Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

1 • 2014

МАТЕМАТИКА

УДК 517.5

Е. С. Афанасьева

Об отображениях с модульными условиями в метрических пространствах

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В. Я. Гутлянским)

Изучены свойства континуально слабо плоских пространств, которые являются обобщением недавно введенных пространств Левнера, включающих в себя широко известные группы Карно и Гейзенберга. Развита теория граничного поведения континуально кольцевых Q-гомеоморфизмов относительно p-модуля между континуальными областями в метрических пространствах с мерами. В частности, приведены следствия для случая континуально слабо плоских пространств и континуальных областей квазиэкстремальной длины по Герингу–Мартио.

Прежде чем формулировать результаты работы, напомним некоторые определения. Топологическое пространство *связно*, если его нельзя разбить на два непустых непересекающихся открытых множества. Напомним также, что топологическое пространство T называется *локально связным*, если для любой его точки x_0 и любой ее окрестности U найдется ее связная окрестность $V \subseteq U$. Компактные связные хаусдорфовы пространства называются *континуумами*. Напомним, что топологическое пространство называется *хаусдорфовым*, если для любой пары точек найдутся их взаимно не пересекающиеся окрестности. В дальнейшем для любых множеств A, B и C в топологическом пространстве T через $\Gamma(A, B; C)$ обозначаем семейство всех континуумов γ, соединяющих A и B в C, т. е. таких, что $\gamma \bigcap A \neq \varnothing$, $\gamma \bigcap B \neq \varnothing$ и $\gamma \setminus \{A \bigcup B\} \subseteq C$.

Пространство T будем называть *континуально связным*, если любую пару его точек можно погрузить в континуум γ в T. Под *континуальной областью* в топологическом пространстве T будем понимать открытое континуально связное множество D. Также пространство T будем называть *локально континуально связным в точке* x_0, если для любой окрестности U точки x_0 найдется окрестность $V \subseteq U$, которая является континуальной областью в T. Пространство T будем называть *континуально связным* в точке x_0, если для любой ее окрестности U найдется ее окрестность $V \subseteq U$ такая, что $V \setminus \{x_0\}$ является континуальной областью (ср. [1, с. 274]). Наконец, континуальную область D будем называть *континуально связной в точке* $x_0 \in \partial D$, если для любой окрестности U точки x_0 найдется окрестность $V \subseteq U$ этой точки такая, что $V \cap D$ является континуальной областью.

Далее H^k, $k \in [0, \infty)$, обозначает *k-мерную меру Хаусдорфа* множества A в метрическом пространстве (X, d). Точнее, пусть A — множество в (X, d). Тогда полагаем $H^k(A) := = \sup\limits_{\varepsilon > 0} H^k_{\varepsilon}(A)$, $H^k_{\varepsilon}(A) := \inf \sum\limits_{i=1}^{\infty} (\operatorname{diam} A_i)^k$, где инфимум берется по всем покрытиям A множествами A_i с $\operatorname{diam} A_i < \varepsilon$, (см., например, [2]). Напомним, что $\operatorname{diam} A_i = \sup\limits_{x,y \in A_i} d(x, y)$. Как известно, если для некоторого множества A и $k_1 \geqslant 0$ выполнено условие $H^{k_1}(A) < \infty$, то $H^{k_2}(A) = 0$ для произвольного числа $k_2 > k_1$ (см., например, [2, гл. 7, разд. 1]). В связи с этим вводится величина $\dim_H A := \sup\limits_{H^k(A) > 0} k$, которая называется *хаусдорфовой размерностью* множества A.

В дальнейшем говорим, что континуум в метрическом пространстве (X, d) является *k-спрямляемым*, если его мера Хаусдорфа H^k конечна. 1-спрямляемые континуумы γ будем называть просто *спрямляемыми континуумами* или континуумами *конечной длины*, а $H^1(\gamma)$ — *длиной* γ. Б. Фугледе рассматривал системы мер в абстрактном множестве $\mathcal{X}$ с фиксированной основной мерой (см., например, [3]). Нами будут рассмотрены системы борелевых мер, ассоциированных с континуумами в метрических пространствах (X, d). Именно, мера $m_{\gamma}^{(k)}$, ассоциированная с континуумом γ в (X, d), определяется для каждого борелевого множества B в (X, d) как хаусдорфова мера H^k пересечения $B \cap \gamma$ при фиксированном $k > 0$. В дальнейшем для любого континуума $\gamma \in \Gamma$ мера $m_{\gamma} := m_{\gamma}^{(1)}$.

Пусть теперь (X, d, μ) — метрическое пространство с борелевой мерой μ. Неотрицательную μ-измеримую функцию $\rho\colon X \to [0, \infty]$ называем *допустимой* для семейства континуумов Γ, пишем $\rho \in adm\Gamma$, если $\int\limits_X \rho\, dm_{\gamma} \geqslant 1$, $\forall\, \gamma \in \Gamma$.

p-модуль, $0 < p < \infty$, семейства Γ континуумов γ в (X, d, μ) определим следующим образом:

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\rho \in adm\Gamma} \int\limits_X \rho^p(x)\, d\mu(x). \tag{1}$$

Здесь доопределим $M_p(\Gamma) = +\infty$, если $\Gamma = \varnothing$.

Пусть D и D' — континуальные области в пространствах (X, d, μ) и (X', d', μ') соответственно, $Q\colon X \to (0, \infty)$ — μ-измеримая функция и $p \in (0, \infty)$. Говорим, что гомеоморфизм $f\colon D \to D'$ является *континуально кольцевым Q-гомеоморфизмом в точке* $x_0 \in \overline{D}$ относительно p-модуля, если неравенство

$$M_p(\Gamma(f(C_0), f(C_1); D')) \leqslant \int\limits_{A \cap D} Q(x) \cdot \eta^p(d(x, x_0))\, d\mu(x) \tag{2}$$

выполняется для любого кольца $A = A(x_0, r_1, r_2) := \{x_0 \in X\colon r_1 < d(x, x_0) < r_2\}$, $0 < < r_1 < r_2 < \infty$, любых двух континуумов $C_0 \subset \overline{B(x_0, r_1)} \bigcap D$ и $C_1 \subset D \setminus B(x_0, r_2)$ и любой борелевой функции $\eta\colon (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такой, что $\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\, dr \geqslant 1$. Гомеоморфизм $f\colon D \to D'$ есть *континуально кольцевой Q-гомеоморфизм*, если f является континуально кольцевым Q-гомеоморфизмом в каждой точке $x_0 \in \overline{D}$.

Напомним также, что пространство (X, d, μ) называется *α-регулярным по Альфорсу*, если существует постоянная $C \geqslant 1$ такая, что $C^{-1}r^{\alpha} \leqslant \mu(B_r) \leqslant Cr^{\alpha}$ для всех шаров B_r в X радиуса $r < \operatorname{diam} X$. Как известно, α-регулярные пространства имеют хаусдорфову размерность α (см., например, [4, с. 61]). Пространство (X, d, μ) называется *регулярным по Альфорсу*, если оно α-регулярно по Альфорсу для некоторого $\alpha \in (1, \infty)$. Говорят также, что пространство (X, d, μ) *α-регулярно сверху в точке* $x_0 \in X$, если существует постоянная $C > 0$ такая, что $\mu(B(x_0, r)) \leqslant Cr^{\alpha}$ для всех шаров $B(x_0, r)$ с центром в точке $x_0 \in X$ радиуса $r < r_0$. Будем также говорить, что пространство (X, d, μ)-*регулярно сверху*, если последнее условие выполнено в каждой точке x для некоторого $\alpha \in (1, \infty)$.

Границу ∂D континуальной области D будем называть *континуально слабо плоской в точке* $x_0 \in \partial D$ относительно p-модуля, $p \in (0, \infty)$, если для любого числа $N > 0$ и любой окрестности U точки x_0 найдется ее окрестность $V \subset U$ такая, что

$$M_p(\Gamma(E, F; D)) \geqslant N \tag{3}$$

для любых континуумов E и F в D, пересекающих ∂U и ∂V. Далее ∂D будем называть *континуально сильно достижимой* в точке $x_0 \in \partial D$ относительно p-модуля, $p \in (0, \infty)$, если для любой окрестности U точки x_0 найдется компакт $E \subset D$, окрестность $V \subset U$ точки x_0 и число $\delta > 0$ такие, что

$$M_p(\Gamma(E, F; D)) \geqslant \delta \tag{4}$$

для любого континуума F в D, пересекающего ∂U и ∂V (ср. [5]).

Наконец, ∂D называется *континуально сильно достижимой* относительно p-модуля, $p \in (0, \infty)$, и *континуально слабо плоской* относительно p-модуля, $p \in (0, \infty)$, если соответствующие свойства имеют место в каждой точке ее границы.

Следуя [5], говорим, что функция $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ имеет *конечное среднее колебание в точке* $x_0 \in X$, сокр. $\varphi \in FMO(x_0)$, если

$$\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \frac{1}{\mu(B(x_0, \varepsilon))} \int\limits_{B(x_0, \varepsilon)} |\varphi(x) - \widetilde{\varphi}_{\varepsilon}| \, d\mu(x) < \infty, \tag{5}$$

где $\widetilde{\varphi}_{\varepsilon} = \dfrac{1}{\mu(B(x_0, \varepsilon))} \displaystyle\int\limits_{B(x_0, \varepsilon)} \varphi(x) \, d\mu(x)$ — среднее значение функции φ по шару $B(x_0, \varepsilon) = \{x \in X : d(x, x_0) < \varepsilon\}$ относительно меры μ. Здесь условие (5) включает предположение, что φ интегрируема относительно меры μ по некоторому шару $B(x_0, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.

Предложение 1. *Если для некоторого набора чисел $\varphi_{\varepsilon} \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$,*

$$\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \frac{1}{\mu(B(x_0, \varepsilon))} \int\limits_{B(x_0, \varepsilon)} |\varphi(x) - \varphi_{\varepsilon}| \, d\mu(x) < \infty,$$

то $\varphi \in FMO(x_0)$.

Следствие 1. *В частности, если*

$$\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \frac{1}{\mu(B(x_0, \varepsilon))} \int\limits_{B(x_0, \varepsilon)} |\varphi(x)| \, d\mu(x) < \infty,$$

то $\varphi \in FMO(x_0)$.

Варианты следующей леммы из [5] были сначала доказаны для BMO функций и внутренних точек области D в $\mathbb{R}^n$ при $n = 2$ и $n \geqslant 3$ соответственно, а затем для граничных точек D в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, с условием удвоения меры и FMO функций (см. историю вопроса более подробно в [1, гл. 13]).

Лемма 1. *Пусть пространство (X, d, μ) p-регулярно сверху с $p \geqslant 2$ в точке x_0 и*

$$\mu(B(x_0, 2r)) \leqslant \gamma \cdot \log^{p-2}\frac{1}{r} \cdot \mu(B(x_0, r)) \qquad \forall\, r \in (0, r_0). \tag{6}$$

Тогда для любой неотрицательной функции $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ класса $FMO(x_0)$

$$\int\limits_{A(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0)} \frac{\varphi(x)d\mu(x)}{\left(d(x, x_0)\log\dfrac{1}{d(x,x_0)}\right)^p} = O\left(\log\log\frac{1}{\varepsilon}\right) \tag{7}$$

при $\varepsilon \to 0$ и некотором $\varepsilon_0 \in (0, \delta_0)$, где $\delta_0 = \min(e^{-e}, d_0)$, $d_0 := \sup\limits_{x\in D} d(x, x_0)$.

1. Модули семейств континуумов, содержащих точку.

Лемма 2. *Пусть выполнено условие*

$$\int\limits_{A(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0)} \psi^p(d(x, x_0))\, d\mu(x) = o\left(\left[\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\, dt\right]^p\right) \tag{8}$$

при $\varepsilon \to 0$, где $\varepsilon_0 \in (0, \infty)$, и пусть $\psi(t)$ — неотрицательная функция на $(0, \infty)$ такая, что $0 < \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\, dt < \infty$, $\forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Тогда p-модуль, $p \in (0, \infty)$, семейства всех континуумов в X, содержащих точку x_0, равен нулю.

Замечание 1. Условие (8) включает предположение, что при $\varepsilon \to 0$

$$\int\limits_{A(x_0,\varepsilon,\varepsilon_1)} \psi^p(d(x, x_0))\, d\mu(x) = o\left(\left[\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_1} \psi(t)\, dt\right]^p\right) \qquad \forall\, \varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_0).$$

Теорема 1. *Пусть для некоторого $\varepsilon_0 \in (0, \infty)$, при $\varepsilon \to 0$, выполнено условие*

$$\int\limits_{A(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0)} \frac{d\mu(x)}{d^p(x, x_0)} = o\left(\left[\log\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right]^p\right). \tag{9}$$

Тогда p-модуль, $p \in (0, \infty)$, семейства всех континуумов в X, содержащих точку x_0, равен нулю.

2. Слабо плоские пространства. Аналогично [5] (см. также [1, гл. 13]), континуально связное пространство (X, d, μ) называем *континуально слабо плоским в точке $x_0 \in X$* относительно p-модуля, $p \in (0, \infty)$, если для любой окрестности U точки x_0 и любого числа $N > 0$ найдется окрестность $V \subseteq U$ точки x_0 такая, что $M_p(\Gamma(E, F; X)) \geqslant N$ для любых континуумов E и F в X, пересекающих ∂V и ∂U. Говорим также, что континуально связное пространство (X, d, μ) *континуально сильно достижимо в точке $x_0 \in X$* относительно p-модуля, $p \in (0, \infty)$, если для любой окрестности U точки x_0 найдется окрестность $V \subseteq U$ точки x_0, компактное множество E в X и число $\delta > 0$ такие, что $M_p(\Gamma(E, F; X)) \geqslant \delta$ для любого континуума F в X, пересекающего ∂V и ∂U. Наконец, говорим, что пространство (X, d, μ) *континуально слабо плоское* (*континуально сильно достижимое*), если соответствующие свойства выполнены в каждой точке пространства.

Теорема 2. *Если пространство* (X, d, μ) *континуально слабо плоское в точке* $x_0 \in \in X$ *относительно* p*-модуля,* $p \in (0, \infty)$*, и условие* (8) *(в частности,* (9)*) выполнено, то* (X, d, μ) *континуально связно в точке* x_0

По замечанию 13.8 в [1] приходим к следующему заключению.

Следствие 2. *Если пространство* X *континуально слабо плоское относительно* p*-модуля,* $p \in (0, \infty)$*, и* p*-регулярно сверху в точке* $x_0 \in X$ *с* $p > 1$*, то* X *континуально связно в точке* x_0*.*

3. Континуальные области квазиэкстремальной длины. Континуальная область D в (X, d, μ) является *континуальной областью квазиэкстремальной длины* относительно p-модуля, $p \in (0, \infty)$, сокр. *континуальной* QED *областью*, если

$$M_p(\Gamma(E, F; X)) \leqslant K M_p(\Gamma(E, F; D)) \tag{10}$$

для некоторого конечного числа $K \geqslant 1$ и любых континуумов E и F в D (ср. [6]).

Как видно непосредственно из определений, континуальные QED области в континуально слабо плоских пространствах относительно p-модуля, $p \in (0, \infty)$, имеют континуально слабо плоские границы. Таким образом, приходим к следующим результатам на основе теории граничного поведения континуально кольцевых Q-гомеоморфизмов относительно p-модуля, $p \in (0, \infty)$, развитой в работе [7].

Теорема 3. *Пусть* f *— континуально кольцевой* Q*-гомеоморфизм относительно* p*-модуля,* $p \in (0, \infty)$*, между континуальными* QED *областями* D *и* D' *в континуально слабо плоских пространствах* X *и* X' *соответственно, пусть* $\overline{D'}$ *— компакт. Если в точке* $x_0 \in \partial D$

$$\int\limits_{A(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0)} \frac{Q(x) d\mu(x)}{d(x, x_0)^p} = o\left(\left[\log \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right]^p\right), \tag{11}$$

то f *допускает продолжение в точку* x_0 *по непрерывности в* (X', d')*.*

Следствие 3. *В частности, заключение теоремы 3 имеет место, если сингулярный интеграл*

$$\int \frac{Q(x) d\mu(x)}{d(x, x_0)^p} < \infty \tag{12}$$

сходится в окрестности точки x_0*.*

Теорема 4. *Пусть* f *— континуально кольцевой* Q*-гомеоморфизм относительно* p*-модуля,* $p \in (0, \infty)$*, между континуальными* QED *областями* D *и* D' *в континуально слабо плоских пространствах* X *и* X' *соответственно, пусть* $\overline{D}$ *— компакт. Если* $Q \in L^1_\mu(D)$*, то обратный гомеоморфизм* $g = f^{-1}$ *допускает непрерывное продолжение* $\overline{g} \colon \overline{D'} \to \overline{D}$*.*

Теорема 5. *Пусть* f *— континуально кольцевой* Q*-гомеоморфизм относительно* p*-модуля,* $p \in (0, \infty)$*, между континуальными* QED *областями* D *и* D' *в континуально слабо плоских пространствах* X *и* X' *соответственно, пусть* $\overline{D}$ *и* $\overline{D'}$ *— компакты. Если* $Q \in L^1_\mu(D)$ *удовлетворяет условию* (11) *или* (12) *в каждой точке* $x_0 \in \partial D$*, то* f *допускает гомеоморфное продолжение* $\overline{f} \colon \overline{D} \to \overline{D'}$*.*

Теорема 6. *Пусть f — континуально кольцевой Q-гомеоморфизм относительно p-модуля, $p \in [2, \infty)$, между континуальными* QED *областями D и D' в континуально слабо плоских пространствах X и X' соответственно, пусть $\overline{D'}$ и $\overline{D}$ — компакты. Если в некоторой точке $x_0 \in \partial D$ функция $Q\colon X \to (0, \infty)$ имеет конечное среднее колебание в точке $x_0 \in \partial D$,*

$$\mu(B(x_0, 2r)) \leqslant \gamma \cdot \log^{p-2} \frac{1}{r} \cdot \mu(B(x_0, r)) \qquad \forall\, r \in (0, r_0), \tag{13}$$

и пространство (X, d, μ) p-регулярно сверху в точке x_0, то f допускает продолжение в точку x_0 по непрерывности. Если последние два условия выполнены в каждой точке $x_0 \in \partial D$, то f допускает гомеоморфное продолжение в $\overline{f}\colon \overline{D} \to \overline{D'}$.

Замечание 2. В случае регулярных по Альфорсу пространств имеет место даже условие удвоения меры, которое сильнее условия Р. Р. Салимова (13). В силу компактности $\overline{D}$, Q интегрируема в окрестности ∂D, что следует из условия конечного среднего колебания в точках ∂D. Напомним: чтобы $Q \in FMO(x_0)$ при $x_0 \in \partial D$, достаточно выполнения условия

$$\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \frac{1}{\mu(B(x_0, \varepsilon))} \int\limits_{B(x_0, \varepsilon)} Q(x)\, d\mu(x) < \infty.$$

4. Множества континуально нулевой экстремальной длины. Замкнутое множество A в пространстве (X, d, μ) будем называть *множеством континуально нулевой экстремальной длины* относительно p-модуля, $p \in (0, \infty)$, сокр. континуальным NED-*множеством*, если

$$M_p(\Gamma(E, F; D)) = M_p(\Gamma(E, F; D \setminus A)) \tag{14}$$

для любой континуальной области D в X и любых континуумов E и F в D (ср. [1]).

Также как и в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, континуальные NED-множества A в континуально слабо плоских пространствах относительно p-модуля, $p \in (0, \infty)$, не могут иметь внутренних точек и, кроме того, они не разбивают пространство X даже локально, т. е. $D \setminus A$ имеет единственную компоненту континуальной связности для любой континуальной области D в X. Таким образом, дополнение к континуальным NED-множествам A в X представляет собой весьма частный случай континуальных QED-областей. Поэтому континуальные NED-множества в континуально слабо плоских пространствах относительно p-модулей, $p \in (0, \infty)$, играют ту же роль в проблемах устранимости особых множеств при квазиконформных отображениях и их обобщениях, как и в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$.

Теорема 7. *Пусть X и X' — компактные континуально слабо плоские пространства относительно p-модуля, $p \in (0, \infty)$, D — континуальная область в X, $A \subset D$ — континуальное* NED-*множество в D и f — континуально кольцевой Q-гомеоморфизм относительно p-модуля, $p \in (0, \infty)$, из $G = D \setminus A$ в X' с континуальным* NED-*множеством $A' = C(A, f)$. Если $Q \in L^1_\mu(D)$, то обратный гомеоморфизм $g = f^{-1}\colon G' \to G$, $G' = f(G)$, допускает непрерывное продолжение $\overline{g}\colon D' \to D$, где $D' = G' \bigcup A'$.*

Теорема 8. *Пусть X и X' — компактные континуально слабо плоские пространства относительно p-модуля, $p \in [2, \infty)$, D — континуальная область в X, $A \subset D$ — континуальное* NED-*множество в X и f — континуально кольцевой Q-гомеоморфизм относительно p-модуля, $p \in [2, \infty)$, из $G = D \setminus A$ в X' с континуальным* NED-*множеством*

$A' := C(A, f)$. Если Q имеет конечное среднее колебание и X p-регулярно по Альфорсу в каждой точке $x_0 \in A$, то f допускает гомеоморфное продолжение $\overline{f}\colon D \to D'$, где $D' = G' \bigcup A'$, $G' = f(G)$.

1. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in modern mapping theory. – New York: Springer, 2009. – 367 p.
2. *Гуревич В., Волмэн Г.* Теория размерности. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1948. – 232 с.
3. *Fuglede B.* Extremal length and functional completion // Acta Math. – 1957. – **98**. – P. 171–219.
4. *Heinonen J.* Lectures on analysis on metric spaces. – New York: Springer, 2001. – 151 p.
5. *Рязанов В. И., Салимов Р. Р.* Слабо плоские границы и пространства в теории отображений // Укр. мат. вест. – 2007. – **4**, № 2. – С. 199–234.
6. *Игнатьев А. А., Рязанов В. И.* Конечное среднее колебание в теории отображений // Укр. мат. вест. – 2005.– **2**, № 3. – С. 395–417.
7. *Смоловая Е. С.* Граничное поведение кольцевых Q-гомеоморфизмов в метрических пространствах // Укр. мат. журн. – 2010.– **62**, № 5. – С. 682–689.
8. *Gehring F. W., Martio O.* Quasiextremal distance domains and extension of quasiconformal mappings // J. Anal. Math. – 1985. – **24**. – P. 181–206.
9. *Афанасьева Е. С.* О граничном поведении одного класса отображений в метрических пространствах // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 1. – С. 17–29.

Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Донецк

Поступило в редакцию 04.06.2013

О. С. Афанасьєва

Про відображення з модульними умовами у метричних просторах

Вивчено властивості континуально слабо плоских просторів, які є узагальненням нещодавно введених просторів Льовнера, що включають в себе загально відомі групи Карно та Гейзенберга. Розвинуто теорію граничної поведінки континуально кільцевих Q-гомеоморфізмів відносно p-модуля між континуальними областями у метричних просторах із мірами. Зокрема, наведено наслідки для випадку континуально слабо плоских просторів та континуальних областей квазіекстремальної довжини за Герінгом–Мартіо.

O. S. Afanas'eva

About mappings with modulus conditions in metric spaces

The properties of continually weakly flat spaces that are a generalization of the recently introduced Loewner spaces including the well-known Carnot and Heisenberg groups are studied. The theory of the boundary behaviors of continually ring Q-homeomorphisms relative to a p-module between continual domains in metric spaces with measures is developed. In particular, the consequences for the case of continually weakly flat spaces and continual quasiextremal length domains by Gehring–Martio are presented.