УДК 518.9

С. В. Пашко

Гарантированное время преследования для стратегии параллельного сближения

(Представлено академиком НАН Украины Ф. И. Андоном)

Данная работа посвящена дифференциальным играм преследования, в которых несколько игроков догоняют одного, применяя стратегию параллельного сближения. Построена стратегия уклонения и доказана ее оптимальность. Исследованы свойства оптимальных стратегий уклонения. Сформулированы задачи линейного программирования, позволяющие строить такие стратегии.

Задачи преследования–уклонения занимают одно из центральных мест в теории динамических игр. В данной работе рассматривается задача оптимального уклонения одного убегающего от нескольких преследователей. Предполагается, что каждый преследователь использует стратегию параллельного сближения [1]. В качестве критерия выступает время захвата цели, которое убегающий игрок стремится максимизировать.

В последнее время проявляется интерес к созданию многоагентных роботизированных систем преследователей [2], поэтому рассматриваемая задача является актуальной.

Движение игроков считается простым. Это значит, что в каждый момент времени игрок может выбрать произвольный вектор скорости движения, норма которого не превосходит заданную величину. Скорости считаются кусочно-непрерывными функциями от времени.

Стратегия параллельного сближения состоит в следующем. Каждый преследователь, зная скорость преследуемого в данный момент времени, считает эту скорость постоянной и вычисляет на линии движения убегающего игрока точку захвата, в которой он может догнать его, двигаясь с постоянной максимальной скоростью. В текущий момент времени вектор скорости преследователя направлен на точку захвата, а величина скорости максимальна. Если максимальные скорости преследователя и убегающего равны, а точка захвата отсутствует, преследователь двигается параллельно убегающему игроку.

Ниже построены стратегии уклонения, каждая из которых определяется пределом последовательности оптимальных решений задач линейного программирования. Приведена теорема об оптимальности таких стратегий. Построенные оптимальные стратегии являются кусочно-постоянными функциями от времени, причем число промежутков постоянства не превосходит число преследователей.

В случае, когда максимальные скорости всех игроков равны, выведено дополнительное необходимое условие оптимальности. Оно состоит в том, что вектор скорости убегающего игрока должен быть ортогонален прямой, проходящей через точки расположения убегающего и одного из преследователей.

Описаны задачи линейного программирования, решения которых позволяют строить оптимальные или близкие к ним стратегии уклонения. Приведена теорема о величине погрешности получаемых таким образом стратегий.

Хотя изложенные в данной работе утверждения могут быть обобщены на случай n-мерного пространства, ниже задачи оптимального уклонения рассмотрены для евклидовой плоскости.

Оптимальные стратегии уклонения и гарантированное время преследования. Пусть на плоскости в точке $X_0 = X_0(t)$ расположен преследуемый игрок E, а в точках $X_i = X_i(t)$ находятся преследователи P_i, $i = 1, 2, \ldots, m$. Двухмерные векторы $V_i = V_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots, m$, обозначают скорости игроков (нулевое значение индекса i относится к игроку E).

Уравнения движения игроков имеют вид $\dot{X}_i = V_i$, $i = 0, 1, \ldots, m$. Считаем, что выполняются ограничения $0 \leqslant \|V_i\| \leqslant w_i$, $i = 0, 1, \ldots, m$, где $0 < w_i < \infty$ — максимальная величина скорости; $\|X\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ — длина вектора $X = (x, y)$. Пусть выполняются неравенства $w_0 \leqslant w_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Скорость $V_0(t)$ считается кусочно-непрерывной функцией от времени. Это значит, что в каждом ограниченном временном интервале существует не больше конечного числа точек разрыва первого рода. Поскольку каждый преследователь применяет стратегию параллельного сближения, то функции $V_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, также являются кусочно-непрерывными.

Игрок E управляет своими координатами, выбирая в каждый момент времени вектор скорости V_0, являющийся функцией от времени и от точек $X_0(t)$, $X_1(t), \ldots, X_m(t)$. Функцию $V_0(t)$, $t \geqslant 0$, будем называть стратегией убегающего игрока и обозначать S.

Пусть $d_i(t) = \|X_i(t) - X_0(t)\|$, $l_i \geqslant 0$ — заданные числа, $i = 1, 2, \ldots, m$. Определим функцию $d(t)$ следующим образом: $d(t) = 0$, если для некоторого значения $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ справедливо равенство $d_i(t) = 0$ или выполняется неравенство $d_i(t) < l_i$; $d(t) = 1$ в противном случае.

Игра начинается в момент времени $t = 0$. Временем окончания игры назовем величину $T(S) = \inf\{t\colon d(t) = 0,\ t \geqslant 0\}$. Игрок E стремится максимизировать величину $T(S)$. Гарантированным временем преследования назовем число $T^* = \sup\limits_S T(S)$. Стратегию S, для которой справедливо равенство $T(S) = T^*$, назовем оптимальной стратегией уклонения. Считаем, что выполняются условия

$$d_i(0) > l_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{1}$$

Для таких значений i, что $w_i = w_0$, дополнительно потребуем выполнения неравенства $l_i > 0$. Это условие обеспечивает существование оптимальных стратегий уклонения.

Свойства оптимальных стратегий уклонения. Обозначим $\operatorname{conv}\{X_1, X_2, \ldots, X_m\}$ выпуклую оболочку точек X_1, $X_2, \ldots, X_m$. Пусть $\operatorname{int} X$ — внутренность множества X.

Рассмотрим случай, когда точка расположения убегающего X_0 принадлежит внутренности выпуклой оболочки точек X_1, $X_2, \ldots, X_m$, т. е. выполняется условие

$$X_0 \in \operatorname{int}\operatorname{conv}\{X_1, X_2, \ldots, X_m\}. \tag{2}$$

Известно [3], что стратегия параллельного сближения обладает следующим свойством. Прямая, проходящая через точки $X_0(t)$ и $X_i(t)$, в которых находятся игроки E и P_i, при каждом $t \geqslant 0$ параллельна прямой, проходящей через точки $X_0(0)$ и $X_i(0)$. Используя это, легко вывести формулы для величин скоростей сближения $u_i = u_i(t)$ объектов E и P_i:

$$u_i = v_0 \cos\theta_i + \sqrt{w_i^2 - v_0^2 \sin^2\theta_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{3}$$

Здесь $v_0 = v_0(t) = \|V_0(t)\|$, $\theta_i = \theta_i(t)$ — угол, образованный векторами V_0 и $\overrightarrow{X_0(0)X_i(0)}$ в момент t (при условии $\|V_0(t)\| = 0$ считаем $\theta_i = 0$).

Задачу поиска оптимальной стратегии уклонения запишем в виде

$$T \longrightarrow \max, \tag{4}$$

$$\int\limits_0^T u_i(t)\,dt \leqslant d_i - l_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{5}$$

Здесь и далее $d_i = d_i(0)$ — расстояние между игроками E и P_i в момент $t = 0$.

Важно заметить следующее. Углы между векторами $\overrightarrow{X_0X_i}$ и $\overrightarrow{X_0X_j}$ на протяжении игры остаются постоянными, поскольку прямые $X_0(t)X_k(t)$ и $X_0(0)X_k(0)$ параллельны при каждом $t \geqslant 0$; $k = 1, 2, \ldots, m$. Скорости сближения $u_i(t)$ неотрицательны. Стратегия уклонения $V_0(t)$ обладает следующим свойством. Поменяем местами скорости на отрезках $[t_1, t_2]$ и $[t_3, t_4]$, где $0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < T(V_0)$, $t_2 - t_1 = t_4 - t_3$. Образуем новую стратегию уклонения $V_0^1(t)$, где $V_0^1(t) = V_0(t)$, если $t \notin [t_1, t_2]$ и $t \notin [t_3, t_4]$; $V_0^1(t) = V_0(t + t_3 - t_1)$, если $t \in [t_1, t_2]$; $V_0^1(t) = V_0(t + t_1 - t_3)$, если $t \in [t_3, t_4]$. В момент времени t_4 координаты игроков не зависят от того, которая из двух стратегий применяется.

Сформулируем задачу линейного программирования, являющуюся приближением задачи (4), (5). Выберем величину угла δ по формуле $\delta = \pi/(2n)$, где n — натуральное число. Пусть в каждый момент времени вектор V_0 лежит на одном из лучей, выходящих из начала координат и образующих углы $j\delta$ с осью абсцисс, $j = 1, 2, \ldots, 4n$, и $V_0 = w_0$. Угол между вектором $X_i - X_0$ и лучом $j\delta$ обозначим θ_{ij}.

В соответствии с соотношениями (3), скорости сближения u_{ij} игроков E и P_i вычисляются по формулам

$$u_{ij} = w_0 \cos\theta_{ij} + \sqrt{w_i^2 - w_0^2 \sin^2\theta_{ij}}, \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \qquad j = 1, 2, \ldots, 4n. \tag{6}$$

Обозначим t_j время, в течение которого вектор скорости игрока E лежит на луче $j\delta$. Рассмотрим задачу линейного программирования

$$\sum_{j=1}^{4n} t_j \longrightarrow \max, \tag{7}$$

$$\sum_{j=1}^{4n} u_{ij} t_j \leqslant d_i - l_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{8}$$

$$t_j \geqslant 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, 4n. \tag{9}$$

Легко доказать, что для любой стратегии уклонения время окончания игры не превосходит некоторую константу $\overline{T} < \infty$. Величину $\overline{T}$ нетрудно выписать в явном виде как функцию от параметров игры. Из этого следует, что целевая функция (6) на множестве (7), (8) ограничена сверху константой $\overline{T}$. Поэтому оптимальное решение задачи (6)–(8) существует, причем одно из оптимальных решений находится в угловой точке [4]. Но решение, соответствующее угловой точке, содержит не больше, чем m положительных компонент. Значит, оптимальное решение $S_n^* = (t_1^{*(n)}, t_2^{*(n)}, \ldots, t_{4n}^{*(n)})$ задачи (6)–(8) можно представить в виде $S_n^* = (t^{*(n)}_{j_1^{(n)}}, t^{*(n)}_{j_2^{(n)}}, \ldots, t^{*(n)}_{j_m^{(n)}}, j_1^{(n)}, j_2^{(n)}, \ldots, j_m^{(n)})$, где $j_k^{(n)} \in \{1, 2, \ldots, 4n\}$ и $t_j^{*(n)} = 0$, если $j \in \{1, 2, \ldots, 4n\} \setminus \{j_1^{(n)}, j_2^{(n)}, \ldots, j_m^{(n)}\}$.

Очевидно, вместо последнего представления S_n^* можно использовать $S_n^* = (t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \ldots, \ldots t_m^{(n)}, \varphi_1^{(n)}, \varphi_2^{(n)}, \ldots, \varphi_m^{(n)})$, где $t_k^{(n)} = t^{*(n)}_{j_k^{(n)}}$ — время, в течение которого вектор скорости игрока E лежит на луче, образующем угол $\varphi_k^{(n)} = j_k^{(n)}\delta$ с осью абсцисс, $k = 1, 2, \ldots, m$. Поскольку $t_k^{(n)} \in [0, \overline{T}]$, $\varphi_k^{(n)} \in [0, 2\pi]$, $k = 1, 2, \ldots, m$, можно считать, что точки S_n^* принадлежат замкнутому ограниченному множеству Q, которое является подмножеством $2m$-мерного евклидового пространства.

Множество Q является компактным, поэтому последовательность S_n^*, $n = 1, 2, 3, \ldots$, имеет предельную точку $S^* = (t_1^*, t_2^*, \ldots, t_m^*, \varphi_1^*, \varphi_2^*, \ldots, \varphi_m^*)$, причем $S^* \in Q$ [5]. Точка S^* определяет стратегию уклонения (которая также обозначается S^*), состоящую в том, что на непрерывном промежутке времени длиной t_k^* вектор скорости V_0 образует угол φ_k^* с осью абсцисс, причем $\|V_0\| = w_0$.

Теорема 1. *Стратегия S^* является оптимальной стратегией уклонения.*

Теорема 1 утверждает, что время окончания игры $\sum\limits_{i=1}^{m} t_i^*$ стратегии S^* не меньше, чем время окончания игры любой другой стратегии уклонения. Количество промежутков постоянства построенной оптимальной стратегии S^* не превосходит число преследователей m.

Пусть $V_0^*(t)$, $t \geqslant 0$, — некоторая оптимальная стратегия уклонения; T^* — соответствующее время окончания игры.

Теорема 2. *В каждый момент времени $t \in (0, T^*)$, в который оптимальная стратегия $V_0^*(t)$ непрерывна, справедливо равенство $\|V_0^*(t)\| = w_0$.*

Теорема 2 утверждает, что с целью максимизации времени окончания игры убегающий должен двигаться с максимальной скоростью.

Приведем оценку погрешности стратегии, соответствующей оптимальному решению задачи (6)–(8). Обозначим $g = \min\limits_{i=1,\ldots,m}(d_i - l_i)$, $h_n = g/(g + \pi w_0 \overline{T}/n)$. Очевидно, $h_n \longrightarrow 1$, если $n \longrightarrow \infty$. Пусть T_n^* — оптимальное значение целевой функции задачи (6)–(8), соответствующее оптимальному решению S_n^*.

Теорема 3. *Оптимальное значение целевой функции T_n^* удовлетворяет неравенствам $h_n T^* \leqslant T_n^* \leqslant T^*$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.*

Пример. Предположим, три игрока преследуют одного. Исходные данные заданы равенствами $m = 3$, $X_0 = (0, 0)$, $X_1 = (300, 200)$, $X_2 = (-300, 150)$, $X_3 = (0, -400)$, $l_1 = l_2 = l_3 = 30$, $w_0 = 5{,}0$, $w_1 = 5{,}5$, $w_2 = 6{,}0$, $w_3 = 6{,}5$. Для получения близкой к оптимальной стратегии уклонения решена задача линейного программирования (6)–(8) при условиях $n = 90$, $d_1 = \|X_1\| = 360,6$, $d_2 = \|X_2\| = 335,4$, $d_3 = \|X_3\| = 400$.

Оптимальное решение этой задачи: $t_{66}^{*(n)} = 15{,}8$, $t_{118}^{*(n)} = 23{,}7$, $t_{316}^{*(n)} = 33{,}6$. Время окончания игры $t_{66}^{*(n)} + t_{118}^{*(n)} + t_{316}^{*(n)}$ равно 73,1. На рис. 1 изображены траектории игроков E, P_1, P_2, P_3 от момента начала игры до момента ее окончания.

В случае $X_0 \notin \operatorname{int}\operatorname{conv}\{X_1, X_2, \ldots, X_m\}$ из результатов работ [3, 6] легко вывести следующее. При выполнении условий $w_i > w_0$, $l_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, существует точка X^* такая, что стратегия уклонения игрока E, заключающаяся в прямолинейном движении с максимальной скоростью по направлению к точке X^*, оптимальна. Гарантированное время преследования равно $\|X^* - X_0\|/w_0$.

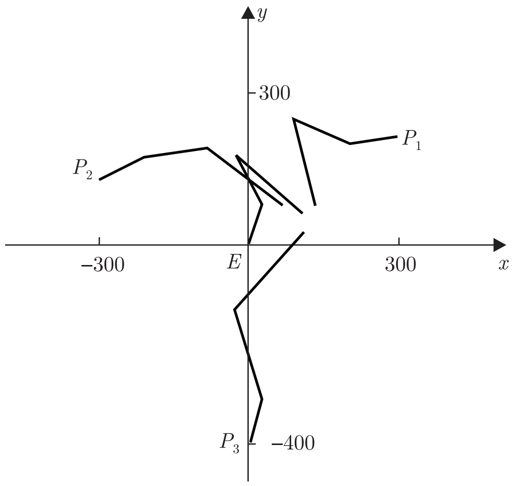

Рис. 1. Траектории преследования и уклонения

Предположим, справедливы равенства $w_0 = w_1 = \cdots = w_m$. В этом случае захват гарантируется только при условии (2), поэтому считаем, что оно выполняется. Ниже $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначает скалярное произведение.

Теорема 4. *В каждый момент времени $t \in (0, T^*)$, в который оптимальная стратегия $V_0^*(t)$ непрерывна, найдется такое число $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, что справедливо равенство* $\langle X_i(0) - X_0(0), V_0^*(t)\rangle = 0$.

Теорема 4 позволяет сформулировать задачу линейного программирования, содержащую m ограничений и $2m$ переменных, решение которой определяет оптимальную стратегию уклонения.

1. *Петросян Л. А., Томский Г. В.* Геометрия простого преследования. – Новосибирск: Наука, 1983. – 140 с.
2. *Vieira Marcos A. M., Govindan R., Sukhatme G. S.* Scalable and practical pursuit-evasion with networked robots // J. of Intelligent Service Robotics. Special Iss. on Networked Robots. – 2009. – **2**. – P. 247–263.
3. *Рихсиев Б. Б.* Дифференциальные игры с простыми движениями. – Ташкент: ФАН, 1989. – 232 с.
4. *Карманов В. Г.* Математическое программирование. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 264 с.
5. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – Москва: Наука, 1972. – 496 с.
6. *Пашко С. В.* Квазиоптимальные стратегии в дифференциальных играх преследования на плоскости // Пробл. управления и информатики. – 2012. – № 6. – С. 30–43.

Институт программных систем НАН Украины, Киев
Поступило в редакцию 17.09.2013

С. В. Пашко

Гарантований час переслідування для стратегії паралельного зближення

Дана робота присвячена диференціальним іграм переслідування, в яких кілька гравців доганяють одного, застосовуючи стратегію паралельного зближення. Побудовано стратегію втечі та доведено її оптимальність. Вивчено властивості оптимальних стратегій втечі. Сформульовано задачі лінійного програмування, що дозволяють будувати такі стратегії.

S. V. Pashko

Guaranteed time of pursuit for the strategy of parallel approach

This paper is concerned with differential pursuit-evasion games, in which several players chase one, using the strategy of parallel approach. The strategy of evasion is constructed, and its optimality is proved. Optimal strategies of evasion are investigated. Linear programming problems, which specify the optimal strategies of evasion, are stated.