УДК 517.51

В. В. Нестеренко

Характеризація властивості Гана

(Представлено членом-кореспондентом НАН України В. В. Шарком)

Доведено нове узагальнення теореми Калбрі–Троалліка і для берівського простору X, метризовного компакта Y та метричного простору Z знайдено необхідні і достатні умови на відображення $f\colon X \times Y \to Z$, щоб для нього множина точок x з X таких, що f сукупно неперервне в кожній точці множини $\{x\} \times Y$, була залишковою в X.

1. Дослідження задачі про зв'язки між нарізною та сукупною неперервністю, розпочате в класичних працях Р. Бера та В. Осгуда, знайшло своє продовження в працях багатьох математиків XX ст. Одним із варіантів цієї задачі є питання про наявність у відображенні $f\colon X \times Y \to Z$ властивості Гана, тобто існування залишкової множини $A \subseteq X$ такої, що $A \times Y \subseteq C(f)$, де $C(f)$ — множина точок неперервності відображення f. Починаючи з умови нарізної неперервності відображень $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, знайдено велику кількість достатніх умов існування у відображення $f\colon X \times Y \to Z$ властивості Гана. Ці умови стосуються як самого відображення f, так і просторів X, Y та Z. Питання про необхідні і достатні умови існування у відображення властивості Гана досі не розглядалися.

Відправним пунктом даного дослідження є теорема Калбрі–Троалліка з [1], згідно з якою для довільних топологічних просторів X і Y, метризовного простору Z, нарізно неперервного відображення $f\colon X \times Y \to Z$ і множини B зліченного типу в Y множина $C_B(f) = \{x \in X\colon \{x\} \times B \subseteq C(f)\}$ є залишковою в X. Як негайний наслідок цього, в [1] отримано такі результати: якщо X — топологічний простір, простір Y задовольняє першу (другу) аксіому зліченності, а Z — метричний простір, то для кожного $y \in Y$ множина $C_y(f) = C_{\{y\}}(f)$ залишкова (множина $C_Y(f)$ залишкова) в X. Ці наслідки були перенесені в [2] на KC-функції, а в [3] — на K_hC-функції, але аналогу загальної теореми Калбрі–Троалліка для множин зліченного типу довгий час не було знайдено ні для KC-функцій, ні, тим більше, для K_hC-функцій. Лише в [4] теорему Калбрі–Троалліка було узагальнено на функції з ширшого класу $\mathcal{N}$.

А. Бузіад і Ж. Троаллік в [5] отримали інше узагальнення теореми Калбрі–Троалліка: для довільних топологічних просторів X і Y, метричного простору Z, зліченної сім'ї $\mathcal{B}$ непорожніх множин в Y, відображення $f\colon X \times Y \to Z$ такого, що для кожної множини $V \in \mathcal{B}$ многозначне відображення $F_V\colon X \ni x \to f_x(V) \in 2^Z$ квазінеперервне знизу, існує залишкова в X множина A така, що коли відображення f^a неперервне в точці $b \in Y$ і деяка база околів точки b міститься в $\mathcal{B}$, то відображення f неперервне за сукупністю змінних в точці (a, b). Зауважимо, що квазінеперервність знизу відображення $F_V\colon X \ni x \mapsto f_x(V) \in 2^Z$ для кожної відкритої непорожньої множини $V \in Y$ рівносильна слабкій горизонтальній квазінеперервності [6] відображення $f\colon X \times Y \to Z$.

Результати з [4, 5] було узагальнено в [7] і одержано такий результат: якщо X і Y — топологічні простори, Z — метричний простір, $\mathcal{V}$ — не більш ніж зліченна система множин в Y, $\mathcal{V}_y = \{V \in \mathcal{V}\colon V$ — окіл точки y в $Y\}$, $B(\mathcal{V}) = \{y \in Y\colon \mathcal{V}_y$ — база околів точки y в $Y\}$,

$f\colon X\times Y\to Z$ — таке відображення, що для кожної множини $V\in\mathcal{V}$, для якої $V\bigcap B(\mathcal{V})\neq$ $\neq\varnothing$, відображення $F_V\colon X\ni x\mapsto F_V(x)=f^x(V)\subseteq Z$ псевдоквазінеперервне знизу та покриттєво категорно клікове знизу, то множина $R=\{x\in X\colon \{x\}\times(C(f^x)\bigcap B(\mathcal{V}))\subseteq C(f)\}$ є залишковою в X.

Усі перелічені результати дають лише достатні умови існування множини $C(f)$ певного типу. В цій роботі ми узагальнимо результат з [7], а також одержимо необхідні і достатні умови того, що відображення $f\colon X\times Y\to Z$ має властивість Гана (теорема 3). Попередній варіант теореми 3 був анонсований у [8].

2. Нехай X і Z — топологічні простори. Для множини $A\subseteq X$ її образ при многозначному відображенні F — це множина

$$F(A)=\{z\in Z\colon (\exists x\in A)(z\in F(x))\}=\bigcup_{x\in A}F(x).$$

Многозначне відображення $F\colon X\to Z$ називається *псевдоквазінеперервним знизу* [7], якщо для кожної непорожньої відкритої множини U в X і довільної підмножини $A\subseteq X$ такої, що $U\subseteq\overline{A}$, існує відкрита непорожня множина G в X така, що $G\subseteq U$ і $F(G)\subseteq\overline{F(A)}$. Многозначне відображення $F\colon X\to Z$ називається *покриттєво категорно кліковим знизу* [7], якщо для кожного відкритого покриття $\mathcal{W}$ простору Z і довільної множини E другої категорії в X існують десь щільна в X множина A і множина $W\in\mathcal{W}$ такі, що $A\subseteq E$ і $F(x)\bigcap W\neq\varnothing$ для всіх $x\in A$.

Нехай X і Y — топологічні простори, а Z — метричний простір з метрикою d. Для непорожньої множини $E\subseteq Z$ через $\operatorname{diam}(E)=\sup\limits_{u,v\in E}d(u,v)$ позначимо її діаметр, а для функції $f\colon X\to Z$ позначимо через $\omega_f(A)=\operatorname{diam}(f(A))$ коливання функції f на множині A. Через $B_r(z_0)=\{z\in Z\colon d(z,z_0)<r\}$ позначимо відкриту кулю з центром в точці z_0 і радіуса r.

Нехай $F\colon X\to Z$ — многозначне відображення. Ми кажемо, що многозначне відображення $F\colon X\to Z$ *задовольняє умову* (A), якщо для довільних чисел $0<\alpha<\beta$, довільної відкритої непорожньої множини U в X і довільної множини $E\subseteq X$, щільної в U, для яких $\operatorname{diam}(F(E))<\alpha$, існує відкрита непорожня множина G в X така, що $G\subseteq U$ і $\operatorname{diam}(F(G))<\beta$. Многозначне відображення $F\colon X\to Z$ називається *категорно кліковим знизу* [7], якщо для кожного $\varepsilon>0$ і довільної множини E другої категорії в X існують десь щільна в X множина A і відображення $g\colon A\to Z$ такі, що $A\subseteq E$, $g(x)\in F(x)$ для кожного $x\in A$ і $\operatorname{diam}(g(A))<\varepsilon$.

Спершу зазначимо, що коли Z — сепарабельний метричний простір, то довільне многозначне відображення $F\colon X\to Z$ є категорно кліковим знизу.

Твердження 1. *Нехай X — топологічний простір, Z — метричний простір з метрикою d і $F\colon X\to Z$ — многозначне відображення. Тоді:*

1) якщо F псевдоквазінеперервне знизу, то F задовольняє умову (A);

2) якщо F покриттєво категорно клікове знизу, то F категорно клікове знизу.

Доведення. Спочатку перевіримо *1*. Візьмемо довільні числа $0<\alpha<\beta$, відкриту непорожню множину U в X і щільну в U множину $E\subseteq X$, для яких $\operatorname{diam}(F(E))<\alpha$. Оскільки відображення F псевдоквазінеперервне знизу, то існує відкрита непорожня множина G в X така, що $G\subseteq U$ і $F(G)\subseteq\overline{F(E)}$. Тоді

$$\operatorname{diam}(F(G))\leqslant\operatorname{diam}(\overline{F(E)})=\operatorname{diam}(F(E))<\alpha<\beta.$$

Тепер перевіримо *2*. Візьмемо довільне $\varepsilon>0$ і довільну множину E другої категорії в X. Розглянемо відкрите покриття $\mathcal{W}=\{B_{\varepsilon/3}(z)\colon z\in Z\}$ простору Z. З покриттєвої категорної кліковості знизу відображення F випливає, що існують десь щільна в X множина A і множина $W \in \mathcal{W}$ такі, що $A \subseteq E$ і $F(x) \bigcap W \neq \varnothing$ для всіх $x \in A$. Оскільки $W \in \mathcal{W}$, то існує точка $z_0 \in Z$ така, що $W = B_{\frac{\varepsilon}{3}}(z_0)$. Для кожної точки $x \in A$ виберемо точку $z_x \in F(x) \bigcap W$. Тоді для відображення $g\colon A \to Z$, $g(x) = z_x$ маємо, що $g(x) \in F(x)$ для кожного $x \in A$ і $g(A) \subseteq W$. Тому $\mathrm{diam}(g(A)) \leqslant 2\varepsilon/3 < \varepsilon$.

Приклад 1. Нехай $\mathbb{Q} = \{r_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ — множина раціональних точок. Розглянемо функцію $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що визначена формулою

$$F(x) = \begin{cases} \left\{\dfrac{1}{n}\right\}, & x = r_n, \\ \{0\}, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Функція F задовольняє умову (A), але не є псевдоквазінеперервною знизу.

3. Для доведення основного результату нам буде потрібна така лема.

Лема 1. *Нехай X — топологічний простір, Z — метричний простір з метрикою d, $\varepsilon > 0$, многозначне відображення $F\colon X \to Z$ задовольняє умову (A) і є категорно кліковим знизу, E — множина другої категорії в X і $E \subseteq \{x \in X\colon \mathrm{diam}(F(x)) < \varepsilon\}$. Тоді існує відкрита непорожня множина G в X така, що $G \subseteq \overline{E}$ і $\mathrm{diam}(F(G)) < 3\varepsilon$.*

Доведення. З категорної кліковості знизу відображення F випливає, що існують десь щільна множина E_1 в X і відображення $g\colon E_1 \to Z$ такі, що $E_1 \subseteq E$, $g(x) \in F(x)$ для кожного $x \in E_1$ і $\mathrm{diam}(g(E_1)) < \varepsilon/2$. Покажемо, що $\mathrm{diam}(F(E_1)) < 8\varepsilon/3$.

Візьмемо точки $z_1, z_2 \in F(E_1)$. Тоді існують точки $x_1, x_2 \in E_1$ такі, що $z_i \in F(x_i)$ для $i = 1, 2$. В такому разі

$$d(z_1, z_2) \leqslant d(z_1, g(x_1)) + d(g(x_1), g(x_2)) + d(g(x_2), x_2) < \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon = \frac{5\varepsilon}{2}.$$

Отже, $\mathrm{diam}(F(E_1)) \leqslant 5\varepsilon/2 < 8\varepsilon/3$.

Покладемо $U = \mathrm{int}\, \overline{E_1}$, $\alpha = 8\varepsilon/3$ і $\beta = 3\varepsilon$. Згідно з умовою (A) існує відкрита непорожня множина G в X така, що $G \subseteq \overline{E_1} \subseteq \overline{E}$ і $\mathrm{diam}(F(G)) < 3\varepsilon$.

Для відображення f символом $D(f)$ ми позначимо його множину точок розриву, тобто доповнення до множини $C(f)$ його точок неперервності. Нехай $\mathcal{V}$ — деяка система множин у просторі Y. Для точки $y \in Y$ покладемо

$$\mathcal{V}(y) = \{V \in \mathcal{V}\colon V \text{ — окіл точки } y \text{ в } Y\}$$

і

$$B(\mathcal{V}) = \{y \in Y\colon \mathcal{V}(y) \text{ — база околів точки } y \text{ в } Y\}.$$

Для відображення $f\colon X \times Y \to Z$ і непорожньої множини V в Y розглядатимемо многозначне відображення $F_V\colon X \ni x \mapsto F_V(x) = f^x(V) \subseteq Z$.

Теорема 1. *Нехай X і Y — топологічні простори, Z — метричний простір, $\mathcal{V} = \{V_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ — не більш ніж зліченна система множин в Y, $f\colon X \times Y \to Z$ — така функція, що для кожної множини $V \in \mathcal{V}$, для якої $V \bigcap B(\mathcal{V}) \neq \varnothing$, відображення F_V задовольняє умову (A) і є категорно кліковим знизу. Тоді множина*

$$R = \{x \in X\colon \{x\} \times (C(f^x) \bigcap B(\mathcal{V})) \subseteq C(f)\}$$

є залишковою в X.

Доведення. Припустимо, що доповнення

$$E_0 = X \setminus R = \{x \in X \colon \exists y_x \in C(f^x) \bigcap B(\mathcal{V}) | p_x = (x, y_x) \in D(f)\}$$

є множиною другої категорії в X. Для номерів m і n розглянемо множини

$$A_{m,n} = \left\{ x \in E_0 \colon \omega_f(p_x) > \frac{1}{m},\ V_n \in \mathcal{V}(y_x),\ \omega_{f^x}(V_n) < \frac{1}{3m} \right\}.$$

Якщо $x \in E_0$, то $p_x = (x, y_x) \in D(f)$ і $y_x \in C(f^x) \bigcap B(\mathcal{V})$, тому $\omega_f(p_x) > 0$, $\omega_{f^x}(y_x) = 0$ і $y_x \in B(\mathcal{V})$, звідки негайно випливає, що існують такі номери m і n, що $\omega_f(p_x) > 1/m$, $\omega_{f^x}(V_n) < 1/(3m)$ і $V_n \in \mathcal{V}(y_x)$. Це показує, що $\bigcup\limits_{m,n=1}^{\infty} A_{m,n} = E_0$. Оскільки E_0 — це множина другої категорії, то існують номери m і n такі, що множина $E = A_{m,n}$ теж є множиною другої категорії.

Зауважимо, що для множини $V = V_n \in \mathcal{V}$ перетин $V \bigcap B(\mathcal{V}) \neq \varnothing$, бо $A_{m,n} \neq \varnothing$, адже $A_{m,n}$ є множиною другої категорії, а тому існує точка $a \in A_{m,n}$ і для неї $V \in \mathcal{V}(y_a)$, причому $y_a \in B(\mathcal{V})$ за побудовою, отже, $y_a \in V \bigcap B(\mathcal{V})$. Тому за умовою многозначне відображення $F_V \colon X \to Z$ задовольняє умову (A) і є категорно кліковим знизу.

Для відображення F_V виконуються всі умови леми 1, згідно з якою існує відкрита непорожня множина G в X така, що $G \subseteq \overline{E}$ і $\operatorname{diam}(F_V(G)) < 1/m$. Тоді

$$\omega_f(G \times V) = \operatorname{diam} f(G \times V) = \operatorname{diam} F_V(G) < \frac{1}{m}.$$

Оскільки $G \subseteq \overline{E}$ і множина G відкрита, то $G \subseteq \overline{G \bigcap E}$. Але $G \neq \varnothing$, отже, і $G \bigcap E \neq$ $\neq \varnothing$. Візьмемо якусь точку $x_0 \in G \bigcap E$. Ясно, що відкрита множина $G \times V$ буде околом точки $p_{x_0} = (x_0, y_{x_0})$ в добутку $X \times Y$, бо $x_0 \in G$, $y_{x_0} \in V$ і множини G та V відкриті у відповідних просторах. Тому $\omega_f(p_{x_0}) \leqslant \omega_f(G \times V) \leqslant 1/m$. З іншого боку, $x_0 \in E \subseteq$ $\subseteq E = A_{m,n}$. Тому $\omega_f(p_{x_0}) > 1/m$. Отримана суперечність доводить, що доповнення $X \setminus R$ насправді є множиною першої категорії, а R є залишковою множиною в X.

Твердження 1 та приклад 1 показують, що теорема 1 сильніша за відповідну теорему з [7].

Як і в [1], підмножину B топологічного простору Y ми називаємо *множиною зліченного типу*, якщо існує така не більш ніж зліченна система $\mathcal{V}_B = \{V_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ відкритих множин V_n в Y, що для кожної точки $y \in B$ система $\mathcal{V}_B(y) = \{V_n \colon y \in V_n\}$ є базою околів точки y в просторі Y. Така система $\mathcal{V}_B$ називається *зліченною базою для* B. Увесь простір Y є множиною зліченного типу тоді і тільки тоді, коли він має не більш ніж зліченну базу, тобто задовольняє другу аксіому зліченності, а виконання першої аксіоми зліченності в Y означає, що всі одноточкові множини $\{y\}$ в Y є множинами зліченного типу.

Як наслідок з теореми 1 одержуємо такий результат.

Наслідок 1. *Нехай X і Y — топологічні простори, Z — метричний простір, B — множина зліченного типу в Y, $f \colon X \times Y \to Z$ — така функція, що для кожної множини $V \in \mathcal{V}_B$, для якої $V \bigcap B \neq \varnothing$, відображення F_V задовольняє умову (A) та є категорно кліковим знизу і множина $M = \{x \in X \colon B \subseteq C(f^x)\}$ залишкова в X. Тоді існує залишкова в X множина A така, що $A \times B \subseteq C(f)$.*

Доведення. Для системи $\mathcal{V}_B$ множина $B(\mathcal{V}_B) = B$. Тоді з теореми 1 випливає, що множина

$$R = \{x \in X \colon \{x\} \times (C(f^x) \bigcap B(\mathcal{V})) \subseteq C(f)\}$$

є залишковою в X. Зауважимо, що $C(f^x)\bigcap B(\mathcal{V}_B) = B$ для $x \in M$. Множина $A = R\bigcap M$ є залишковою в X і $A \times B \subseteq C(f)$.

4. Кажуть [2], що функція $f\colon X\times Y \to Z$ *має властивість Гана*, якщо існує залишкова в X множина A така, що функція f неперервна за сукупністю змінних у кожній точці множини $A \times Y$.

Наслідок 2. *Нехай X — топологічний простір, простір Y задовольняє другу аксіому зліченності, $\mathcal{V}$ — база простору Y, Z — метричний простір, функція $f\colon X \times Y \to Z$ така, що для кожної множини $V \in \mathcal{V}$ відображення F_V задовольняє умову (A) та є категорно кліковим знизу і множина $M = \{x \in X\colon B \subseteq C(f^x)\}$ залишкова в X. Тоді f має властивість Гана.*

Доведення. Доведення випливає з наслідку 1 з урахуванням того, що $B = Y$.

Теорема 2. *Нехай X — берівський простір, Y — компактний простір, Z — метричний простір з метрикою d, $f\colon X \times Y \to Z$ — функція, яка має властивість Гана. Тоді для довільної непорожньої множини N в Y многозначне відображення F_N задовольняє умову (A) та є категорно кліковим знизу і множина $M = \{x \in X\colon C(f^x) = Y\}$ залишкова в X.*

Доведення. Оскільки функція f задовольняє властивість Гана, то існує залишкова в X множина A така, що функція f неперервна за сукупністю змінних у кожній точці множини $A \times Y$. Тому для кожної точки $x \in A$ функція f^x неперервна в кожній точці $y \in Y$. Отже, $M \supseteq A$ і тому множина M є залишковою в X.

Візьмемо довільну непорожню множину N в Y і розглянемо многозначне відображення F_N. Покажемо, що відображення F_N категорно клікове. Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$, довільну множину E другої категорії в X. Оскільки множина E другої категорії, то вона десь щільна в X. Нехай E щільна в деякій відкритій непорожній множині U в X, тобто $\overline{E} \supseteq U$. В берівському просторі кожна залишкова множина є всюди щільною, тому множина A всюди щільна в X. Візьмемо довільні точки $x \in U\bigcap A$ і $y \in N$. Оскільки функція f неперервна в точці (x, y), то існують відкриті непорожні множини G в X і H в Y такі, що $x \in G \subseteq U$, $y \in H$ і $\omega_f(G \times H) < \varepsilon$. Покладемо $E_1 = E\bigcap G$. Оскільки множина E щільна в U і $G \subseteq U$, то множина E_1 щільна в G. Розглянемо відображення $g\colon E_1 \to Z$, для якого $g(u) = f(u, y)$ при $u \in E_1$. Тоді

$$\mathrm{diam}(g(E_1)) = \mathrm{diam}(f(E_1 \times \{y\})) = \omega_f(E_1 \times \{y\}) \leqslant \omega_f(G \times H) < \varepsilon.$$

Отже, відображення F_E категорно клікове знизу.

Тепер покажемо, що відображення F_N задовольняє умову (A). Візьмемо довільні числа $0 < \alpha < \beta$, довільну відкриту непорожню множину U в X, довільну множину $E \subseteq X$, щільну в U, для якої $\mathrm{diam}(F_N(E)) < \alpha$. Оскільки множина A всюди щільна в X, то існує точка $x_0 \in U\bigcap A$. Для довільної точки $y \in Y$ функція f неперервна в точці (x_0, y). Тому для кожної точки $y \in Y$ існують окіл $U(y)$ точки x_0 в X і відкритий окіл $V(y)$ точки y в Y такі, що $\omega_f(U(y) \times V(y)) < (\beta - \alpha)/4$. Система множин $\{V(y)\colon y \in Y\}$ є відкритим покриттям компактного простору Y. Отже, існують точки $y_1, y_2, \ldots, y_n$ такі, що система множин $\{V_k = V(y_k)\colon k = 1, \ldots, n\}$ є покриттям простору Y. Покладемо $G = U\bigcap\Big(\bigcap\limits_{k=1}^{n} U(y_k)\Big)$. Ясно, що $G \neq \varnothing$, адже $x_0 \in G$. Крім того, $G \subseteq \overline{E}$, бо $G \subseteq U \subseteq \overline{E}$. Покажемо, що $\omega_f(G \times N) < \beta$. Візьмемо точки (a, b), $(u, v) \in G \times N$. Оскільки $G \subseteq \overline{E}$, то існує точка $x_1 \in E\bigcap G$. Далі існують номери m та l такі, що $b \in V_m$ та $v \in V_l$. Тоді $\{b, v\} \subseteq Y = \bigcup\limits_{k=1}^{n} V_k$, тому

$$d(f(a,b), f(u,v)) \leqslant d(f(a,b), f(x_1,b)) + d(f(x_1,b), f(x_1,v)) + d(f(x_1,v), f(u,v)) <$$
$$< \frac{\beta-\alpha}{4} + \alpha + \frac{\beta-\alpha}{4} = \alpha + \frac{\beta-\alpha}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Отже, $\omega_f(G\times N) \leqslant (\alpha+\beta)/2 < \beta$, тобто $\mathrm{diam}(F_N(G)) < \beta$, це і означає, що відображення F_N задовольняє властивість (A).

З теореми 2 і наслідку 2 одержуємо такий результат.

Теорема 3. *Нехай X — берівський простір, Y — компактний простір, який задовольняє другу аксіому зліченності, $\mathcal{V}$ — база простору Y, Z — метричний простір. Тоді для того щоб функція $f\colon X\times Y\to Z$ задовольняла властивість Гана, необхідно і достатньо, щоб для кожної множини $V\in\mathcal{V}$ відображення F_V задовольняло умову (A) та було категорно кліковим знизу і множина $\{x\in X\colon C(f^x)\subseteq B\}$ була залишковою в X.*

1. *Calbrix J., Troallic J. P.* Applications séparément continues // C. r. Acad. Sci. Paris. Sér. A. – 1979. – **288**. – P. 647–648.
2. *Маслюченко В. К.* Простори Гана і задача Діні // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1998. – **41**, № 4. – С. 39–45.
3. *Маслюченко В. К., Нестеренко В. В.* Сукупна неперервність та квазінеперервність горизонтально квазінеперервних функцій // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 12. – С. 1711–1714.
4. *Маслюченко В. К., Нестеренко В. В.* Точки сукупної неперервності та великі коливання // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 6. – С. 791–800.
5. *Bouziad A., Troallic J. P.* Lower quasicontinuity, joint continuity and related concepts // Topol. Appl. – 2010. – **157**, No 18. – P. 2889–2894.
6. *Нестеренко В. В.* Слабка горизонтальна квазінеперервність // Мат. вісн. НТШ. – 2008. – **5**. – С. 177–182.
7. *Маслюченко В. К., Нестеренко В. В.* Про нове узагальнення теореми Калбрі–Троалліка // Всеукр. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу", 25 лютого – 3 березня, 2013: Тези доп. – Івано-Франківськ, 2013. – С. 65–66.
8. *Нестеренко В. В.* Характеризація властивості Гана // Всеукр. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу", 20–26 лютого, 2012: Тези доп. – Ворохта, 2012. – С. 45–46.

Чернівецький національний університет
ім. Юрія Федьковича

Надійшло до редакції 13.08.2013

В. В. Нестеренко

Характеризация свойства Гана

Доказано новое обобщение теоремы Калбри–Троаллика и для бэровского пространства X, метризуемого компакта Y и метрического пространства Z найдены необходимые и достаточные условия на отображение $f\colon X\times Y\to Z$, чтобы для него множество точек $x\in X$ таких, что f совокупно непрерывное в каждой точке множества $\{x\}\times Y$, было остаточным в X.

V. V. Nesterenko

A characterization of the Hahn property

We prove a new generalization of the Calbrix–Troallic theorem. For a Baire space X, a metrizable compact Y, and a metric space Z, the necessary and sufficient conditions for a mapping $f\colon X\times\times Y\to Z$, for which a set of points x of X such that f is jointly continuous at each point of the set $\{x\}\times Y$ is residual in X, are found.