\varepsilon^2 + \lambda_\varepsilon^2 + \mu_\varepsilon^2 = 1$), и $c^\varepsilon, c_1^\varepsilon, c_2^\varepsilon, \dots, c_{2m+1}^\varepsilon \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие равенствам (4) и (5), такие, что

$$\eta_\varepsilon \int_0^{2\pi} \operatorname{sgn} \left[c^\varepsilon + \sum_{k=1}^{2m+1} c_k^\varepsilon (A_\varepsilon * B_r * \varphi_k)(x - x_k) \right] dx = 0$$

и для $j = 1, 2, \dots, 2m + 1$

$$\eta_\varepsilon \int_0^{2\pi} \operatorname{sgn} \left[c^\varepsilon + \sum_{k=1}^{2m+1} c_k^\varepsilon (A_\varepsilon * B_r * \varphi_k)(x - x_k) \right] (A_\varepsilon * B_r * \varphi_j)(x - x_j) dx + \lambda_\varepsilon C_j + \mu_\varepsilon = 0.$$

С помощью предельного перехода при $\varepsilon \rightarrow 0$ отсюда выводится, что существуют числа $\eta, \lambda, \mu, \eta^2 + \lambda^2 + \mu^2 = 1$ и функция $g(x)$, почти всюду отличная от нуля и такая, что $\nu(g) \leq 2m$, для которых $\eta \int_0^{2\pi} \operatorname{sgn} g(x) dx = 0$, и для $k = 1, 2, \dots, 2m + 1$

$$\eta \int_0^{2\pi} \operatorname{sgn} g(x) (B_r * \varphi_k)(x - x_k) dx + \lambda C_k + \mu = 0. \quad (6)$$

Предположение о том, что $\eta = 0$ или $\lambda = 0$ приводит к противоречию. Это значит, что для функции $h(x) := (\text{sgn } g * B_r)(x)$ имеем $h^{(r)}(x) = \text{sgn } g(x)$, а следовательно, $h(x) \in \Gamma_{2m}^r$.

Из (6) получаем, что для $k = 1, \dots, 2m + 1$

$$\begin{aligned} 0 &= \eta \int_0^{2\pi} \text{sgn } g(x) (B_r * \varphi_k)(x - x_k) dx + \lambda C_k + \mu = \\ &= (-1)^r \eta (\text{sgn } g * B_r * \varphi_k)(x_k) + \lambda C_k + \mu = (-1)^r \eta (\varphi_k * h)(x_k) + \lambda C_k + \mu = \\ &= (-1)^r \eta \int_{x_k - \varepsilon_k}^{x_k + \varepsilon_k} \varphi_k(x - x_k) h(x) dx + \lambda C_k + \mu \end{aligned}$$

(последнее равенство верно в силу четности $\varphi_k(x)$).

Это значит, что идеальный сплайн $s(x) := -((-1)^r \eta h(x) + \mu) / \lambda$ является искомым интерполяционным сплайном.

Покажем, что $\|s^{(r)}\|_\infty \leq \|f^{(r)}\|_\infty$. Предположим противное. Пусть $\|s^{(r)}\|_\infty > \|f^{(r)}\|_\infty$. Положим $\delta(x) := s(x) - f(x)$. Тогда $\delta^{(r)}(x) = s^{(r)}(x) - f^{(r)}(x)$ может менять знак только в узлах сплайна $s(x)$, а значит, $\nu(\delta^{(r)}) \leq 2m$. Так как $\int_{x_k - \varepsilon_k}^{x_k + \varepsilon_k} \varphi_k(x - x_k) \delta(x) dx = 0$, функция $\delta(x)$ не равна нулю тождественно ни на каком интервале из $[0; 2\pi]$ и $\varphi_k(x)$ — неотрицательная функция ($k = 1, \dots, 2m + 1$), то на каждом интервале $(x_k - \varepsilon_k, x_k + \varepsilon_k)$ функция $\delta(x)$ меняет знак. Поскольку носители функций $\varphi_k(x - x_k)$, $k = 1, \dots, 2m + 1$, попарно не пересекаются, то $\nu(\delta) \geq 2m + 1$, что в силу периодичности функции δ приводит к противоречию. Теорема доказана.

1. Корнейчук Н. П. Точные константы в теории приближения. — Москва: Наука, 1987. — 423 с.
2. Корнейчук Н. П., Бабенко В. Ф., Лузун А. А. Экстремальные свойства полиномов и сплайнов. — Киев: Наук. думка, 1992. — 304 с.
3. Karlin S. Some variational problems on certain Sobolev spaces and perfect splines // Bull. Amer. Math. Soc. — 1973. — **79**, No 1. — P. 124–128.
4. Karlin S. Interpolation properties of generalized perfect splines and the solutions of certain extremal problems. I // Trans. Amer. Math. Soc. — 1975. — **206**. — P. 25–66.
5. Ахиезер Н. И. О наилучшем приближении одного класса непрерывных периодических функций // Докл. АН СССР. — 1937. — **17**.
6. Ахиезер Н. И. О наилучшем приближении аналитических функций // Докл. АН СССР. — 1938. — **18**.
7. Никольский С. М. Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1946. — **10**, № 3. — С. 207–256.
8. Mairhuber J. C., Schoenberg I. J., Williamson R. E. On variation diminishing transformations of the circle // Rend. Circ. Mat. Palermo. 1959. — **8**, No 2. — P. 241–270.
9. Галеев Э. М., Тихомиров В. М. Краткий курс теории экстремальных задач. — Москва: Изд-во Моск. ун-та, 1983. — 209 с.

Днепропетровский национальный университет
им. Олеся Гончара

Поступило в редакцию 02.06.2014

В. Ф. Бабенко, О. В. Коваленко

**Про інтерполяційні та екстремальні властивості ідеальних
періодичних сплайнів**

*Доведено існування та екстремальну властивість періодичного ідеального сплайна, що ін-
терполює задану функцію в середньому.*

V. F. Babenko, O. V. Kovalenko

On interpolational and extremal properties of periodic perfect splines

*The existence and the extremal property of a periodic perfect spline, which interpolates the given
function in mean, are proved.*