УДК 517.977.56

М. М. Копець

Лінійно-квадратична задача оптимального керування процесом теплопровідності

(Представлено членом-кореспондентом НАН України А. О. Чикрієм)

Розглядається проблема мінімізації квадратичного функціонала на розв'язках другої крайової задачі для рівняння теплопровідності. Для дослідження сформульованої задачі оптимізації застосовано метод множників Лагранжа. Такий підхід дав можливість отримати необхідні умови оптимальності. На основі цих умов виведено інтегро-диференціальне рівняння Ріккаті з частинними похідними. Розв'язок цього рівняння подано в замкненій формі.

В теорії оптимального керування важливе місце займає лінійно-квадратична задача. Під цим терміном розуміється задача мінімізації квадратичного функціонала на множині розв'язків деякої системи лінійних диференціальних рівнянь, праві частини яких певним чином залежать від одного або декількох параметрів (керувань). Якщо поведінка керованого об'єкта описується системою звичайних диференціальних рівнянь, то мова йде про системи із зосередженими параметрами. У випадку диференціальних рівнянь з частинними похідними маємо систему із розподіленими параметрами. Для систем із зосередженими параметрами лінійно-квадратична задача досліджена досить повно. Основним результатом цього дослідження є матричне диференціальне рівняння Ріккаті [1–3, 5]. Для математичних моделей систем із розподіленими параметрами виникають інтегро-диференціальні рівняння Ріккаті з частинними похідними, які менше досліджені порівняно із звичайними матричними диференціальними рівняннями Ріккаті. В даній роботі для сформульованої задачі оптимізації отримано інтегро-диференціальне рівняння Ріккаті з частинними похідними, розв'язок якого наведено в замкненій формі.

Постановка задачі. Розглядається процес, що описується таким рівнянням теплопровідності:

$$\begin{gathered}\frac{\partial z(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial x^2} + u(t,x),\\ t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \qquad 0 \leqslant x \leqslant l.\end{gathered} \tag{1}$$

Для рівняння (1) задано початкову умову

$$z(t_0, x) = f(x) \tag{2}$$

та крайові умови

$$\frac{\partial z(t,0)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial z(t,l)}{\partial x} = 0, \tag{3}$$

де через $\partial z(t,0)/\partial x$ та $\partial z(t,l)/\partial x$ позначено значення $\partial z(t,x)/\partial x$ при $x = 0$ та $x = l$ відповідно, дійсні числа $t_0 \geqslant 0$, $t_1 > t_0$, $l > 0$ і функція $f(x) \in L_2(0,l)$ задані. Функція

$u(t,x)$ вважається допустимим керуванням, якщо $u(t,x) \in L_2(\Omega)$, де множину Ω задано так: $\Omega = \{(t,x)\colon t \in [t_0,t_1], x \in [0,l]\}$. Для фіксованого допустимого керування $u(t,x)$ розв'язком $z(t,x)$ задачі (1)–(3) вважається узагальнений розв'язок $z(t,x) \in L_2(\Omega)$. Далі розглянемо такий критерій оптимальності:

$$I(u,z) = \frac{1}{2}\int_0^l z^2(t_1,x)\,dx + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l [z^2(t,x) + u^2(t,x)]\,dxdt. \tag{4}$$

Задача оптимального керування процесом, що описується співвідношеннями (1)–(3), полягає в знаходженні такого керування $u(t,x)$, на якому функціонал (4) набуває найменшого значення. Якщо таке керування існує, то воно називається *оптимальним керуванням.*

Необхідні умови оптимальності. Для знаходження розв'язку розглянутої вище задачі застосуємо метод множників Лагранжа [4, c. 31]. Суть методу полягає в тому, що замість функціонала (4) розглядаємо такий функціонал:

$$J(p,u,z) = \frac{1}{2}\int_0^l z^2(t_1,x)dx + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l [z(t,x)^2 + u^2(t,x)]\,dxdt +$$
$$+ \int_{t_0}^{t_1}\int_0^l p(t,x)\left[\frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial x^2} + u(t,x) - \frac{\partial z(t,x)}{\partial t}\right]dxdt, \tag{5}$$

де $p(t,x)$ — невідома функція (множник Лагранжа). Очевидно, що при виконанні співвідношення (1) значення функціоналів (4) і (5) збігаються. В такий спосіб задача на умовний екстремум для функціонала (4) зводиться до задачі на екстремум для функціонала (5) із урахуванням співвідношень (2), (3). Далі знаходимо вираз для приросту $\triangle J$ функціонала (5)

$$\triangle J = J(p+\varepsilon\delta p, u+\varepsilon\delta u, z+\varepsilon\delta z) - J(p,u,z). \tag{6}$$

Після очевидних спрощень (розкриття дужок, інтегрування частинами та зведення подібних членів) співвідношення (6) матиме вигляд

$$\triangle J = \varepsilon\int_0^l [z(t_1,x) - p(t_1,x)]\delta z(t_1,x)\,dx +$$
$$+\varepsilon\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \left[\left[z(t,x) + \frac{\partial^2 p(t,x)}{\partial x^2} + \frac{\partial p(t,x)}{\partial t}\right]\delta z(t,x) + [u(t,x)+p(t,x)]\delta u(t,x)\right]dxdt +$$
$$+\varepsilon\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \delta p(t,x)\left[\frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial x^2} + u(t,x) - \frac{\partial z(t,x)}{\partial t}\right]dxdt +$$
$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\left[\int_0^l [\delta z(t_1,x)]^2 dx + \int_{t_0}^{t_1}\int_0^l [[\delta z(t,x)]^2 + [\delta u(t,x)]^2]\,dxdt\right]. \tag{7}$$

На підставі рівності (7) можна сформулювати таке твердження.

Теорема 1. *Оптимальне керування* $u(t,x)$ *в задачі* (1)–(4) *єдине і визначається із співвідношень*

$$\frac{\partial z(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial x^2} + u(t,x), \tag{8а}$$

$$z(t_0,x) = f(x), \qquad \frac{\partial z(t,0)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial z(t,l)}{\partial x} = 0, \tag{8б}$$

$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial t} = -\frac{\partial^2 p(t,x)}{\partial x^2} - z(t,x), \tag{8в}$$

$$p(t_1,x) = z(t_1,x), \qquad \frac{\partial p(t,0)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial p(t,l)}{\partial x} = 0, \tag{8г}$$

$$u(t,x) + p(t,x) = 0. \tag{8д}$$

Виведення інтегро-диференціального рівняння Ріккаті. Нехай існує залежність $p(t,x) = \int\limits_0^l R(t,x,s)z(t,s)\,ds$ між функціями $p(t,x)$ і $z(t,x)$, які задовольняють систему співвідношень (8а)–(8д). Легко переконатися в тому, що відносно функції $R(t,x,s)$ має місце таке твердження.

Теорема 2. *Функція* $R(t,x,s))$ *є розв'язком інтегро-диференціального рівняння*

$$\frac{\partial R(t,x,s)}{\partial t} + \frac{\partial^2 R(t,x,s)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 R(t,x,s)}{\partial s^2} - \int\limits_0^l R(t,x,\lambda)R(t,\lambda,s)d\lambda + \delta(x-s) = 0, \tag{9}$$

де $\delta(x)$ *— дельта-функція Дірака, та задовольняє такі додаткові умови:*

$$R(t_1,x,s) = \delta(x-s), \tag{10а}$$

$$\frac{\partial R(t,0,s)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial R(t,l,s)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial R(t,x,0)}{\partial s} = 0, \qquad \frac{\partial R(t,x,l)}{\partial s} = 0. \tag{10б}$$

Побудова розв'язку інтегро-диференціального рівняння Ріккаті. Розв'язок $R(t,x,s)$ рівняння (9) шукаємо у вигляді

$$R(t,x,s) = \frac{1}{l}\left[r_0(t) + 2\sum_{n=1}^{\infty} r_n(t)\cos\frac{\pi n x}{l}\cos\frac{\pi n s}{l}\right], \tag{11}$$

де функції $r_n(t)$, $n = 0,1,2,\ldots$, потрібно знайти. Очевидно, що функція (11) задовольняє умови (10б). Безпосередньо із рівності (11) знаходимо

$$\frac{\partial R(t,x,s)}{\partial t} = \frac{1}{l}\left[\frac{dr_0(t)}{dt} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{dr_n(t)}{dt}\cos\frac{\pi n x}{l}\cos\frac{\pi n s}{l}\right], \tag{12}$$

$$\frac{\partial^2 R(t,x,s)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 R(t,x,s)}{\partial s^2} = -\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\pi n}{l}\right]^2 r_n(t)\cos\frac{\pi n x}{l}\cos\frac{\pi n s}{l}, \tag{13}$$

$$\int\limits_0^l R(t,x,\lambda)R(t,\lambda,s)d\lambda = \frac{1}{l}\left[r_0^2(t) + 2\sum_{n=1}^{\infty} r_n^2(t)\cos\frac{\pi n x}{l}\cos\frac{\pi n s}{l}\right]. \qquad (14)$$

Підставляючи вирази (12)–(14) в рівняння (9), отримаємо для знаходження коефіцієнтів $r_n(t) = 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, таку нескінченну систему скалярних рівнянь Ріккаті:

$$\frac{dr_n(t)}{dt} - 2\left[\frac{\pi n}{l}\right]^2 r_n(t) - r_n^2(t) + 1 = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots. \qquad (15)$$

При цьому умова (10а) породжує додаткові умови для системи рівнянь (15)

$$r_n(t_1) = 1, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots. \qquad (16)$$

Підводячи підсумки, приходимо до такого твердження.

Теорема 3. *Функція* $R(t,x,s)$ *має вигляд* (11), *де коефіцієнти* $r_n(t)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, *є розв'язками системи звичайних диференціальних рівнянь* (15) *та задовольняють додаткові умови* (16).

Далі, використовуючи спосіб, аналогічний описаному в [3, с. 320], легко знаходимо формули для $r_n(t)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$,

$$r_n(t) = \frac{\lambda_n \cos h(\lambda_n(t_1 - t)) - (\alpha_n - 1)\sin h(\lambda_n(t_1 - t))}{\lambda_n \cos h(\lambda_n(t_1 - t)) + (\alpha_n + 1)\sin h(\lambda_n(t_1 - t))}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

де $\alpha_n = \left[\frac{\pi n}{l}\right]^2$, $\lambda_n = \sqrt{\left[\frac{\pi n}{l}\right]^4 + 1}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Таким чином, у роботі розглянуто лінійно-квадратичну задачу оптимального керування процесом теплопровідності. За допомогою методу множників Лагранжа отримано необхідні умови оптимальності. Встановлено умови, що забезпечують єдиність оптимального керування. Вперше для такої задачі з використанням дельта-функції Дірака одержано інтегро-диференціальне рівняння Ріккаті. Запропоновано формулу для обчислення розв'язку цього рівняння. Використання отриманої формули дає можливість подати оптимальне керування в явній формі. Тема, розглянута у роботі, безумовно, є досить перспективною для подальших досліджень.

1. *Жуковский В. И., Чикрий А. А.* Линейно-квадратичные дифференциальные игры. – Киев: Наук. думка, 1994. – 320 с.
2. *Bensoussan A., Da Prato G., Delfour M. C., Mitter S. K.* Representation and control of infinite dimensional systems. – Boston; Basel; Berlin: Birkhäuser, 2007. – 575 p.
3. *Naidu D. S.* Optimal control systems. (Electrical engineering textbook series). – Boca Raton: CRC Press, 2003. – 433 p.
4. *Сиразетдинов Т. К.* Оптимизация систем с распределенными параметрами. – Москва: Наука, 1977. – 480 с.
5. *Ройтенберг Я. Н.* Автоматическое управление. – Москва: Наука, 1978. – 551 с.

НТУ України "Київський політехнічний інститут"

Надійшло до редакції 09.07.2013

М. М. Копец

Линейно-квадратичная залача оптимального управления процессом теплопроводности

Рассматривается проблема минимизации квадратичного функционала на решениях второй краевой задачи для уравнения теплопроводности. Для исследования сформулированной задачи оптимизации применен метод множителей Лагранжа. Такой подход дал возможность получить необходимые условия оптимальности. На основе этих условий выведено интегро-дифференциальное уравнение Риккати с частными производными. Решение этого уравнения представлено в замкнутой форме.

M. M. Kopets

A linear-quadratic problem of optimal control over the heat conductivity process

The problem of minimization of a quadratic functional on solutions of the second boundary-value problem for the heat equation is considered. The method of Lagrange multipliers is applied to research the formulated optimization problem. Such approach has given a chance to obtain the necessary conditions of optimality. On the basis of these conditions, the integro-differential Riccati equation with partial derivatives is deduced. The solution of this equation is presented in the closed form.