УДК 512.544

Л. А. Курдаченко, М. М. Семко, С. Атліхан

Про структуру локально скінченних груп, усі неабелеві підгрупи яких субнормальні

(Представлено академіком НАН України А. М. Самойленком)

Вивчено нескінченні групи, всі неабелеві підгрупи яких є субнормальними. Наведено деякі результати про будову таких груп та дано повний опис локально скінченних груп, що мають вказану властивість.

Нехай G — група і ρ — теоретико-підгрупова властивість. Ця властивість може бути *внутрішньою*, наприклад такою, як властивості "бути нормальною підгрупою", "бути субнормальною підгрупою", "бути майже нормальною підгрупою", "бути зростаючою підгрупою", "бути переставною підгрупою" тощо; або ця властивість може бути *зовнішньою*, що визначається деяким класом груп, наприклад такою, як властивості "бути абелевою підгрупою", "бути неабелевою підгрупою", "бути нільпотентною підгрупою", "бути розв'язною підгрупою", "бути радикальною підгрупою" тощо. Позначимо через $L_\rho(G)$ систему всіх підгруп групи G, які мають властивість ρ. Взаємовідношення між системами підгруп $L_\rho(G)$ та $L_\nu(G)$ для різних властивостей ρ та ν можуть бути досить різноманітними. Першим природним випадком тут буде випадок, коли $L_\rho(G) \subseteq L_\nu(G)$. Такі ситуації для конкретних властивостей ρ та ν вивчалися багатьма авторами. Наприклад, якщо ρ — це властивість "бути власною підгрупою", то ми приходимо до груп, усі власні підгрупи яких мають властивість ν. Існує досить великий масив статей, де такі групи вивчалися для різноманітних природних властивостей ν. Однією з найбільш важливих є властивість "бути нормальною підгрупою". Групи, в яких $L_\rho(G) \subseteq L_{\mathrm{norm}}(G)$ (тут через $L_{\mathrm{norm}}(G)$ позначена система всіх нормальних підгруп), досить довгий час вивчалися багатьма авторами (див., наприклад, оглядову статтю [1]). Серед інших досліджувалися і групи, всі неабелеві підгрупи яких є нормальними. Такі групи були названі *метагамільтоновими*. Вивчення цих груп було розпочато М. Ф. Сєсєкіним та Г. М. Ромалісом [2–4] і продовжено В. Т. Нагребецьким [5] та О. О. Махньовим [6]. Але вичерпний опис метагамільтонових груп отримано М. Ф. Кузенним та М. М. Семко у серії статей [7–10]. Слід також відзначити, що В. Т. Нагребецький [11] розглядав скінченні групи, всі ненільпотентні підгрупи яких нормальні.

Природним і досить широким узагальненням нормальних підгруп є субнормальні підгрупи. У статтях [12, 13] Х. Сміт розпочав вивчення локально майже розв'язних груп, усі ненільпотентні підгрупи яких субнормальні. Зокрема, він довів, що ці групи розв'язні, більш того, вони є нільпотентними у випадку, коли вони вільні від скруту. Локально скінченні групи, всі ненільпотентні підгрупи яких субнормальні, містять у собі нормальну підгрупу скінченного індексу, всі підгрупи якої субнормальні, зокрема, такі групи є майже локально нільпотентними. У випадку скінченних груп розглядалися більш загальні ситуації. В. Н. Княгіна та В. С. Монахов [14] розпочали вивчення скінченних груп з субнормальними підгрупами Шмідта. Пізніше В. А. Вєдєрніков [15] отримав опис скінченних груп, усі підгрупи Шмідта яких є субнормальними.

У даній роботі ми розпочинаємо вивчення нескінченних груп, усі неабелеві підгрупи яких є субнормальними. Наведемо зараз деякі результати про будову таких груп та дамо повний опис локально скінченних груп, що мають вказану властивість.

Лема 1. *Нехай G — група, всі неабелеві підгрупи якої є субнормальними. Якщо L — нормальна неабелева підгрупа G, то кожна підгрупа фактор-групи G/L є субнормальною. Зокрема, G/L є локально нільпотентною та розв'язною.*

Лема 2. *Нехай G — група, всі неабелеві підгрупи якої є субнормальними. Якщо L, K — такі нормальні неабелеві підгрупи G, що $K \bigcap L = \langle 1 \rangle$, то G є локально нільпотентною та розв'язною.*

Наслідок. *Нехай G — група, всі неабелеві підгрупи якої є субнормальними. Якщо існують такі прості числа p, q, що $p \neq q$ і G має неабелеву силовську p-підгрупу P та неабелеву силовську q-підгрупу Q, то група G є локально нільпотентною та розв'язною.*

Лема 3. *Нехай G — нескінченна періодична група, всі неабелеві підгрупи якої є субнормальними. Якщо G локально нільпотентна, то кожна підгрупа G є субнормальною.*

Наслідок. *Нехай G — періодична група, всі неабелеві підгрупи якої є субнормальними. Якщо існують такі прості числа p, q, що $p \neq q$ і G має неабелеву силовську p-підгрупу P та неабелеву силовську q-підгрупу Q, то кожна підгрупа G є субнормальною.*

Лема 4. *Нехай G — локально скінченна група, всі неабелеві підгрупи якої є субнормальними. Тоді G є розв'язною.*

Група G називається *узагальнено радикальною*, якщо G має зростаючий ряд, фактори якого є локально нільпотентними або локально скінченними. Зазначимо, що узагальнено радикальна група G має або зростаючу локально нільпотентну підгрупу, або зростаючу локально скінченну підгрупу. У першому випадку локально нільпотентний радикал групи G буде неодиничним. У другому випадку локально скінченний радикал групи G буде неодиничним. Таким чином, узагальнено радикальна група має зростаючий ряд нормальних підгруп, фактори якого є локально нільпотентними або локально скінченними.

Пропозиція 1. *Нехай G — локально узагальнено радикальна група, всі неабелеві підгрупи якої є субнормальними. Тоді G є розв'язною.*

Наведемо тепер опис локально скінченних груп, усі неабелеві групи яких є субнормальними.

Теорема. *Нехай G — локально скінченна група, всі неабелеві підгрупи якої є субнормальними.*

(i) Якщо G локально нільпотентна, то кожна підгрупа G субнормальна.

(ii) Якщо існують такі прості числа p, q, що $p \neq q$ і G має неабелеву силовську p-підгрупу P та неабелеву силовську q-підгрупу Q, то кожна підгрупа G є субнормальною.

(iii) Нехай G не є локально нільпотентною та має неабелеву силовську p-підгрупу P для деякого простого числа p. Тоді мають місце такі твердження:

(iiia) $G = P \leftthreetimes Q$, де Q є абелевою силовською p'-підгрупою G;

(iiib) $C = C_P(Q)$ є такою G-інваріантною абелевою підгрупою P, що P/C є скінченним G-головним фактором;

(iiic) $G/C_G(P/C)$ — циклічна p'-група;

(iiid) P/C є $\langle g \rangle$-головним фактором для кожного елемента $g \notin C_G(P/C)$;

(iiie) $P = CD$, де $D = [P, Q]$ — скінченна спеціальна p-підгрупа.

(iv) Нехай G не є локально нільпотентною, а її силовські s-підгрупи абелеві для кожного простого числа s. Тоді існує таке просте число p, що G має нормальну силовську p-підгрупу P і мають місце такі твердження:

(iva) $G = P \rightthreetimes Q$*, де* Q *є абелевою силовською* p'*-підгрупою* G*;*

(ivb) $P = C \times D$*, де* $C = C_P(Q)$ *та* $D = [P, Q]$ *є мінімальною* G*-інваріантною підгрупою* P*;*

(ivc) $G/C_G(D)$ *є циклічною* p'*-групою;*

(ivd) D *є мінімальною* $\langle g\rangle$*-інваріантною підгрупою* P *для будь-якого елемента* $g \notin C_G(D)$*.*

Нагадаємо, що скінченна p-група P, p — просте число, називається *спеціальною*, якщо $[P, P] = \zeta(P) = \mathrm{Fratt}(P)$ є елементарною абелевою p-підгрупою.

1. *Dixon M. R., Subbotin I. Ya.* Groups with finiteness conditions on some subGroup systems: a contemporary stage // Algebra and Discrete Mathematics. – 2009. – No 4. – P. 29–54.
2. *Ромалис Г. М., Сесекин Н. Ф.* О метагамильтоновых группах I // Мат. зап. Урал. ун-та. – 1966. – **5**, № 3. – С. 45–49.
3. *Сесекин Н. Ф., Ромалис Г. М.* О метагамильтоновых группах II // Там же. – 1968. – **6**, № 5. – С. 50–53.
4. *Ромалис Г. М., Сесекин Н. Ф.* О метагамильтоновых группах III // Там же. – 1970. – **7**, № 3. – С. 195–199.
5. *Нагребецкий В. Т.* Конечные ненильпотентные группы, любая неабелевая подгруппа которых инвариантна // Там же. – 1967. – **6**, № 1. – С. 80–88.
6. *Махнев А. А.* О конечных метагамильтоновых группах // Там же. – 1976. – **10**, № 1. – С. 60–75.
7. *Кузенный Н. Ф., Семко Н. Н.* Строение разрешимых ненильпотентных метагамильтоновых групп // Мат. заметки. – 1983. – **34**, № 2. – С. 179–188.
8. *Кузенний М. Ф., Семко М. М.* Будова розв'язних метагамільтонових груп // Доп. АН УРСР. – 1985. – № 2. – С. 6–9.
9. *Кузенный Н. Ф., Семко Н. Н.* О строении непериодических метагамильтоновых групп // Изв. вузов. Математика. – 1986. – № 11. – С. 32–40.
10. *Кузенный Н. Ф., Семко Н. Н.* Строение периодических метабелевых метагамильтоновых групп с неэлементарным коммутантом // Укр. мат. журн. – 1987. – **39**, № 2. – С. 180–185.
11. *Нагребецкий В. Т.* Конечные ненильпотентные группы, каждая ненильпотентная подгруппа которых инвариантна // Мат. зап. Урал. ун-та. – 1968. – **6**, № 3. – С. 45–49.
12. *Smith H.* Torsion-free groups with all non-nilpotent subgroups subnormal // Quaderni di Matematica, Topics in infinite groups. – 2001. – **8**. – P. 298–308.
13. *Smith H.* Groups with all non-nilpotent subgroups subnormal // Ibid. – 2001. – **8**. – P. 309–326.
14. *Княгина В. Н., Монахов В. С.* О конечных группах с некоторыми субнормальными подгруппами Шмидта // Сиб. мат. журн. – 2004. – **45**, № 6. – С. 1316–1322.
15. *Ведерников В. А.* Конечные группы с субнормальными подгруппами Шмидта // Алгебра и логика. – 2007. – **46**, № 6. – С. 669–687.

Національний університет державної податкової служби України, Ірпінь

Надійшло до редакції 30.09.2013

Л. А. Курдаченко, Н. Н. Семко, С. Атлихан

О структуре локально конечных групп, все неабелевые подгруппы которых субнормальные

Изучены бесконечные группы, все неабелевые подгруппы которых субнормальные. Приведены некоторые результаты о строении таких групп и дано полное описание локально конечных групп, имеющих указанное свойство.

L. A. Kurdachenko, M. M. Semko, S. Atlihan

About the structure of finite groups, whose all non-Abelian subgroups are subnormal

We study infinite groups, all non-Abelian subgroups of which are subnormal. Some results of these groups' structure and the full description of locally finite groups having a specified property are given.