УДК 519.6

О. М. Литвин, О. О. Литвин, О. В. Ткаченко, О. Л. Грицай

Відновлення функцій двох змінних із збереженням класу $C^r(R^2)$ за допомогою їх слідів та слідів їх похідних до фіксованого порядку на заданій лінії

(Представлено академіком НАН України І. В. Сергієнком)

Досліджуються методи побудови операторів відновлення диференційовних функцій двох змінних в околі гладкої кривої, які зберігають клас диференційованості $C^r(R^2)$. Метод використовує для побудови вказаних операторів сліди наближуваної функції та її частинних похідних за однією змінною до заданого порядку на вказаній кривій.

Оператори Тейлора та їх узагальнення, що використовують для своєї побудови значення наближуваної функції та її частинних похідних до заданого порядку $N \geqslant 0$ у деякій точці, мають порядок диференційовності, що повністю визначається диференціальними властивостями допоміжних (базисних) функцій (поліномів алгебраїчних, тригонометричних, узагальнених, сплайнів, вейвлетів тощо). Оскільки функції двох і більше змінних можуть бути задані не тільки своїми значеннями та значеннями своїх частинних похідних в окремих точках, але також своїми слідами та слідами деяких диференціальних операторів на заданих лініях, то оператори, що використовують такі сліди, належать до класу диференційовності, який визначається диференціальними властивостями допоміжних (базисних) функцій і вказаних слідів. Нагадаємо, запис $f(x_1,\ldots,x_n) \in C^r(R^n)$ означає, що сама функція f і всі її частинні похідні до порядку r, $r \geqslant 0$, є неперервними, тобто $\dfrac{\partial^{|\beta|}}{\partial x_1^{\beta_1}\cdots\partial x_n^{\beta_n}} f \in C(R^n)$, $0 \leqslant |\beta| = \beta_1+\cdots+\beta_n \leqslant r$. Отже, в цьому означенні нема ніяких обмежень на частинні похідні порядків γ, $|\gamma| > r$, тобто існує вкладення класів функцій $C^q(R^n) \subseteq C^r(R^n)$, $r \leqslant q < \infty$. У зв'язку з цим будемо говорити, що оператор L зберігає клас диференційовності наближуваної функції f, якщо $f \in C^r(R^n) \Rightarrow Lf \in C^r(R^n)$. Якщо ж $f \in C^r(R^n) \Rightarrow Lf \in C^q(R^n)$, $q < r$, то говоритимемо, що оператор L не зберігає клас диференційовності функції f.

Аналіз літературних джерел. Задача продовження функцій n змінних з границі області на область або на весь n-вимірний простір із збереженням потрібних диференціальних властивостей є однією з ключових задач теорії наближення функцій багатьох змінних (див. [1–11]). В роботі [9] наведено формулу

$$u(x,y) = \sum_{s=0}^{m-1} \frac{\partial^s G(x,y)}{\partial y^s} * \phi_s(x) = \sum_{s=0}^{m-1} \frac{1}{\pi(m-1)!} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_s(t) \frac{\partial^s}{\partial y^s}\left[\frac{y^m}{y^2+(x-t)^2}\right] dt,$$

$$u \in C^{\infty}(R^2),$$

де $(f * g)(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt$ — згортка функцій f, g, яка є розв'язком задачі Коші для ітерованого оператора Лапласа

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^m u(x,y) = 0, \qquad u^{(0,s)}(x,0) = \phi_s(x), \qquad s = \overline{0, m-1}.$$

Функція $G(x,y) = \dfrac{y^{m-1}}{\pi(m-1)!}\dfrac{y}{y^2+x^2}$ є фундаментальним розв'язком цієї задачі, тобто функцією, що задовольняє рівняння

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^m G(x,y) = 0$$

та умови Коші

$$G^{(0,k)}(x,0) = 0, \qquad k = \overline{0, m-2}, \qquad G^{(0,m-1)}(x,0) = \delta(x),$$

$$G^{(0,k)}(x,0) = \left.\frac{\partial^k G(x,y)}{\partial y^k}\right|_{y=0}, \qquad k = \overline{0, m-2}.$$

При $m = 1$ отримуємо формулу Пуассона

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \phi_0(t)\left[\frac{y}{y^2+(x-t)^2}\right]dt,$$

що є розв'язком задачі Коші $u(x,0) = \phi_0(x)$, $x \in R$, для рівняння

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u(x,y) = 0.$$

У роботах [12, 13] досліджувалися оператори відновлення функцій багатьох змінних за допомогою операторів, що зберігають клас диференційовності $C^r(R^n)$, якому належить наближувана функція, і використовують при цьому сліди $u^{(0,s)}(x,0) = \phi_s(x) \in C^{r-s}(R)$, $s = \overline{0, m-1}$, $m \leqslant r$. Але загальний випадок операторів, що зберігають клас диференційовності в околі довільної кривої, не досліджувався. В той же час з практики відомо приклади, у яких необхідно відновлювати поверхні за відомими слідами їх частинних похідних або деякої системи диференціальних операторів (взагалі кажучи, нелінійних) на заданій кривій. Найбільш відомим прикладом такої задачі є задача побудови системи координатних функцій для варіаційних методів розв'язання крайових задач, що точно задовольняють граничні умови на границі області інтегрування. Якщо область, в якій розв'язується крайова задача, є об'єднанням кількох відомих областей, то границя такої області може мати кутові точки, тобто буде недиференційовною лінією складної форми, що є об'єднанням відрізків кількох відомих ліній. Як приклад також відзначимо необхідність відновлення поверхонь лопаток авіадвигунів або лопаток гвинтів на атомних підводних човнах, форма яких знаходиться з умови найкращого обтікання поверхні газом або рідиною шляхом розв'язання відповідних крайових задач (тобто форма поверхні обтікання є невідомою). Такі задачі є важливою складовою процесу конструювання лопаток. Однією з найскладніших задач, які виникають при цьому, є збереження відповідної гладкості наближуваної поверхні (тобто належність відповідних функцій до заданого класу диференційовності) та ізогеометрії (опуклості, вгнутості тощо) [10]. Проблеми, що виникають у задачах продовження функцій, досить повно описані в доповненні В. І. Буренкова до роботи І. Стейна [5, с. 231–235]. Загальний метод розв'язання таких задач можна отримати на основі використання узагальнень операторів інтерлінації функцій із збереженням класу диференційовності [12, 13].

Основні твердження роботи. В даній роботі пропонуються і досліджуються методи побудови операторів наближення функцій двох змінних із збереженням класу диференційовності, якому належить наближувана функція за умови, що сліди цих операторів і сліди їх частинних похідних за однією із змінних до фіксованого порядку на заданій лінії збігаються із відповідними слідами наближуваної функції.

Вказані оператори планується використати для побудови узагальнених формул інтерлінації функцій двох змінних із збереженням потрібного класу диференційовності та із заданими слідами і слідами частинних похідних до фіксованого порядку на системі неперетинних плоских кривих у декартовій системі координат.

Оператори відновлення функції двох змінних за допомогою її слідів та слідів її похідних за однією змінною на заданій лінії. Зауважимо, що поліном Тейлора за однією змінною

$$T_N f(x,y) = \sum_{s=0}^{N} f^{(0,s)}(x,\gamma(x)) \frac{(y-\gamma(x))^s}{s!}, \qquad f^{(0,s)}(x,\gamma(x)) = \frac{\partial^s f(x,y)}{\partial y^s}\bigg|_{y=\gamma(x)}$$

має властивості

$$\frac{\partial^q T_N f(x,y)}{\partial y^q}\bigg|_{y=\gamma(x)} = \frac{\partial^q f(x,y)}{\partial y^q}\bigg|_{y=\gamma(x)}, \qquad 0 \leqslant q \leqslant N,$$

$$f \in C^r(R^2) \bigcap f^{(0,s)} \in C^{r-s}(R^2) \Rightarrow T_N f \in C^{r-N}(R^2), \qquad 0 \leqslant s \leqslant N \leqslant r.$$

Тобто цей оператор $T_N f(x,y)$ не зберігає клас диференційовності $C^r(R^2)$ функції $f(x,y)$. Це твердження, зокрема, виконується для функцій

$$f(x,y) = |x+y-1|^{2q+1} \in C^{2q}(R^2), \qquad f \notin C^{2q+1}(R^2),$$

$$f(x,y) = |x+y-1|^{2q+1}(x+y-1) \in C^{2q+1}(R^2), \qquad f \notin C^{2q+2}(R^2).$$

Таким чином, оператори $T_N f(x,y)$ не можна використовувати замість $f(x,y)$ без додаткового аналізу у тих задачах, де істотною є вимога, щоб функція $f(x,y)$ мала неперервні похідні порядку $r > 0$. Потрібні оператори такого типу вперше були побудовані в роботах [13–15] для випадку $\gamma(x) = 0$ в дискретній та інтегральній формах. Зокрема в дискретній формі оператор

$$L_N f(x,y) = \sum_{\ell=0}^{N} \lambda_{0,\ell} f(x+\beta_{0,\ell} y, 0) + \sum_{s=1}^{N}\sum_{\ell=0}^{N} \lambda_{s,\ell} \int\limits_{0}^{x+\beta_{s,\ell} y} f^{(0,s)}(t,0) \frac{(x+\beta_{s,\ell} y - t)^{s-1}}{(s-1)!} dt$$

задовольняє такі умови:

$$f \in C^r(R^2) \bigcap f^{(0,s)} \in C^{r-s}(R^2) \Rightarrow L_N f \in C^r(R^2), \qquad 0 \leqslant s \leqslant N \leqslant r,$$

$$\left.\frac{\partial^q L_N f(x,y)}{\partial y^q}\right|_{y=0} = \left.\frac{\partial^q f(x,y)}{\partial y^q}\right|_{y=0}, \qquad 0 \leqslant q \leqslant N,$$

якщо невідомі $\lambda_{s,\ell}$, $\ell = \overline{0,N}$, для кожного $s = \overline{0,N}$ знаходяться шляхом розв'язання СЛАР

$$\sum_{\ell=1}^{N} \lambda_{s,\ell}(\beta_{s,\ell})^p = \delta_{p,s}, \qquad 0 \leqslant p \leqslant N,$$

при умові, що $-1 \leqslant \beta_{s,0} < \beta_{s,1} < \cdots < \beta_{s,N} \leqslant 1$, $s = 0, 1, \ldots, N$.

Нижче узагальнимо цей результат на випадок, коли сліди наближуваної функції та сліди її частинних похідних за змінною y до фіксованого порядку задаються на лінії $y = \gamma(x) \in C^r(R)$. Нехай $f^{(0,s)}(x,y) = \partial^s f(x,y)/\partial y^s$. Введемо до розгляду оператор

$$O_N f(x,y) = \sum_{\ell=1}^{N} \lambda_{0,\ell} f(x + \beta_{0,\ell}(y - \gamma(x)), \gamma(x)) +$$

$$+ \sum_{s=1}^{N}\sum_{\ell=1}^{N} \lambda_{s,\ell} \int\limits_{0}^{x+\beta_{s,\ell}(y-\gamma(x))} f^{(0,s)}(t,\gamma(t)) \frac{(x + \beta_{s,\ell}(y-\gamma(x)) - t)^{s-1}}{(s-1)!} dt,$$

де $\beta_{s,\ell} \in [-1, 1]$, $s = \overline{0,N}$, $\ell = \overline{0,N}$ — задані різні числа (дійсні або комплексні), невідомі $\lambda_{s,\ell}$, $s = \overline{0,N}$, $\ell = \overline{0,N}$, для кожного значення $s \in [0, N]$ знаходяться шляхом розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{\ell=1}^{N} \lambda_{s,\ell}(\beta_{s,\ell})^p = \delta_{p,s}, \qquad 0 \leqslant p \leqslant N.$$

Зауважимо, що ці системи мають єдиний розв'язок, оскільки їх детермінанти $\det[\beta_{s,\ell}^p]_{\ell=\overline{0,N}}^{p=\overline{0,N}} \neq 0$, $s = \overline{0,N}$, є детермінантами Вандермонда.

Теорема 1. *Оператор $O_N f$ має властивості*

$$f \in C^r(R^2) \Rightarrow O_N f \in C^r(R^2),$$

$$\left.\frac{\partial^q O_N f(x,y)}{\partial y^q}\right|_{y=\gamma(x)} = \left.\frac{\partial^q f(x,y)}{\partial y^q}\right|_{y=\gamma(x)}, \qquad 0 \leqslant q \leqslant N, \qquad N \leqslant r.$$

Як частинний випадок, при $\gamma(x) = 0$ отримуємо $L_N f = O_N f$.

Оператори відновлення функції 2-х змінних в інтегральній формі за допомогою її слідів та слідів її похідних за однією змінною на заданій кривій лінії. Введемо до розгляду оператор

$$D_N u(x,y) = \int\limits_{-1}^{1} G_0(\beta) u(x + \beta(y - \gamma(x)), \gamma(x)) d\beta +$$

$$+ \sum_{s=1}^{N} \int\limits_{-1}^{1} G_s(\beta) \int\limits_{0}^{x+\beta(y-\gamma(x))} u^{(0,s)}(t,\gamma(t)) \frac{(x + \beta(y-\gamma(x)) - t)^{s-1}}{(s-1)!} dt d\beta.$$

Теорема 2. *Оператор $D_N f$ має властивості*

$$f \in C^r(R^2) \Rightarrow D_N f \in C^r(R^2),$$

$$\left.\frac{\partial^q D_N f(x,y)}{\partial y^q}\right|_{y=\gamma(x)} = \left.\frac{\partial^q f(x,y)}{\partial y^q}\right|_{y=\gamma(x)}, \qquad 0 \leqslant q \leqslant N, \qquad N \leqslant r,$$

якщо $\int\limits_{-1}^{1} G_s(\beta)\beta^p d\beta = \delta_{s,p}$, $0 \leqslant s,\ p \leqslant N$.

Введемо до розгляду ядра $G_s(x,y,\beta)$, $0 \leqslant s \leqslant N$, інтегральних операторів, залежні від трьох змінних x, y, β, і побудуємо за їх допомогою такий інтегральний оператор, у якому функція і її частинні похідні за змінною y входять під знак інтеграла

$$D_N u(x,y) = \int\limits_{-1}^{1} G_0(x,y,\beta) u(x + \beta(y - \gamma(x)), \gamma(x)) d\beta +$$

$$+ \sum_{s=1}^{N} \int\limits_{-1}^{1} G_s(x,y,\beta) \int\limits_{0}^{x+\beta(y-\gamma(x))} u^{(0,s)}(t,\gamma(t)) \frac{(x + \beta(y - \gamma(x)) - t)^{s-1}}{(s-1)!} dt d\beta.$$

Теорема 3. *Оператори $D_N f(x,y)$ мають властивості*

$$f \in C^r(R^2) \Rightarrow D_N f \in C^r(R^2),$$

$$\left.\frac{\partial^q D_N f(x,y)}{\partial y^q}\right|_{y=\gamma(x)} = \left.\frac{\partial^q f(x,y)}{\partial y^q}\right|_{y=\gamma(x)}, \qquad 0 \leqslant q \leqslant N, \qquad N \leqslant r,$$

якщо $\int\limits_{-1}^{1} G_s(x,\gamma(x),\beta)\beta^p d\beta = \delta_{s,p}$, $0 \leqslant s,\ p \leqslant N$.

1. *Сергієнко І. В., Дейнека В. В.* Системний аналіз. – Київ: Наук. думка, 2013. – 500 с.
2. *Сергієнко І. В., Задірака В. К., Литвин О. М.* Елементи загальної теорії оптимальних алгоритмів і суміжні питання. – Київ: Наук. думка, 2012. – 404 с.
3. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – Москва: Наука, 1969. – 480 с.
4. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. – Москва: Наука, 1975. – 480 с.
5. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций / Пер. с англ. – Москва: Мир, 1973. – 342 с.
6. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. – Москва: Наука, 1979. – 318 с.
7. *Хермандер Л.* Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. – Москва: Мир, 1986. – 455 с.
8. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. – Москва: Наука, 1966. – 724 с.
9. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй специальный курс. – Москва: Наука, 1965. – 327 с.
10. *Квасов Б. И.* Методы изогеометрической аппроксимации сплайнами. – Москва: Физматлит, 2006. – 360 с.
11. *Математическая* энциклопедия / Под ред. И. М. Виноградова. В 5-ти т. Т. 5. – Москва: Сов. энциклопедия, 1984. – 1215 с.
12. *Литвин О. М.* Інтерполяція функцій та їх нормальних похідних на гладких лініях в R^n // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1984. – № 7. – С. 15–19.

13. *Литвин О. М.* Точний розв'язок задачі Коші для рівняння $\prod_{i=0}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial t}-a_i^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(x,t)=g(x,t)$ // Там само. – 1991. – № 3. – С. 12–17.
14. *Литвин О. М.* Побудова функцій n змінних із заданими нормальними похідними на R^m $(1 \leqslant m \leqslant n-1)$ із збереженням класу $C^r(R^n)$ // Там само. – 1987. – № 5. – С. 13–17.
15. *Литвин О. М.* Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Харків: Основа, 2002. – 544 с.

Українська інженерно-педагогічна академія, Харків
ДП "Івченко-Прогрес", Запоріжжя

Надійшло до редакції 25.06.2013

О. Н. Литвин, О. О. Литвин, А. В. Ткаченко, О. Л. Грицай

Восстановление функций двух переменных с сохранением класса $C^r(R^2)$ с помощью их следов и следов их производных до фиксированной степени на заданной линии

Исследуются методы построения операторов восстановления дифференцированных функций двух переменных в окрестности гладкой кривой, которые сохраняют класс дифференцируемости $C^r(R^2)$. Метод использует для построения указанных операторов следы приближаемой функции и ее частных производных по одной переменной до заданного порядка на указанной кривой.

O. M. Lytvyn, O. O. Lytvyn, O. V. Tkachenko, O. L. Gritsay

Recovery of the functions of two variables with preservation of the class $C^r(R^2)$ with the help of their traces and the traces of their derivatives up to a fixed order on the given curve

The methods of construction of the operators of recovery of differentiable functions of two variables in a vicinity of the smooth curve, which preserve the class of differentiability $C^r(R^2)$, are studied. The methods use the traces of an approximated function and its partial derivatives with respect to one variable up to a given order on the given curve.