УДК 517.91,531.38,531.36

Академик НАН Украины **А. М. Ковалев, Г. В. Горр, В. Н. Неспирный**

Инвариантные соотношения неавтономных систем дифференциальных уравнений

Обобщен метод инвариантных соотношений Пуанкаре, Леви-Чивиты, Харламова на системы дифференциальных уравнений с правыми частями, зависящими от времени. В качестве примера рассмотрены уравнения движения неавтономного тяжелого гиростата, найдены условия существования равномерных вращений и построены инвариантные многообразия.

Метод инвариантных соотношений (ИС) системы обыкновенных дифференциальных уравнений, развитый в работах А. Пуанкаре [1], Т. Леви-Чивиты [2], П. В. Харламова [3], получил широкое применение в задачах динамики твердого тела, теории устойчивости движения механических систем, задачах управления, стабилизации и синхронизации динамических систем. С помощью этого метода найдены многочисленные классы новых точных решений уравнений Эйлера–Пуассона и их обобщений [4–6], разработана теория вложения инвариантных многообразий в семейство интегральных многообразий [7], исследованы свойства управляемости механических систем [8]. Важность теории ИС прослеживается и в задачах устойчивости решений обыкновенных дифференциальных уравнений [9, 10].

Метод ИС [3] был изначально предложен и обоснован для систем, правые части которых явно не зависят от времени. В данной работе исследованы ИС для неавтономных систем дифференциальных уравнений. Обобщение метода ИС дает возможность расширить класс рассматриваемых систем и позволяет распространить многие результаты, полученные в динамике твердого тела и теории устойчивости, на нестационарный случай.

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots, x_n, t), \qquad i = \overline{1, n}, \tag{1}$$

где t — независимая переменная, $x_1, \ldots, x_n$ — неизвестные функции этой переменной, а X_i — функции от $n+1$ переменных, заданные на некотором открытом множестве U пространства размерности $n+1$, в котором координатами являются компоненты вектора $(x_1, \ldots, x_n, t)$. Будем предполагать, что функции $X_i(x_1, \ldots, x_n, t)$, $i = \overline{1, n}$, имеют непрерывные частные производные любого порядка.

При рассмотрении неавтономной системы (1) целесообразно преобразовать ее к автономному виду. Следуя [11], положим $t = x_{n+1}$. Тогда уравнения (1) можно записать в виде

$$\dot{u}_i = Y_i(u_1, \ldots, u_{n+1}), \qquad i = \overline{1, n+1}, \tag{2}$$

где $Y_i \equiv X_i$, $i = \overline{1, n}$, $Y_{n+1} \equiv 1$. Решению уравнений (1) с начальными условиями $x_i(t_0) = x_i^{(0)}$ будет соответствовать решение уравнений (2) с начальными условиями

$$u_i(0) = x_i^{(0)}, \qquad i = \overline{1, n}, \qquad u_{n+1}(0) = t_0. \tag{3}$$

Это соответствие определяется зависимостью $x_i(t) = u_i(t - t_0)$, $i = \overline{1, n}$.

Определение 1. Непустое множество $M \subseteq U$ называется инвариантным по отношению к (2), если для любой точки $(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, t_0)$ из M решение уравнения (2) с начальными условиями (3) удовлетворяет условию $(u_1(t), \ldots, u_{n+1}(t)) \in M$ при $t \in (t_1 - t_0, t_2 - t_0)$, где (t_1, t_2) — интервал существования соответствующего решения системы (1).

Рассмотрим уравнение

$$f(u_1, \ldots, u_{n+1}) = 0. \tag{4}$$

Предположим, что функция $f(u_1, \ldots, u_{n+1})$ дифференцируема по всем переменным до произвольного порядка, в частности до порядка $n + 1$, и

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial u_{n+1}}\right) \neq 0 \tag{5}$$

в рассматриваемой области U.

Определение 2. Соотношение (4) называется ИС системы (2), если множество G точек, удовлетворяющих этому соотношению, содержит некоторое инвариантное множество.

Поскольку инвариантное множество по определению не может быть пустым, то должна существовать по крайней мере одна точка, для которой (4) выполнено. Поставим задачу об исследовании условий существования ИС (4) у системы (2).

2. Условие инвариантности соотношения (4). Для функции (4) построим последовательность функций

$$\begin{aligned} &f^{(1)}(u_1, \ldots, u_{n+1}) = f(u_1, \ldots, u_{n+1}), \\ &f^{(l)}(u_1, \ldots, u_{n+1}) = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial f^{(l-1)}(u_1, \ldots, u_{n+1})}{\partial u_j} Y_j(u_1, \ldots, u_{n+1}), \qquad l = 2, 3, \ldots, \end{aligned} \tag{6}$$

члены которой являются производными от соответствующих функций в силу уравнений (2).

Лемма 1. *Пусть для уравнений* (2) *соотношение* (4) *инвариантное и множество* G, *определяемое им, содержит инвариантное множество* M. *Тогда для точек множества* M *должны выполняться уравнения*

$$\begin{aligned} &f^{(1)}(u_1, \ldots, u_{n+1}) = 0, \\ &f^{(2)}(u_1, \ldots, u_{n+1}) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &f^{(l)}(u_1, \ldots, u_{n+1}) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{7}$$

Доказательство. Рассмотрим множество M. Выберем произвольную точку $(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, t_0)$ (обозначим ее $u^{(0)}$) этого множества и возьмем решение $u_i = u_i(t)$, удовлетворяющее начальным условиям (3). Поскольку $M \subseteq G$, то в силу определения ИС при подстановке решения в уравнение (4) получим тождество по t

$$f^{(1)}(u_1(t), \ldots, u_{n+1}(t)) = 0. \tag{8}$$

Многократно дифференцируя это тождество по t, получим

$$
\begin{aligned}
&f^{(2)}(u_1(t),\ldots,u_{n+1}(t))=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&f^{(l)}(u_1(t),\ldots,u_{n+1}(t))=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Поскольку тождества (8) и (9) справедливы для всех t, то они верны и при $t=0$, а значит, и для точки $u^{(0)}$. В силу же произвольности $u^{(0)}$ получаем, что соотношения (7) выполнены всюду на M.

Отметим, что в общем случае для составления цепочки производных необходимо потребовать бесконечную дифференцируемость функции $f(u_1,\ldots,u_{n+1})$.

Теорема 1. *Если в последовательности* (6) *существует k независимых членов, то независимыми будут и первые k членов последовательности* (6).

Доказательство. Доказательство будем проводить методом от противного. Предположим, что первые k членов последовательности (6) зависимы. Найдем такое наименьшее число k^*, что первые k^* членов последовательности (6) зависимы. Тогда функции $f^{(1)},\ldots,f^{(k^*-1)}$ независимы, а функции $f^{(1)},\ldots,f^{(k^*)}$ зависимы в области U, причем $k^*\leqslant k$. Тогда на основании утверждения [11, с. 307] можно записать

$$
f^{(k^*)}(u_1,\ldots,u_{n+1})=W(f^{(1)}(u_1,\ldots,u_{n+1}),\ldots,f^{(k^*-1)}(u_1,\ldots,u_{n+1})). \tag{10}
$$

Функция (10) определена и дифференцируема на множестве U и зависит только от функций $f^{(1)},\ldots,f^{(k^*-1)}$. Вычислим производную от левой и правой частей выражения (10) с учетом уравнений (2):

$$
f^{(k^*+1)}(u_1,\ldots,u_{n+1})=\sum_{j=1}^{k^*-1}\frac{\partial W(f^{(1)},\ldots,f^{(k^*-1)})}{\partial f^{(j)}}f^{(j+1)}(u_1,\ldots,u_{n+1}),
$$

т. е. функция $f^{(k^*+1)}$ так же, как и функция $f^{(k^*)}$, оказывается зависимой от первых k^*-1 функций. Аналогично доказывается, что остальные члены последовательности (6) являются зависимыми от $f^{(1)},\ldots,f^{(k^*-1)}$. Однако поскольку все члены последовательности зависят от k^*-1 функции, то любые k^* (и тем более k) членов будут обязательно зависимыми, что противоречит условию теоремы. Полученное противоречие означает справедливость данной теоремы.

Следствие 1. *Если существует непустое множество M, определяемое уравнениями* (7)*, то система* (7) *равносильна своим первым k уравнениям, где k — максимальное количество независимых функций в последовательности* (6).

Доказательство. Так как функции $f^{(i)}$, $i>k$, функционально зависят от первых k функций последовательности, то при фиксированных значениях $f^{(1)}$, …, $f^{(k)}$ каждый член последовательности может принимать лишь одно значение. Поскольку система (7) определяет непустое множество M, то она совместна и существует по крайней мере одна точка, для которой все равенства $f^{(i)}=0$, $i=1,2,\ldots$, выполнены. Это и означает, что из соотношений $f^{(i)}=0$, $i=\overline{1,k}$, следует, что с необходимостью выполнены равенства $f^{(i)}=0$ для всех $i>k$.

Пусть поставлена задача о нахождении уравнений, определяющих множество M при заданном ИС (4). Согласно доказанной выше теореме, необходимо построить цепочку производных (6). Затем нужно поэтапно провести исследование зависимости входящих в (7) уравнений. То есть на первом этапе следует провести исследование зависимости производной $f^{(2)}(u_1, \ldots, u_{n+1})$ от соотношения (4). Если будут найдены условия, при выполнении которых

$$f^{(2)}(u_1, \ldots, u_{n+1})\big|_{f^{(1)}(u_1,\ldots,u_{n+1})=0} \equiv 0,$$

то множество G является инвариантным.

Очевидно, что при дальнейшем изучении системы (7) необходимо рассмотреть случаи

$$f^{(l)}(u_1, \ldots, u_{n+1})\big|_{f^{(1)}(u_1,\ldots,u_{n+1})=0,\ldots,f^{(l-1)}(u_1,\ldots,u_{n+1})=0} \equiv 0. \tag{11}$$

В формуле (11) предусмотрены все варианты исследования системы (7). При выполнении (11) получим систему уравнений, которая задает инвариантное множество M.

3. Равномерные вращения тяжелого гиростата. Применим полученные выше результаты в задаче об условиях существования равномерных вращений гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием силы тяжести:

$$A\dot{\overline{\omega}} = -\overline{L} + \overline{\lambda} \times \overline{\omega} + A\overline{\omega} \times \overline{\omega} + \overline{s} \times \overline{\nu}, \qquad \dot{\overline{\nu}} = \overline{\nu} \times \overline{\omega}, \qquad \dot{\overline{\lambda}} = \overline{L}. \tag{12}$$

Здесь $\overline{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ — угловая скорость тела-носителя; $\overline{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ — единичный вектор, указывающий направление силы тяжести; $\overline{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ — гиростатический момент; $\overline{L}$ — вектор-функция, характеризующая взаимодействие тела-носителя и носимых тел; A — тензор инерции; $\overline{s} = (s_1, s_2, s_3)$ — вектор, сонаправленный с вектором OC, где O — неподвижная точка, C — центр тяжести гиростата.

Уравнения (12) имеют два интеграла

$$\overline{\nu} \cdot \overline{\nu} = 1, \qquad (A\overline{\omega} + \overline{\lambda}) \cdot \overline{\nu} = k, \tag{13}$$

где k — произвольная постоянная.

Пусть тело-носитель совершает равномерное вращение относительно наклонной оси, которая характеризуется вектором $\overline{\gamma}_*$ в неподвижном пространстве. В силу известного свойства этот вектор будет неизменным и в теле-носителе, т. е.

$$\overline{\omega} = \omega_0 \overline{a}, \tag{14}$$

где $\overline{a}$ — единичный вектор, неизменный в теле-носителе, ω_0 — скорость равномерного вращения. Рассмотрим вначале уравнение Пуассона из (12). Подставим в него выражение (14):

$$\dot{\overline{\nu}} = \omega_0(\overline{\nu} \times \overline{a}). \tag{15}$$

Направим третью ось подвижной системы координат по вектору $\overline{a} = (0, 0, 1)$, а первую ось — по направлению $\overline{\nu}(0) \times \overline{a} = (a_0', 0, 0)$. Тогда из уравнения (15) и геометрического интеграла из (13) вытекает [6]

$$\nu_1 = a_0' \sin \omega_0 t, \qquad \nu_2 = a_0' \cos \omega_0 t, \qquad \nu_3 = a_0, \tag{16}$$

где $a_0 = \cos\theta$, $a_0' = \sin\theta$, а $\theta = (\widehat{\overline{a}, \overline{\nu}})$. Обозначим через $\overline{\nu} = \overline{\nu}(t)$ вектор с координатами (16) и подставим (14) и $\overline{L} = \dot{\overline{\lambda}}$ в первое уравнение системы (12):

$$\dot{\overline{\lambda}}(t) = \omega_0(\overline{\lambda}(t) \times \overline{a}) + \omega_0^2(A\overline{a} \times \overline{a}) + \overline{s} \times \overline{\nu}(t). \tag{17}$$

Таким образом, исследование существования равномерных вращений в задаче (12) сводится к вопросу о существовании решения неавтономного уравнения (17).

Изучение уравнения (17) будем проводить при условии

$$\overline{\lambda}(t) = \lambda_1(t)\overline{\alpha} + \lambda_2(t)\overline{\beta}, \tag{18}$$

где $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\overline{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $|\overline{\alpha}| = |\overline{\beta}| = 1$, $\overline{\alpha} \cdot \overline{\beta} = 0$. Подставим выражение (18) в уравнение (17):

$$\dot{\lambda}_1(t)\overline{\alpha} + \dot{\lambda}_1(t)\overline{\beta} = \omega_0\lambda_1(t)(\overline{\alpha} \times \overline{a}) + \omega_0\lambda_2(t)(\overline{\beta} \times \overline{a}) + \omega_0^2(A\overline{a} \times \overline{a}) + \overline{s} \times \overline{\nu}(t). \tag{19}$$

Структура уравнения (19) показывает, что целесообразно рассмотреть равенства, которые вытекают в результате скалярного умножения левой и правой частей (19) на векторы $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$, $\overline{\alpha} \times \overline{\beta}$:

$$\dot{\lambda}_1(t) = \omega_0\gamma_3\lambda_2(t) + \mu_0 + \mu_3 \sin\omega_0 t + \mu_4 \cos\omega_0 t, \tag{20}$$

$$\dot{\lambda}_2(t) = -\omega_0\gamma_3\lambda_1(t) + \varepsilon_0 + \varepsilon_3 \sin\omega_0 t + \varepsilon_4 \cos\omega_0 t, \tag{21}$$

$$f(\lambda_1, \lambda_2, t) = \omega_0(\beta_3\lambda_1(t) - \alpha_3\lambda_2(t)) + \sigma_0 + \sigma_3 \sin\omega_0 t + \sigma_4 \cos\omega_0 t = 0, \tag{22}$$

где

$$\begin{aligned}
&\gamma_1 = \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2, \qquad \gamma_2 = \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3, \qquad \gamma_3 = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1,\\
&B_1 = A_{13}\omega_0^2 + a_0 s_1, \qquad B_2 = A_{23}\omega_0^2 + a_0 s_2,\\
&\mu_3 = a_0'(\alpha_2 s_3 - \alpha_3 s_2), \qquad \varepsilon_3 = a_0'(\beta_2 s_3 - \beta_3 s_2), \qquad \sigma_3 = a_0'(\gamma_2 s_3 - \gamma_3 s_2),\\
&\mu_4 = a_0'(\alpha_3 s_1 - \alpha_1 s_3), \qquad \varepsilon_4 = a_0'(\beta_3 s_1 - \beta_1 s_3), \qquad \sigma_4 = a_0'(\gamma_3 s_1 - \gamma_1 s_3),\\
&\mu_0 = \alpha_1 B_2 - \alpha_2 B_1, \qquad \varepsilon_0 = \beta_1 B_2 - \beta_2 B_1, \qquad \sigma_0 = \gamma_1 B_2 - \gamma_2 B_1.
\end{aligned} \tag{23}$$

Таким образом, задача об исследовании условий существования равномерных вращений гиростата сводится к анализу условий, при которых соотношение (22) будет инвариантным для системы уравнений (20), (21).

Применим указанный выше метод ИС для неавтономных дифференциальных уравнений. Вычислим первую и вторую производные от ИС (22) в силу уравнений (20), (21) и приравняем их нулю:

$$\dot{f}(\lambda_1, \lambda_2, t) = \omega_0[\gamma_3\omega_0(\alpha_3\lambda_1(t) + \beta_3\lambda_2(t)) + p_0 + p_3 \sin\omega_0 t + p_4 \cos\omega_0 t] = 0, \tag{24}$$

$$\ddot{f}(\lambda_1, \lambda_2, t) = \omega_0^2[\gamma_3^2\omega_0(\alpha_3\lambda_2(t) - \beta_3\lambda_1(t)) + P_0 + P_3 \sin\omega_0 t + P_4 \cos\omega_0 t] = 0. \tag{25}$$

Здесь с учетом (23) введены обозначения

$$\begin{aligned}
&p_0 = \beta_3\mu_0 - \alpha_3\varepsilon_0, \qquad p_3 = \beta_3\mu_3 - \alpha_3\varepsilon_3 - \sigma_4, \qquad p_4 = \beta_3\mu_4 - \alpha_3\varepsilon_4 + \sigma_3,\\
&P_0 = \gamma_3(\alpha_3\mu_0 + \beta_3\varepsilon_0), \qquad P_3 = \gamma_3(\alpha_3\mu_3 + \beta_3\varepsilon_3) - p_4, \qquad P_4 = \gamma_3(\alpha_3\mu_4 + \beta_3\varepsilon_4) + p_3.
\end{aligned} \tag{26}$$

Исследование цепочки производных (22), (24), (25) будем проводить в следующих случаях:

$$1)\ \alpha_3 = \beta_3 = 0, \quad \gamma_3 = \pm 1; \quad 2)\ \gamma_3 = 0, \quad \alpha_3^2 + \beta_3^2 = 1; \quad 3)\ \gamma_3 \neq 0, \quad \alpha_3^2 + \beta_3^2 \neq 0.$$

В случае 1 векторы $\overline{\alpha}$ и $\overline{\beta}$ ортогональны вектору $\overline{a}$ и, следовательно, гиростатический момент расположен в плоскости, перпендикулярной оси вращения. На основании обозначений (23) из уравнения (22) получим

$$s_1 = s_2 = 0. \tag{27}$$

Все уравнения (22), (24) и (25) становятся тогда тождествами. Это означает, что любое решение уравнений (20), (21), имеющее при указанных условиях вид

$$\begin{aligned} \lambda_1(t) &= -\omega_0(\alpha_1 A_{23} + \alpha_2 A_{13}) + (C_1 - s_3 a_0' \alpha_1 t)\cos\omega_0 t + (C_2 + s_3 a_0' \alpha_2 t)\sin\omega_0 t, \\ \lambda_2(t) &= -\omega_0(\beta_1 A_{23} + \beta_2 A_{13}) + (\gamma_3 C_1 - s_3 a_0' \beta_1 t)\cos\omega_0 t + (-\gamma_3 C_1 + s_3 a_0' \beta_2 t)\sin\omega_0 t, \end{aligned} \tag{28}$$

обеспечивает режим равномерных вращений. Условие (27) означает, что центр тяжести гиростата лежит на оси вращения. Поскольку в реальных конструкциях значения $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$ из (28) ограничены, то необходимо положить

$$s_3 = 0. \tag{29}$$

Механический смысл условий (27) и (29) заключается в том, что центр тяжести находится в точке закрепления гиростата.

Когда имеет место случай 2, векторы $\overline{a}$, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ лежат в одной плоскости. Уравнение (24) при $\gamma_3 = 0$ не зависит от λ_1, λ_2, а следовательно, должно быть тождеством по t. Это возможно лишь при выполнении (29) и еще одного дополнительного условия

$$\gamma_2(A_{23}\omega_0^2 + a_0 s_2) + \gamma_1(A_{13}\omega_0^2 + a_0 s_1) = 0. \tag{30}$$

Нетрудно убедиться в том, что при выполнении (30) свободные члены μ_0, ε_0 в правых частях уравнений (20), (21) становятся равными нулю. Интегрирование этих уравнений с учетом ИС (22) приводит к следующему решению:

$$\begin{aligned} \lambda_1(t) &= \omega_0^{-1}\{\alpha_3[a_0'(s_1 \sin\omega_0 t + s_2\cos\omega_0 t) + C] + \alpha_1 B_2 + \alpha_2 B_1\}, \\ \lambda_2(t) &= \omega_0^{-1}\{\beta_3[a_0'(s_1 \sin\omega_0 t + s_2\cos\omega_0 t) + C] + \beta_1 B_2 + \beta_2 B_1\}, \end{aligned} \tag{31}$$

где C — произвольная постоянная.

Рассмотрим общий случай, т.е. случай 3. Линейно комбинируя уравнения (22) и (25), получим соотношение, которое не зависит от λ_1 и λ_2. Чтобы это соотношение было тождеством по t, необходимо потребовать выполнение условия (29). В этом случае функция $\ddot{f}$ станет зависимой от f, а система функций $\{f, \dot{f}\}$ — независимой. Инвариантное многообразие тогда задается уравнениями (22) и (24) и содержит единственное решение:

$$\begin{aligned} \lambda_1(t) &= \Delta^{-1}[(\alpha_3 p_0 + \gamma_3\beta_3\sigma_0) + (\alpha_3 p_3 + \gamma_3\beta_3\sigma_3)\sin\omega_0 t + (\alpha_3 p_4 + \gamma_3\beta_3\sigma_4)\cos\omega_0 t], \\ \lambda_2(t) &= \Delta^{-1}[(\beta_3 p_0 - \gamma_3\alpha_3\sigma_0) + (\beta_3 p_3 - \gamma_3\alpha_3\sigma_3)\sin\omega_0 t + (\beta_3 p_4 - \gamma_3\alpha_3\sigma_4)\cos\omega_0 t], \end{aligned} \tag{32}$$

где $\Delta = \omega_0\gamma_3(\alpha_3^2 + \beta_3^2)$. Функции (32) определяют гиростатический момент вида (18), который обеспечивает режим равномерного вращения гиростата. Согласно (29) такое решение имеет место, если барицентрическая ось ортогональна оси равномерного вращения.

Таким образом, установлены необходимые условия существования у системы неавтономных дифференциальных уравнений инвариантного соотношения. Доказана теорема, которая является обобщением теоремы Харламова, полученной им для случая автономных дифференциальных уравнений. Найденные результаты применены при исследовании равномерных движений тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом.

1. *Пуанкаре А.* Избранные труды. Т. 1. Новые методы небесной механики. – Москва: Наука, 1971. – 771 с.
2. *Леви-Чивита Т., Амальди У.* Курс теоретической механики. В 2-х т. Т. 2, ч. 2. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1951. – 555 с.
3. *Харламов П. В.* Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 6. – С. 15–24.
4. *Гашененко И. Н., Горр Г. В., Ковалев А. М.* Классические задачи динамики твердого тела. – Киев: Наук. думка, 2012. – 401 с.
5. *Горр Г. В., Кудряшова Л. В., Степанова Л. А.* Классические задачи динамики твердого тела. – Киев: Наук. думка, 1978. – 296 с.
6. *Горр Г. В., Мазнев А. В.* Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. – Донецк: ДонНУ, 2010. – 364 с.
7. *Ковалев А. М.* Вложение инвариантных многообразий в семейство интегральных многообразий и анализ решения Гесса // Механика твердого тела. – 2002. – Вып. 32. – С. 16–31.
8. *Ковалев А. М.* Нелинейные задачи управления и наблюдения в теории динамических систем. – Киев: Наук. думка, 1980. – 174 с.
9. *Ковалев А. М.* Построение функции Ляпунова со знакоопределенной производной для систем, удовлетворяющих теореме Барбашина–Красовского // Прикл. математика и механика. – 2008. – **72**, вып. 2. – С. 266–272.
10. *Ковалев А. М., Суйков А. С.* Функции Ляпунова для систем, удовлетворяющих условиям теоремы Барбашина–Красовского // Докл. НАН Украины. – 2008. – № 12. – С. 22–27.
11. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Москва: Наука, 1970. – 331 с.

Институт прикладной математики
и механики НАН Украины, Донецк

Поступило в редакцию 15.07.2013

Академік НАН України **О. М. Ковальов, Г. В. Горр, В. М. Неспірний**

Інваріантні співвідношення неавтономних систем диференціальних рівнянь

Узагальнено метод інваріантних співвідношень Пуанкаре, Леві-Чивіти, Харламова на системи диференціальних рівнянь з правими частинами, що залежать від часу. Як приклад розглянуто рівняння руху неавтономного важкого гіростата, отримано умови існування рівномірних обертань і побудовано інваріантні многовиди.

Academician of the NAS of Ukraine **A. M. Kovalev, G. V. Gorr, V. N. Nespirnyy**

Invariant relations for nonautonomous systems of differential equations

The method of invariant relations developed by Poincaré, Levi-Civita, and Kharlamov is generalized for differential equations with right-hand sides depending on the time. As an example, the motion equations of a nonautonomous heavy gyrostat are considered, conditions for the existence of uniform rotational motions are obtained, and invariant manifolds are constructed.