Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

5 • 2014

МАТЕМАТИКА

УДК 515.168.3

Д. В. Болотов

Топология слоений неотрицательной кривизны на пятимерных многообразиях II

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины Украины А. А. Борисенко)

Приведено полное доказательство того, что многообразие, гомеоморфное пятимерной сфере, не допускает слоения коразмерности один неотрицательной кривизны.

Напомним основной результат работы [1].

Теорема А. *Пусть M — замкнутое пятимерное риманово многообразие, гомеоморфное пятимерной сфере. Тогда M не допускает C^2-слоения коразмерности один неотрицательной секционной кривизны.*

В [1] был дан набросок доказательства данной теоремы. Доказательство существенно опиралось на теорему 1, приведенную ниже, и два следствия из нее, которые являются верными лишь в частном случае, описанном ниже. В данной работе мы покажем, что этого частного случая достаточно для доказательства теоремы А.

Напомним, что M можно представить в виде объединения $M = A \cup B$, где $A \cap B$ — объединение блоков, имеющих две компоненты связности границы, если такие блоки существуют, и $A \cap B$ — единственный компактный слой в противном случае. Тогда $C = M \setminus \operatorname{int} B$ и $D = M \setminus \operatorname{int} A$ — блоки с одной компонентой связности границы.

Теорема 1 [2]. *Если для некоторой группы G следующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{tikzcd}
& \pi_1(A) \arrow[dr, "\rho_1"] & \\
\pi_1(A \cap B) \arrow[ur, "\phi_1"] \arrow[rr, "\rho_3"] \arrow[dr, "\phi_2"'] & & G \\
& \pi_1(B) \arrow[ur, "\rho_2"'] &
\end{tikzcd}$$

то однозначно определен гомоморфизм $\sigma\colon \pi_1(M) \to G$ такой, что $\rho_i = \sigma \circ \psi_i$, $i = 1, 2, 3$, где ϕ_1, ϕ_2, а также $\psi_1\colon \pi_1(A) \to \pi_1(M)$, $\psi_2\colon \pi_1(B) \to \pi_1(M)$, $\psi_3\colon \pi_1(A \cap B) \to \pi_1(M)$ — гомоморфизмы, индуцированные включениями.

Замечание 1. Линейно связные подмножества A, B и $A \cap B$ в цитируемой теореме должны быть открытыми и линейно связными. Но это требование можно ослабить, потребовав, чтобы существовали открытые подмножества U_A, U_B и $U_{A\cap B}$, содержащие A, B и $A \cap B$ соответственно, для которых множества A, B и $A \cap B$ являются деформационными ретрактами. В нашем случае блоки A, B и $A \cap B$ удовлетворяют этому требованию. Достаточно к границам блоков A, B и $A \cap B$ добавить маленькие открытые воротники.

Замечание 2. В следствиях 1 и 2 теоремы 1, приведенных в [1], предполагается, что образы гомоморфизмов включения $\operatorname{Im}\phi_1$ и $\operatorname{Im}\phi_2$ есть нормальные подгруппы в $\pi_1(A)$ и $\pi_1(B)$ соответственно. Без этого предположения следствия неверны. Примером может служить разбиение сферы S^3 заузленным тором.

Приведем эти следствия вместе с доказательствами.

Следствие 1. *Если хотя бы один из гомоморфизмов ϕ_i не сюръективен и его образ является нормальной подгруппой, то $\pi_1(M)$ нетривиальна.*

Доказательство. Предположим, что ϕ_1 не сюрьективен. Тогда положим $G = \pi_1(A)/\mathrm{Im}\phi_1$ и $\rho_1\colon \pi_1(A) \to G$ — гомоморфизм факторизации. Положим $\rho_2 = \rho_3 = 0$. Так как $\rho_1 = \sigma \circ \psi_1$, то σ нетривиален, а значит, $\pi_1(M)$ нетривиальна.

Следствие 2. $\operatorname{Im}\phi_1$ *и* $\operatorname{Im}\phi_2$ *есть нормальные подгруппы в $\pi_1(A)$ и $\pi_1(B)$ соответственно. Пусть N — группа, порожденная* $\operatorname{Ker}\phi_1 \cup \operatorname{Ker}\phi_2$. *Если $N \neq \pi_1(A \cap B)$, то $\pi_1(M)$ нетривиальна.*

Доказательство. Предположим $\pi_1(M)$ тривиальна. Тогда ϕ_1 и ϕ_2 сюрьективны по предыдущему следствию. Положим $G = \pi_1(A \cap B)/N$, а ρ_i — отображения факторизации. Тогда имеем $\pi_1(A) \cong \pi_1(A \cap B)/\operatorname{Ker}\phi_1$, $\pi_1(B) \cong \pi_1(A \cap B)/\operatorname{Ker}\phi_2$, $G \cong \pi_1(A)/(N/\operatorname{Ker}\phi_1) \cong \pi_1(B)/(N/\operatorname{Ker}\phi_2)$. Из теоремы 1 теперь следует, что ψ_i нетривиальны, а значит, группа $\pi_1(M)$ нетривиальна.

Напомним основной результат работы [3] (см. также [4]).

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{F}$ трансверсально ориентируемое слоение коразмерности один неотрицательной кривизны Риччи на замкнутом ориентируемом римановом многообразии M. Тогда $\mathcal{F}$ является слоением почти без голономии и выполнена одна из следующих возможностей:*

1. Все слои всюду плотны и M является расслоением над S^1.

2. F содержит компактный слой и M можно разбить конечным числом компактных слоев на блоки [1] одного из следующих типов:

A) исключительный блок: B гомеоморфен $K \times I$, где K является компактным слоем слоения и слой $K \times 0$ является предельным для множества компактных слоев;

B) плотный блок: все внутренние слои диффеоморфны типичному слою L и плотны в B;

C) собственный блок: все внутренние слои диффеоморфны типичному некомпактному слою L и являются вложенными подмногообразиями в B. В этом случае $\mathrm{Int}B$ *является расслоением над S^1 со слоем L.*

[1] Блоком мы называем компактное слоеное многообразие с границей, состоящей из компактных слоев.

Если B — неисключительный блок, то $\widetilde{\mathrm{int}}\, B \cong \widetilde{L} \times \mathbb{R}$, а его фундаментальная группа описывается групповым расширением

$$1 \to \pi_1(L) \to \pi_1(B) \xrightarrow{\phi} \mathbb{Z}^k \to 0, \tag{1}$$

где L — типичный внутренний слой блока B. Более того, $k \geqslant 1$ и $k = 1$ тогда и только тогда, когда блок собственный. Если, более того, $\mathcal{F}$ — слоение неотрицательной секционной кривизны, то граница каждого блока имеет максимум две компоненты связности.

В [1] нами анонсировано следующее утверждение, полное доказательство которого приведено в [4].

Утверждение 1. *Если N является объединением конечного числа блоков, граница которых имеет две связные компоненты, то вложение $i\colon K \to N$ граничного слоя является гомотопической эквивалентностью.*

Докажем следующее утверждение.

Утверждение 2. *Пусть B — блок, не содержащий внутри компактных слоев, и $K \subset \partial B$ — граничный компактный слой. Тогда образ гомоморфизма $i_*\colon \pi_1(K) \to \pi_1(B)$, индуцированного вложением $i\colon K \to B$, является подгруппой индекса $\leqslant 2$, в частности, группа $i_*(\pi_1(K))$ нормальна в $\pi_1(B)$.*

Доказательство. Так как фундаментальная группа любого слоя содержит конечнопорожденную свободную абелеву подгруппу конечного индекса (см. [5]), а группа $\pi_1(B)$ имеет структуру расширения (1), то $\pi_1(B)$ есть виртуально полициклическая группа, т. е. группа, содержащая полициклическую подгруппу конечного индекса. По теореме Мальцева [6], всякая подгруппа такой группы является пересечением подгрупп конечного индекса. В частности, отсюда следует, что всякая бесконечная подгруппа виртуально полициклической группы содержится в подгруппе конечного индекса, большего 1. Если ∂B имеет две компоненты связности, то по утверждению 1 индуцированный вложением гомоморфизм $i_*\colon \pi_1(K) \to \pi_1(B)$ является изоморфизмом. Пусть ∂B имеет одну компоненту связности. Предположим, что гомоморфизм $i_*\colon \pi_1(K) \to \pi_1(B)$ не является эпиморфизмом. Тогда $i_*\pi_1(K)$ содержится в подгруппе G конечного индекса, большего 1. Покажем, что этот индекс равен 2. Нетрудно видеть, что число компонент границы конечнолистного накрытия, соответствующего подгруппе $G \subset \pi_1(B)$, должно быть больше 1, а значит, равно 2 по теореме 2. Так как вложение каждой компоненты границы накрытия в этом случае, как уже отмечалось, есть гомотопическая эквивалентность, то образ фундаментальной группы любой граничной компоненты, индуцированный накрытием, имеет один и тот же индекс, равный числу листов накрытия. Следовательно, ограничение отображения накрытия на любую связную компоненту границы является гомеоморфизмом, а образ гомоморфизма $i_*\colon \pi_1(K) \to \pi_1(B)$ должен иметь индекс 2, что и требовалось доказать.

Теперь доказательство теоремы А, приведенное в [1], является полностью обоснованным. Единственное, что стоит пояснить, это возможность применения гомоморфизма спектральных последовательностей в доказательстве случая 5 теоремы А. Но это следует из гомологической простоты расслоения $\xi\colon L \to \mathrm{int}\, C \xrightarrow{p} S^1$, которая, в свою очередь, следует из нетривиальности группы $H^3(C;\mathbb{R})$ (см. [1], случай 4 доказательства теоремы А).

Автор выражает благодарность проф. А. А. Борисенко за внимание к работе и полезные замечания.

1. *Болотов Д. В.* Топология слоений неотрицательной кривизны на пятимерных многообразиях // Доп. НАН України. – 2012. – № 12. – С. 7–12.

2. *Масси У., Столлингс Д.* Алгебраическая топология. Введение. – Москва: Мир, 1977. – 344 с.
3. *Болотов Д. В.* О структуре слоений коразмерности один неотрицательной кривизны // Тр. конф. “Актуальные проблемы современной математики, механики и информатики” ХНУ им. В. Н. Каразина. – Харьков: Апостроф, 2011. – С. 324–331.
4. *Болотов Д. В.* Топология слоений коразмерности 1 неотрицательной кривизны // Мат. сб. – 2013. – **204**, № 5. – С. 3–24.
5. *Cheeger J., Gromoll D.* On structure of complete manifolds of nonnegative curvature // Ann. Math. – 1972. – **96**. – P. 413–443.
6. *Мальцев А. И.* О гомоморфизмах на конечные группы // Уч. зап. Иванов. пед. ин-та. – 1958. – **18**. – P. 49–60.

Физико-технический институт низких температур
НАН Украины им. Б. И. Веркина, Харьков

Поступило в редакцию 22.10.2013

Д. В. Болотов

Топологія шарувань невід'ємної кривини на п'ятивимірних многовидах II

Наведено повне доведення того, що многовид, гомеоморфний п'ятивимірній сфері, не допускає шарування ковимірності один невід'ємної кривини.

D. V. Bolotov

Topology of nonnegative curvature foliations on five-dimensional manifolds II

We give a complete proof of that a closed manifold homeomorphic to a five-dimensional sphere does not admit a foliation of nonnegative curvature with codimension one.