Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

4 • 2014

МАТЕМАТИКА

УДК 517.956.223

А. В. Аноп

Загальна еліптична крайова задача в розширеній соболєвській шкалі

(Представлено членом-кореспондентом НАН України М. Л. Горбачуком)

Загальну еліптичну крайову задачу, що задана в обмеженій евклідовій області з гладкою межею, досліджено в розширеній соболевській шкалі. Остання складається з усіх гільбертових просторів, інтерполяційних для пар гільбертових просторів Соболева. Доведено, що оператор цієї задачі є обмеженим і нетеровим у відповідних парах просторів Хермандера, які належать розширеній соболевській шкалі. Встановлено апріорні оцінки розв'язків задачі та досліджено їх регулярність у просторах Хермандера. Знайдено нову достатню умову класичності узагальненого розв'язку задачі.

Один із фундаментальних результатів теорії еліптичних диференціальних рівнянь полягає в тому, що еліптичні крайові задачі є нетеровими у відповідних парах просторів Соболєва і породжують ізоморфізми між їх підпросторами [1–4]. Він має важливі застосування до дослідження регулярності розв'язків еліптичних рівнянь, у спектральній теорії диференціальних операторів й інші, причому найбільш змістовні результати отримуються у випадку гільбертових просторів.

Недавно В. А. Михайлець і О. О. Мурач [5, 6] поширили теорію розв'язності еліптичних крайових задач на уточнені соболєвські шкали. Вони складаються з гільбертових просторів Хермандера [3, п. 2.2], для яких показником гладкості служить довільна радіальна функція, правильно змінна на нескінченності за Й. Караматою. Знайдені застосування цієї теорії до задач, де соболєвська шкала є недостатньо тонко градуйованою.

Ці результати отримані на основі методу інтерполяції з функціональним параметром пар гільбертових просторів, застосованого до соболєвської шкали. Тому викликає інтерес клас усіх гільбертових просторів, інтерполяційних відносно пар гільбертових просторів Соболєва. Він конструктивно описаний в [5 (п. 2.4.2), 7, 8] на основі інтерполяційної теореми В. І. Овчинникова [9, п. 11.4] і названий розширеною соболєвською шкалою. Вона утворена просторами Хермандера, для яких показником гладкості служить довільна радіальна функція, RO-змінна на нескінченності за В. Г. Авакумовичем.

Мета цієї роботи — встановити теореми про роз'язність загальної еліптичної крайової задачі і властивості її розв'язків у розширеній соболєвській шкалі. Як застосування, отримані нові достатні умови класичності узагальненого розв'язку цієї задачі.

Відзначимо, що еліптичні рівняння і системи досліджені в розширеній соболєвській шкалі на $\mathbb{R}^n$ і на гладкому замкненому многовиді в роботах [5 (п. 2.4.3), 10, 11].

1. Постановка задачі. Нехай Ω — довільна обмежена область в евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$, де $n \geqslant 2$, а її межа $\Gamma := \partial\Omega$ є нескінченно гладким многовидом без краю розмірності $n-1$. В області Ω розглядається еліптична крайова задача

$$Au(x) \equiv \sum_{|\mu|\leqslant 2q} a_\mu(x) D^\mu u(x) = f(x), \qquad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$B_j u(x) \equiv \sum_{|\mu|\leqslant m_j} b_{j,\mu}(x) D^\mu u(x) = g_j(x), \qquad x \in \Gamma, \qquad j = 1, \ldots, g. \tag{2}$$

Тут A є лінійний диференціальний вираз парного порядку $2q \geqslant 2$, заданий на $\overline{\Omega} := \Omega \bigcup \Gamma$, а усі B_j є граничні лінійні диференціальні вирази порядків $m_j \leqslant 2q-1$, задані на Γ. Усі коефіцієнти диференціальних виразів A і B_j вважаються нескінченно гладкими комплекснозначними функціями: $a_\mu \in C^\infty(\overline{\Omega})$ і $b_{j,\mu} \in C^\infty(\Gamma)$.

Нагадаємо [12, п. 1.2], що крайова задача (1), (2) називається еліптичною в області Ω, якщо диференціальний вираз A є еліптичним на $\overline{\Omega}$ і правильно еліптичним на Γ, а набір $B := (B_1, \ldots, B_q)$ граничних диференціальних виразів задовольняє умову Лопатинського щодо A на Γ.

У роботі досліджується лінійне відображення $u \mapsto (Au, Bu)$ в розширеній соболєвській шкалі.

2. Розширена соболєвська шкала. Вона складається з гільбертових просторів Хермандера H^φ, для яких показником гладкості служить довільний функціональний параметр $\varphi \in \mathrm{RO}$. Наведемо відповідні означення.

Множина RO складається з усіх вимірних за Борелем функцій $\varphi\colon [1,\infty) \to (0,\infty)$, для яких існують числа $a > 1$ и $c \geqslant 1$ такі, що $c^{-1} \leqslant \varphi(\lambda t)/\varphi(t) \leqslant c$ для довільних $t \geqslant 1$ і $\lambda \in [1,a]$ (числа a і c можуть залежати від φ). Такі функції називають RO- (або OR-) змінними на нескінченності. Клас RO введений В. Г. Авакумовичем в 1936 р. і достатньо вивчений (див., наприклад, [13, додаток 1]).

Нам знадобиться така властивість класу RO [13, с. 88]. Для кожної функції $\varphi \in \mathrm{RO}$ існують числа s_0, $s_1 \in \mathbb{R}$, $s_0 \leqslant s_1$, і c_0, $c_1 > 0$ такі, що

$$c_0 \lambda^{s_0} \leqslant \frac{\varphi(\lambda t)}{\varphi(t)} \leqslant c_1 \lambda^{s_1} \qquad \text{для всіх} \qquad t \geqslant 1, \qquad \lambda \geqslant 1. \tag{3}$$

Покладемо

$$\sigma_0(\varphi) := \sup\{s_0 \in \mathbb{R}\colon \text{виконується ліва нерівність в (3)}\},$$

$$\sigma_1(\varphi) := \inf\{s_1 \in \mathbb{R}\colon \text{виконується права нерівність в (3)}\};$$

тут $-\infty < \sigma_0(\varphi) \leqslant \sigma_1(\varphi) < \infty$. Числа $\sigma_0(\varphi)$ і $\sigma_1(\varphi)$ є відповідно нижнім і верхнім індексами Матушевської функції $\varphi \in \mathrm{RO}$.

Нехай $\varphi \in \mathrm{RO}$. За означенням, комплексний лінійний простір $H^{\varphi}(\mathbb{R}^n)$, де $n \in \mathbb{N}$, складається з усіх розподілів $w \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ таких, що їх перетворення Фур'є $\widehat{w}$ локально інтегровне за Лебегом в $\mathbb{R}^n$ і задовольняє умову

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi^2(\langle\xi\rangle)\,|\widehat{w}(\xi)|^2 d\xi < \infty.$$

Тут $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ є лінійний топологічний простір Шварца повільно зростаючих розподілів, заданих в $\mathbb{R}^n$, а $\langle\xi\rangle := (1+|\xi|^2)^{1/2}$ є згладжений модуль вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$. Нам зручно трактувати розподіли як *анти*лінійні функціонали на просторі $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ основних функцій. При цьому всі розподіли і функції вважаємо комплекснозначними.

У просторі $H^{\varphi}(\mathbb{R}^n)$ означений скалярний добуток розподілів w_1, w_2 за формулою

$$(w_1, w_2)_{H^{\varphi}(\mathbb{R}^n)} := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi^2(\langle\xi\rangle)\widehat{w_1}(\xi)\overline{\widehat{w_2}(\xi)}\,d\xi.$$

Він задає на $H^{\varphi}(\mathbb{R}^n)$ структуру гільбертового простору і норму $\|w\|_{H^{\varphi}(\mathbb{R}^n)}$. Цей простір сепарабельний; множина $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ щільна в ньому.

Простір $H^{\varphi}(\mathbb{R}^n)$ є гільбертів ізотропний випадок просторів $\mathcal{B}_{p,k}$, введених і досліджених Л. Хермандером [3, п. 2.2]. А саме, $H^{\varphi}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}_{p,k}$, якщо $p = 2$ і $k(\xi) = \varphi(\langle\xi\rangle)$ при $\xi \in \in \mathbb{R}^n$. Зауважимо, що у гільбертовому випадку $p = 2$ простори Хермандера збігаються з просторами, введеними і дослідженими Л. Р. Волевичем і Б. П. Панеяхом [14, § 2].

Якщо функція φ степенева: $\varphi(t) \equiv t^s$, то $H^{\varphi}(\mathbb{R}^n) =: H^{(s)}(\mathbb{R}^n)$ є (гільбертів) простір Соболєва порядку $s \in \mathbb{R}$. Узагалі,

$$s_0 < \sigma_0(\varphi) \leqslant \sigma_1(\varphi) < s_1 \Rightarrow H^{(s_1)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{\varphi}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{(s_0)}(\mathbb{R}^n), \tag{4}$$

причому обидва вкладення неперервні й щільні.

Згідно з [8], клас функціональних просторів $\{H^{\varphi}(\mathbb{R}^n) : \varphi \in \mathrm{RO}\}$ називаємо розширеною соболєвською шкалою на $\mathbb{R}^n$. Нам потрібні її аналоги для евклідової області Ω і замкненого многовиду Γ. Вони вводяться стандартним чином на основі простору $H^{\varphi}(\mathbb{R}^n)$. Наведемо відповідні означення.

Лінійний простір $H^{\varphi}(\Omega)$ складається зі звужень в область Ω всіх розподілів $w \in H^{\varphi}(\mathbb{R}^n)$. Норма в $H^{\varphi}(\Omega)$ означається за формулою

$$\|u\|_{H^{\varphi}(\Omega)} := \inf\{\|w\|_{H^{\varphi}(\mathbb{R}^n)} \colon w \in H^{\varphi}(\mathbb{R}^n),\ w = u \text{ в } \Omega\},$$

де $u \in H^{\varphi}(\Omega)$. Відносно цієї норми простір $H^{\varphi}(\Omega)$ гільбертів і сепарабельний. Множина $C^{\infty}(\overline{\Omega})$ щільна в ньому.

Означимо тепер лінійний простір $H^{\varphi}(\Gamma)$. Для цього довільним чином виберемо скінченний атлас із C^{∞}-структури на многовиді Γ, утворений локальними картами $\alpha_j : \mathbb{R}^{n-1} \leftrightarrow U_j$, де $j = 1, \ldots, \varkappa$. Тут $\{U_1, \ldots, U_{\varkappa}\}$ є відкрите покриття многовиду Γ. Крім того, виберемо функції $\chi_j \in C^{\infty}(\Gamma)$, де $j = 1, \ldots, \varkappa$, які утворюють розбиття одиниці на Γ, що задовольняє умову $\operatorname{supp}\chi_j \subset U_j$.

Лінійний простір $H^{\varphi}(\Gamma)$ складається з усіх розподілів h на Γ таких, що $(\chi_j h) \circ \alpha_j \in \in H^{\varphi}(\mathbb{R}^{n-1})$ для кожного $j \in \{1, \ldots, \varkappa\}$. Тут $(\chi_j h) \circ \alpha_j$ є представлення розподілу $\chi_j h$

в локальній карті α_j. У просторі $H^{\varphi}(\Gamma)$ означений скалярний добуток розподілів h_1, h_2 за формулою

$$(h_1, h_2)_{H^{\varphi}(\Gamma)} := \sum_{j=1}^{\varkappa} ((\chi_j h_1) \circ \alpha_j, (\chi_j h_2) \circ \alpha_j)_{H^{\varphi}(\mathbb{R}^{n-1})}.$$

Цей простір гільбертів і сепарабельний та з точністю до еквівалентності норм не залежить від зазначеного вибору атласу і розбиття одиниці [5, с. 139]. Множина $C^{\infty}(\Gamma)$ щільна в $H^{\varphi}(\Gamma)$.

Означені вище функціональні простори утворюють розширені соболєвські шкали $\{H^{\varphi}(\Omega)\colon \varphi \in \mathrm{RO}\}$ і $\{H^{\varphi}(\Gamma)\colon \varphi \in \mathrm{RO}\}$ на Ω і Γ відповідно. Вони містять шкали гільбертових просторів Соболєва: якщо $\varphi(t) \equiv t^s$ для деякого $s \in \mathbb{R}$, то $H^{\varphi}(\Omega) =: H^{(s)}(\Omega)$ і $H^{\varphi}(\Gamma) =: H^{(s)}(\Gamma)$ є простори Соболєва порядку s. Властивість (4) залишається вірною, якщо в ній замінити $\mathbb{R}^n$ на Ω або Γ; при цьому вкладення стають компактними.

3. Результати. Сформулюємо результати роботи про властивості еліптичної крайової задачі (1), (2) в розширеній соболєвській шкалі.

Означимо функціональний параметр $\rho(t) := t$ аргументу $t \geqslant 1$. Якщо $\varphi \in \mathrm{RO}$ та $s \in \in \mathbb{R}$, то функція $\varphi\rho^s \in \mathrm{RO}$, а її індекси Матушевської $\sigma_j(\varrho^s\varphi) = s + \sigma_j(\varphi)$ для кожного $j \in \{0, 1\}$. Позначимо через $(\cdot,\cdot)_{\Omega}$ і $(\cdot,\cdot)_{\Gamma}$ скалярні добутки в гільбертових просторах $L_2(\Omega)$ і $L_2(\Gamma)$ функцій, квадратично інтегровних на Ω і Γ відповідно, а також розширення за неперервністю цих скалярних добутків.

У п. 3 припускаємо, що $\varphi \in \mathrm{RO}$ і $\sigma_0(\varphi) > -2q + m + 1/2$, де $m := \max\{m_1, \ldots, m_q\}$.

Теорема 1. *Відображення $u \mapsto (Au, Bu)$, де $u \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$, продовжується єдиним чином (за неперервністю) до обмеженого оператора*

$$(A, B)\colon H^{\varphi\rho^{2q}}(\Omega) \to H^{\varphi}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q} H^{\varphi\rho^{2q-m_j-1/2}}(\Gamma) =: \mathcal{H}^{\varphi}(\Omega, \Gamma). \tag{5}$$

Цей оператор нетерів. Його ядро N лежить в $C^{\infty}(\overline{\Omega})$ і не залежить від φ. Область значень оператора (5) *складається з усіх векторів $F := (f, g_1, \ldots, g_q) \in \mathcal{H}^{\varphi}(\Omega, \Gamma)$ таких, що*

$$(F, W)_{\Omega,\Gamma} := (f, w_0)_{\Omega} + \sum_{j=1}^{q} (g_j, w_j)_{\Gamma} = 0 \tag{6}$$

для кожного вектора $W := (w_0, w_1, \ldots, w_q) \in G$. Тут G — деякий скінченновимірний і не залежний від φ підпростір в $C^{\infty}(\overline{\Omega}) \times (C^{\infty}(\Gamma))^q$. Індекс оператора (5) *дорівнює $\dim N - - \dim G$ і не залежить від φ.*

Нагадаємо, що лінійний обмежений оператор $T\colon X \to Y$, де X, Y — банахові простори, називають нетеровим, якщо його ядро $\ker T$ і коядро $Y/T(X)$ скінченновимірні. Нетерів оператор T має замкнену область значень $T(X)$ (див., наприклад, [4, с. 246]) і скінченний індекс $\operatorname{ind} T := \dim\ker T - \dim(Y/T(X))$.

Якщо $N = \{0\}$ і $W = \{0\}$, то оператор (5) є ізоморфізм простору $H^{\varphi\varrho^{2q}}(\Omega)$ на $\mathcal{H}^{\varphi}(\Omega, \Gamma)$. У загальному випадку ізоморфізм зручно будувати за допомогою таких проекторів.

Зобразимо простори, в яких діє оператор (5) у вигляді прямих сум (замкнених) підпросторів

$$H^{\varphi\rho^{2q}}(\Omega) = N \dotplus \{u \in H^{\varphi\rho^{2q}}(\Omega)\colon (u, w)_{\Omega} = 0 \text{ для всіх } w \in N\}, \tag{7}$$

$$\mathcal{H}^{\varphi}(\Omega,\Gamma)=W\dotplus(A,B)(\mathcal{H}^{\varphi}(\Omega,\Gamma)). \tag{8}$$

Позначимо через P і Q проектори відповідно просторів $H^{\varphi\rho^{2q}}(\Omega)$ і $\mathcal{H}^{\varphi}(\Omega,\Gamma)$ на другий доданок в сумах (7) і (8) паралельно першому доданку.

Теорема 2. *Звуження відображення* (5) *на підпростір* $P(H^{\varphi\rho^{2q}}(\Omega))$ *є ізоморфізм*

$$(A,B)\colon P(H^{\varphi\rho^{2q}}(\Omega))\leftrightarrow Q(H^{\varphi}(\Omega,\Gamma)). \tag{9}$$

Розв'язок еліптичної крайової задачі (1), (2) задовольняє таку апріорну оцінку.

Теорема 3. *Існує число* $c=c(\varphi)>0$ *таке, що*

$$\|u\|_{H^{\varphi\rho^{2q}}(\Omega)}\leqslant c(\|(A,B)u\|_{H^{\varphi}(\Omega,\Gamma)}+\|u\|_{L_2(\Omega)}) \tag{10}$$

для довільної функції $u\in H^{\varphi\rho^{2q}}(\Omega)$. *Тут* c *не залежить від* u.

Для розширеної соболєвської шкали вірна нижченаведена теорема про регулярність розв'язків еліптичної крайової задачі. Позначимо через $H^{m+1/2+}(\Omega)$ об'єднання усіх соболєвських просторів $H^{(l)}(\Omega)$, де $l>m+1/2$.

Теорема 4. *Припустимо, що функція* $u\in H^{m+1/2+}(\Omega)$ *є розв'язком еліптичної крайової задачі* (1), (2), *праві частини якої задовольняють умову* $(f,g_1,\ldots,g_q)\in\mathcal{H}^{\varphi}(\Omega,\Gamma)$. *Тоді розв'язок* $u\in H^{\varphi\rho^{2q}}(\Omega)$.

Теореми 1–4 переносять на розширену соболєвську шкалу відомі властивості еліптичних крайових задач у просторах Соболєва [1–4, 12], а також в уточненій соболєвській шкалі [5].

У зв'язку з теоремою 2 відмітимо, що в статті Г. Шлензак [15] встановлено аналог ізоморфізму (9) для деякого (більш вузького) класу гільбертових просторів Хермандера у випадку нормальних крайових умов. Використаний у цій статті клас функціональних параметрів, що служать показниками гладкості, не описаний конструктивно.

4. Застосування. Як застосування розширеної соболєвської шкали наведемо достатню умову класичності розв'язку еліптичної крайової задачі. Позначимо через $H^{\varphi_1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, де $\varphi_1\in\mathrm{RO}$, лінійний простір усіх розподілів f, заданих в Ω і таких, що $\chi f\in H^{\varphi_1}(\Omega)$ для кожної функції $\chi\in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ з $\operatorname{supp}\chi\subset\Omega$.

Теорема 5. *Припустимо, що функція* $u\in H^{m+1/2+}(\Omega)$ *є розв'язком еліптичної крайової задачі* (1), (2), *праві частини якої задовольняють умови*

$$f\in H^{\varphi_1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)\bigcap H^{\varphi_2}(\Omega), \tag{11}$$

$$g_j\in H^{\varphi_2\varrho^{2q-m_j-1/2}}(\Gamma)\qquad \text{\textit{при}}\qquad j\in\{1,\ldots,q\} \tag{12}$$

для деяких параметрів φ_1, $\varphi_2\in\mathrm{RO}$ *таких, що* $\sigma_0(\varphi_2)>-2q+m+1/2$ *і*

$$\int\limits_1^{\infty}t^{n-1}\varphi_1^{-2}(t)\,dt<\infty, \tag{13}$$

$$\int\limits_1^{\infty}t^{2m+n-1-4q}\varphi_2^{-2}(t)\,dt<\infty. \tag{14}$$

Тоді розв'язок $u\in C^{2q}(\Omega)\bigcap C^{m}(\overline{\Omega})$, *тобто він є класичним.*

У зв'язку з цією теоремою зауважимо, що якщо u є класичним розв'язком розглянутої задачі, то $F := (A, B)u \in C(\Omega) \times (C(\Gamma))^q$. При цьому праві частини рівностей (1) і (2) обчислюються за допомогою класичних похідних, а самі рівності виконуються в кожній точці множини Ω або Γ відповідно. Обернене, взагалі кажучи, не вірне. Навіть, якщо $f \in C(\overline{\Omega})$ та всі $g_j = 0$, то розв'язок $u \in H^{(2q)}(\Omega)$ може не бути класичним.

5. Доведення. Дамо коротко обгрунтування теорем 1–5. Як і в п. 3, припускаємо, що $\varphi \in \mathrm{RO}$ і $\sigma_0(\varphi) > -2q + m + 1/2$.

Встановимо теорему 1. У соболєвському випадку, коли $\varphi = \varrho^s$ і $s \geqslant 0$, вона є класичним результатом теорії еліптичних крайових задач (див., наприклад, [4, п. 20.1]). Якщо $-2q + m + 1/2 < s < 0$, то ця теорема є також вірною [2, розд. III, п. 2.2]. Для розширеної соболєвської шкали її можна довести методом інтерполяції з функціональним параметром відповідних просторів Соболєва. Означення і властивості цієї інтерполяції наведені в [5, пп. 1.1, 2.4.2].

А саме, виберемо дійсні числа s_0 і s_1 так, щоб $-2q + m + 1/2 < s_0 < \sigma_0(\varphi)$ і $s_1 > \sigma_1(\varphi)$. Маємо обмежені нетерові оператори

$$(A, B)\colon H^{(s_r+2q)}(\Omega) \to H^{(s_r)}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q} H^{(s_r+2q-m_j-1/2)}(\Gamma) =: \mathcal{H}^{(s_r)}(\Omega, \Gamma), \quad r = 0, 1, \quad (15)$$

що діють у соболєвських просторах. Означимо інтерполяційний параметр ψ за формулами $\psi(t) := t^{-s_0/(s_1-s_0)}\varphi(t^{1/(s_1-s_0)})$ при $t \geqslant 1$ та $\psi(t) := \varphi(1)$ при $0 < t < 1$. Застосувавши інтерполяцію з параметром ψ до (15), отримаємо обмежений оператор (5)

$$(A, B)\colon H^{\varphi\rho^{2q}}(\Omega) = [H^{(s_0+2q)}(\Omega), H^{(s_1+2q)}(\Omega)]_\psi \to [\mathcal{H}^{(s_0)}(\Omega, \Gamma), \mathcal{H}^{(s_1)}(\Omega, \Gamma)]_\psi = \mathcal{H}^\varphi(\Omega, \Gamma).$$

Тут скористалися інтерполяційними теоремами 1.5, 2.2 з монографії [5] і теоремою 5.1 з роботи [7]. На підставі ще однієї інтерполяційної теореми 1.7 з [5] робимо висновок, що нетеровість цього оператора й інші його властивості, зазначені в теоремі 1, є наслідками нетеровості операторів (15), які мають спільне ядро і однаковий індекс.

Доведемо теорему 2. Попередньо відмітимо, що розклади в прямі суми (7) і (8) існують внаслідок теореми 1. Справді, рівність (7) є звуженням на $H^{\varphi\varrho^{2q}}(\Omega)$ розкладу простору $L_2(\Omega)$ в ортогональну суму підпросторів N і $L_2(\Omega) \ominus N$. Рівність (8) правильна, оскільки підпростори в її правій частині мають тривіальний перетин і (скінченна) вимірність першого з них збігається з ковимірністю другого.

Теорема 2 випливає з теореми 1. Справді, на підставі останньої, N є ядром, а $Q(H^\varphi(\Omega, \Gamma))$ є областю значень обмеженого оператора (5). Тому він — бієкція і, за теоремою Банаха про обернений оператор, є ізоморфізмом (9).

Встановимо теорему 3. Для довільної функції $u \in H^{\varphi\rho^{2q}}(\Omega)$ потрібна оцінка (10) випливає з нерівностей

$$\|Pu\|_{H^{\varphi\rho^{2q}}(\Omega)} \leqslant c_1\|(A, B)u\|_{\mathcal{H}_\varphi(\Omega,\Gamma)}, \qquad \|(1 - P)u\|_{H^{\varphi\rho^{2q}}(\Omega)} \leqslant c_2\|u\|_{L_2(\Omega)}.$$

Тут c_1 — норма оператора, оберненого до ізоморфізму (9) (зауважимо, що $(A, B)Pu = (A, B)u$), а c_2 — норма оператора $1 - P\colon L_2(\Omega) \to N$, де N розглядається як скінченновимірний підпростір в $H^{\varphi\rho^{2q}}(\Omega)$.

Доведемо теорему 4. Нехай u і $F := (f, g_1, \ldots, g_q)$ задовольняють її умову. Оскільки $F \in Q(H^\varphi(\Omega, \Gamma))$, то внаслідок теореми 1 існує розв'язок $v \in H^{\varphi\rho^{2q}}(\Omega)$ крайової задачі $(A, B)v = F$. Звідси $w := u - v \in N \subset C^\infty(\overline{\Omega})$ і тому $u = v + w \in H^{\varphi\rho^{2q}}(\Omega)$.

Встановимо теорему 5. Для цього скористаємося теоремою вкладення Хермандера [3, с. 59], яку можна сформулювати для розширеної соболєвської шкали так:

$$\int_{1}^{\infty} t^{2l+n-1}\alpha^{-2}(t)\,dt < \infty \Leftrightarrow H^{\alpha}(\Omega) \subset C^{l}(\overline{\Omega}). \tag{16}$$

Тут довільні вибрані функція $\alpha \in \mathrm{RO}$ і ціле число $l \geqslant 0$, а вкладення є неперервним.

Нехай виконується умова теореми 5. Тоді з включень $f \in H^{\varphi_2}(\Omega)$ і (12) випливає внаслідок теореми 4, що $u \in H^{\varphi_2\rho^{2q}}(\Omega)$. Звідси на підставі умови (14) і еквівалентності (16), де беремо $\alpha := \varphi_2\rho^{2q}$ і $l := m$, отримуємо включення $u \in C^{m}(\overline{\Omega})$.

Включення $u \in C^{2q}(\Omega)$ випливає з умов $f \in H^{\varphi_1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ і (13). Справді, оскільки $Au = f$ в Ω і $f \in H^{\varphi_1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, то $u \in H^{\varphi_1\rho^{2q}}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ внаслідок теореми 7.4.1 з роботи [3, с. 237]. Отже, $\chi u \in H^{\varphi_1\rho^{2q}}(\Omega)$ для кожної функції $\chi \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ з $\operatorname{supp}\chi \subset \Omega$. Звідси на підставі умови (13) і еквівалентності (16), де беремо $\alpha := \varphi_1\rho^{2q}$ і $l := 2q$, отримуємо включення $\chi u \in C^{2q}(\overline{\Omega})$. Воно з огляду на довільність зазначеної функції χ рівносильно включенню $u \in C^{2q}(\Omega)$.

Автор висловлює вдячність О. О. Мурачу за керівництво роботою.

1. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 800 с.
2. *Егоров Ю. В.* Линейные дифференциальные уравнения главного типа. – Москва: Наука, 1984. – 360 с.
3. *Хермандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. – Москва: Мир, 1965. – 380 с.
4. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4 т. Т. 3. Псевдодифференциальные операторы. – Москва: Мир, 1987. – 696 с.
5. *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Пространства Хермандера, интерполяция и эллиптические задачи. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2010. – 372 с. (Доступно как arXiv:1106.3214.).
6. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* The refined Sobolev scale, interpolation, and elliptic problems // Banach J. Math. Anal. – 2012. – **6**, No 2. – P. 211–281.
7. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Interpolation Hilbert spaces for a couple of Sobolev spaces. – arXiv:1106.2049v2. – 15 p.
8. *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Расширенная соболевская шкала и эллиптические операторы // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, No 3. – С. 368–380.
9. *Ovchinnikov V. I.* The methods of orbits in interpolation theory // Math. Rep. Ser. 1. – 1984. – No 2. – P. 349–515.
10. *Зинченко Т. Н., Мурач А. А.* Эллиптические по Дуглису–Ниренбергу системы в пространствах Хермандера // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, No 11. – С. 1477–1491.
11. *Зинченко Т. Н.* Эллиптические системы в расширенной соболевской шкале // Доп. НАН України. – 2013. – No 3. – С. 14–20.
12. *Agranovich M. S.* Elliptic boundary problems // Encycl. Math. Sci. Vol. 79. Partial differential equations, IX. – Berlin: Springer, 1997. – P. 1–144.
13. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – Москва: Наука, 1985. – 144 с.
14. *Волевич Л. Р., Панеях Б. П.* Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения // Успехи мат. наук. – 1965. – **20**, No 1. – С. 3–74.
15. *Slenzak G.* Elliptic problems in a refined scale of spaces // Moscow Univ. Math. Bull. – 1974. – **29**, No 3–4. – P. 80–88.

Інститут математики НАН України, Київ

Надійшло до редакції 12.11.2013

А. В. Аноп

Общая эллиптическая краевая задача в расширенной соболевской шкале

Общая эллиптическая краевая задача, заданная в ограниченной евклидовой области с гладкой границей, исследована в расширенной соболевской шкале. Последняя состоит из всех гильбертовых пространств, интерполяционных для пар гильбертовых пространств Соболева. Доказано, что оператор этой задачи является ограниченным и нетеровым в соответствующих парах пространств Хермандера, принадлежащих расширенной соболевской шкале. Установлены априорные оценки решений задачи и исследована их регулярность в пространствах Хермандера. Найдено новое достаточное условие классичности обобщенного решения задачи.

A. V. Anop

A general elliptic boundary-value problem in the extended Sobolev scale

A general elliptic boundary-value problem given in a bounded Euclidean domain with smooth boundary is investigated in the extended Sobolev scale. The latter consists of all Hilbert spaces that are interpolation spaces for pairs of inner product Sobolev spaces. We prove that the operator of the problem is bounded and Fredholm in appropriate pairs of Hörmander spaces, which belong to the extended Sobolev scale. A priori estimates for the solutions to the problem are established, and their regularity in Hörmander spaces is investigated. We find a new sufficient condition, under which a generalized solution to the problem is classical.