УДК 517.9+531.19+530.145

В. І. Герасименко, Ю. Ю. Федчун

Кінетичні рівняння активної м'якої речовини

(Представлено членом-кореспондентом НАН України М. Л. Горбачуком)

Побудовано немарковське узагальнення кінетичного рівняння для системи взаємодіючих стохастичних марковських процесів, якими моделюється еволюція активної м'якої конденсованої речовини. Для таких систем обгрунтовано кінетичне рівняння в скейлінговій границі самоузгодженого поля і встановлено властивість поширення початкового хаосу активної м'якої речовини.

Одна з актуальних проблем сучасної математичної фізики і математичної біології полягає в строгому обгрунтуванні нелінійних кінетичних рівнянь для активної м'якої конденсованої речовини [1, 2], зокрема таких систем, як популяції клітин та бактерій, розчини клітин, наприклад крові, і т. п. В сучасних працях з теорії цих систем в основу опису покладено апріорі сформульовані еволюційні рівняння типу рівнянь суцільного середовища [1] або кінетичні рівняння [2, 3].

Відкритою залишається проблема математичного опису еволюції активної м'якої конденсованої речовини на мікроскопічному рівні [1]. В роботі [4] для моделювання колективної поведінки таких систем запропонована динамічна система багатьох взаємодіючих стохастичних процесів марковського типу. Така мікроскопічна модель динаміки дає можливість описати характерні властивості активної м'якої речовини, які відрізняються від статистичної поведінки звичайної речовини, що складається із взаємодіючих частинок, які рухаються за інерцією.

Як зазначено в роботі [5], еволюцію активної м'якої конденсованої речовини на мікроскопічному рівні природно описувати в термінах еволюції маргінальних спостережуваних. З цією метою в роботі [5] була побудована скейлінгова асимптотика (границя самоузгодженого поля) розв'язку задачі Коші для ієрархії еволюційних рівнянь для маргінальних спостережуваних і в такому наближенні встановлено зв'язок з описом еволюції в термінах кінетичних рівнянь.

Оскільки ряд типових нерівноважних властивостей активної м'якої конденсованої речовини обумовлений ефектами пам'яті еволюційних процесів у таких системах, метою роботи є обгрунтування кінетичного рівняння немарковського типу на основі ієрархії еволюційних рівнянь для маргінальних спостережуваних величин.

Розглянемо систему не фіксованої, але скінченної середньої кількості частинок (складових) N різних субпопуляцій, з яких складається активна речовина. Кожна i-та частинка характеризується змінними $\mathbf{u}_i = (j_i, u_i) \in \mathcal{J} \times \mathcal{U}$, де $j_i \in \mathcal{J} \equiv (1, \ldots, N)$ — номер субпопуляції частинки і $u_i \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^d$ — величини, якими описується її мікроскопічний стан [4].

Динаміка частинок, з яких складається активна речовина, описується півгрупою $e^{t\Lambda} = \oplus_{n=0}^{\infty} e^{t\Lambda_n}$ марковських стрибкоподібних процесів, визначеною на просторі C_γ послідовностей $b = (b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots)$ вимірних обмежених функцій $b_n(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$, які є симетричними відносно перестановки аргументів $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$, з нормою $\|b\|_{C_\gamma} = \max\limits_{n \geqslant 0} \dfrac{\gamma^n}{n!} \|b_n\|_{C_n}$, де $\gamma < 1$ —

параметр та $\|b_n\|_{C_n} = \max\limits_{j_1,\ldots,j_n} \max\limits_{u_1,\ldots,u_n} \big|b_n(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_n)\big|$. Інфінітезимальний генератор Λ_n півгрупи $e^{t\Lambda_n}$ визначено на підпросторі $C_n \subset C_\gamma$

$$(\Lambda_n b_n)(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_n) = \sum_{k=1}^{N} \varepsilon^{k-1} \sum_{i_1\neq\ldots\neq i_k=1}^{n} (\Lambda^{[k]}(i_1,\ldots,i_k)b_n)(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_n) \doteq$$
$$\doteq \sum_{k=1}^{N} \varepsilon^{k-1} \sum_{i_1\neq\ldots\neq i_k=1}^{n} a^{[k]}(\mathbf{u}_{i_1},\ldots,\mathbf{u}_{i_k}) \Bigg(\int\limits_{\mathcal{J}\times\mathcal{U}} A^{[k]}(\mathbf{v};\mathbf{u}_{i_1},\ldots,\mathbf{u}_{i_k}) \times$$
$$\times\, b_n(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_{i_1-1},\mathbf{v},\mathbf{u}_{i_1+1},\ldots,\mathbf{u}_n)d\mathbf{v} - b_n(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_n)\Bigg), \tag{1}$$

де $\varepsilon > 0$ — скейлінговий параметр та $\int\limits_{(\mathcal{J}\times\mathcal{U})^n} d\mathbf{u}_1\cdots d\mathbf{u}_n \equiv \sum_{j_1\in\mathcal{J}}\cdots\sum_{j_n\in\mathcal{J}} \int\limits_{\mathcal{U}^n} du_1\cdots du_n$. Функції $a^{[k]}(\mathbf{u}_{i_1},\ldots,\mathbf{u}_{i_k})$, $k \geqslant 1$, характеризують взаємодію між активними частинками, зокрема, у випадку $k = 1$ — взаємодію частинок з оточенням, і є вимірними позитивними обмеженими функціями, визначеними на $(\mathcal{J}\times\mathcal{U})^n$, такими, що $0 \leqslant a^{[k]}(\mathbf{u}_{i_1},\ldots,\mathbf{u}_{i_k}) \leqslant a_*^{[k]}$, де $a_*^{[k]}$ — деяка стала. Вимірні інтегровані позитивні функції $A^{[k]}(\mathbf{v};\mathbf{u}_{i_1},\ldots,\mathbf{u}_{i_k})$, $k \geqslant 1$, описують імовірність переходу i_1-ї активної частинки з мікроскопічного стану u_{i_1} в стан v в результаті взаємодії з активними частинками, які знаходяться в станах $u_{i_2},\ldots,u_{i_k}$. Функції $A^{[k]}(\mathbf{v};\mathbf{u}_{i_1},\ldots,\mathbf{u}_{i_k})$, $k \geqslant 1$, задовольняють такі умови: $\int\limits_{\mathcal{J}\times\mathcal{U}} A^{[k]}(\mathbf{v};\mathbf{u}_{i_1},\ldots,\mathbf{u}_{i_k})d\mathbf{v} = 1$, $k \geqslant 1$. У роботі [4] наведено приклади функцій $a^{[k]}$ і $A^{[k]}$, які мають відповідну інтерпретацію для систем математичної біології. У випадку $k = 1$ генератор (1) має таку структуру: $\sum\limits_{i_1=1}^{n} \Lambda_n^{[1]}(i_1)$, і він описує еволюцію невзаємодіючих складових (стохастичних процесів) системи. Випадок $k \geqslant 2$ відповідає системі стохастичних процесів з k-арною взаємодією. Такий тип взаємодії є характерним для біологічних систем у порівнянні з системами багатьох частинок кінетичної теорії, наприклад газів атомів з парним потенціалом взаємодії.

У просторі C_n однопараметрична сім'я відображень $e^{t\Lambda_n}$ є $*$-слабко неперервною півгрупою операторів.

Послідовність маргінальних спостережуваних $B(t) = (B_0, B_1(t,\mathbf{u}_1),\ldots,B_s(t,\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_s),\ldots)$ у довільний момент часу $t \geqslant 0$ визначається такими розкладами [6, 7]:

$$B_s(t,\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_s) = \sum_{n=0}^{s} \frac{1}{n!} \sum_{j_1\neq\cdots\neq j_n=1}^{s} \mathfrak{A}_{1+n}(t,\{Y\setminus Z\},Z) \times$$
$$\times\, B_{s-n}^{0,\varepsilon}(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_{j_1-1},\mathbf{u}_{j_1+1},\ldots,\mathbf{u}_{j_n-1},\mathbf{u}_{j_n+1},\ldots,\mathbf{u}_s), \qquad s \geqslant 1, \tag{2}$$

де $B(0) = (B_0, B_1^{0,\varepsilon}(\mathbf{u}_1),\ldots,B_s^{0,\varepsilon}(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_s),\ldots)$ — послідовність початкових маргінальних спостережуваних. Твірний оператор $\mathfrak{A}_{1+n}(t)$ розкладу (2) є кумулянтом $(1+n)$-го порядку півгруп операторів $\{e^{t\Lambda_k}\}_{t\geqslant 0}$, $k \geqslant 1$, який визначається формулою [7]

$$\mathfrak{A}_{1+n}(t,\{Y\setminus Z\},Z) \doteq \sum_{\mathrm{P}:\,(\{Y\setminus Z\},Z)=\bigcup_i Z_i} (-1)^{|\mathrm{P}|-1}(|\mathrm{P}|-1)! \prod_{Z_i\subset\mathrm{P}} e^{t\Lambda_{|\theta(Z_i)|}}, \tag{3}$$

де множини індексів позначено відповідними символами: $Y \equiv (1,\ldots,s)$, $Z \equiv (j_1,\ldots,j_n) \subset \subset Y$; множина $\{Y \setminus Z\}$ складається з одного елемента $Y \setminus Z = (1,\ldots,j_1-1,j_1+1,\ldots,j_n-1,j_n+1,\ldots,s)$; символ $\sum\limits_{\mathrm{P}}$ — сума за всіма можливими розбиттями P множини $(\{Y \setminus Z\}, Z)$ на $|\mathrm{P}|$ непорожніх підмножин $Z_i \in (\{Y \setminus Z\}, Z)$, які взаємно не перетинаються, та відображення $\theta(\cdot)$ є оператором декластеризації елементів множини: $\theta(\{Y \setminus Z\}, Z) = Y$.

Найпростіші приклади маргінальних спостережуваних (2) зображуються такими розкладами:

$$B_1(t,\mathbf{u}_1) = \mathfrak{A}_1(t,1)B_1^{0,\varepsilon}(\mathbf{u}_1),$$

$$B_2(t,\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_1) = \mathfrak{A}_1(t,\{1,2\})B_2^{0,\varepsilon}(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2) + \mathfrak{A}_2(t,1,2)(B_1^{0,\varepsilon}(\mathbf{u}_1) + B_1^{0,\varepsilon}(\mathbf{u}_2)),$$

де кумулянти першого і другого порядку (3) визначаються відповідно такими формулами:

$$\mathfrak{A}_1(t,\{1,2\}) = e^{t\Lambda_2},$$

$$\mathfrak{A}_2(t,1,2) = e^{t\Lambda_2} - e^{t\Lambda^{[1]}(1)}e^{t\Lambda^{[1]}(2)}.$$

Зауважимо, що послідовність функцій (2) є непертурбативним розв'язком задачі Коші для рекурсивних еволюційних рівнянь (дуальної ієрархії рівнянь Боголюбова–Борна–Гріна–Кірквуда–Івона), сформульованих у роботі [5].

Нехай $L^1(\mathcal{J} \times \mathcal{U})$ — простір інтегрованих функцій $f_1(\mathbf{u}_1)$, визначених на множині $\mathcal{J} \times \mathcal{U}$ з такою нормою: $\|f_1\|_{L^1(\mathcal{J}\times\mathcal{U})} = \sum\limits_{j_1\in\mathcal{J}} \int\limits_{\mathcal{U}} du_1 \big|f_1(\mathbf{u}_1)\big|$. Розглянемо стани системи статистично незалежних багатьох марковських процесів, тобто стани, які в початковий момент часу описуються послідовністю маргінальних функцій розподілу, що задовольняють умову хаосу [8]: $F^{(c)} = \big(1, F_1^{0,\varepsilon}(\mathbf{u}_1), \ldots, \prod\limits_{i=1}^{s} F_1^{0,\varepsilon}(\mathbf{u}_i), \ldots\big)$, де $F_1^{0,\varepsilon} \in L^1(\mathcal{J} \times \mathcal{U})$. У цьому випадку середні значення (математичні сподівання) маргінальних спостережуваних (2) визначаються за допомогою такого функціонала:

$$\langle B(t)\big|F^{(c)}\rangle = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \int\limits_{(\mathcal{J}\times\mathcal{U})^s} d\mathbf{u}_1 \cdots d\mathbf{u}_s B_s(t,\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_s) \prod_{i=1}^{s} F_1^{0,\varepsilon}(\mathbf{u}_i). \tag{4}$$

Оскільки для функцій (2) за умови $\gamma < e^{-1}$ справедлива оцінка $\|B(t)\|_{\mathcal{C}_\gamma} \leqslant e^2(1 - \gamma e)^{-1}\|B(0)\|_{\mathcal{C}_\gamma}$, функціонал (4) існує за умови, що $\|F_1^{0,\varepsilon}\|_{L^1(\mathcal{J}\times\mathcal{U})} < \gamma$.

Сформулюємо основний результат роботи. Для функціонала (4) справедливе зображення

$$\langle B(t)\big|F^c\rangle = \langle B(0)\big|F(t \mid F_1(t))\rangle, \tag{5}$$

де $F(t \mid F_1(t)) = (1, F_1(t), F_2(t \mid F_1(t)), \ldots, F_s(t \mid F_1(t)), \ldots)$ — послідовність маргінальних функціоналів стану, які є функціоналами відносно одночастинкової (маргінальної) функції розподілу

$$F_1(t,\mathbf{u}_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int\limits_{(\mathcal{J}\times\mathcal{U})^n} d\mathbf{u}_2 \cdots d\mathbf{u}_{n+1} \mathfrak{A}_{1+n}^{*}(t,1,\ldots,n+1) \prod_{i=1}^{n+1} F_1^{0,\varepsilon}(\mathbf{u}_i). \tag{6}$$

Твірний еволюційний оператор $\mathfrak{A}^*_{1+n}(t)$, $n \geqslant 0$, ряду (6) — кумулянт $(1+n)$-го порядку півгруп операторів $\{e^{t\Lambda^*{}_n}\}_{t\geqslant 0}$, $n \geqslant 1$, інфінітезимальний генератор $\Lambda^*{}_n$ яких є спряженим оператором до оператора (1) у сенсі функціонала (4), та в просторі $L^1((\mathcal{J} \times \mathcal{U})^n)$ він визначається за формулою

$$(\Lambda^*{}_n f_n)(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n) = \sum_{k=1}^{N} \varepsilon^{k-1} \sum_{i_1 \neq \ldots \neq i_k = 1}^{n} (\Lambda^{*[k]}(i_1, \ldots, i_k) b_n)(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n) \doteq$$

$$\doteq \sum_{k=1}^{N} \varepsilon^{k-1} \sum_{i_1 \neq \ldots \neq i_k = 1}^{n} \Bigg(\int\limits_{\mathcal{J} \times \mathcal{U}} A^{[k]}(\mathbf{u}_{i_1}; \mathbf{v}, \mathbf{u}_{i_2}, \ldots, \mathbf{u}_{i_k}) a^{[k]}(\mathbf{v}, \mathbf{u}_{i_2}, \ldots, \mathbf{u}_{i_k}) \times$$

$$\times f_n(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{i_1 - 1}, \mathbf{v}, \mathbf{u}_{i_1+1}, \ldots, \mathbf{u}_n) d\mathbf{v} - a^{[k]}(\mathbf{u}_{i_1}, \ldots, \mathbf{u}_{i_k}) f_n(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n) \Bigg), \quad (7)$$

де функції $A^{[k]}$ і $a^{[k]}$ визначено вище у формулі (1).

Інші елементи послідовності $F(t \mid F_1(t))$ визначаються розкладами в такі ряди:

$$F_s(t, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_s \mid F_1(t)) \doteq$$

$$\doteq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int\limits_{(\mathcal{J} \times \mathcal{U})^n} d\mathbf{u}_{s+1} \cdots d\mathbf{u}_{s+n} \mathfrak{V}_{1+n}(t, \{Y\}, X \setminus Y) \prod_{i=1}^{s+n} F_1(t, \mathbf{u}_i), \quad (8)$$

де твірні еволюційні оператори $\mathfrak{V}_{1+n}(t)$, $n \geqslant 0$, визначаються такими розкладами:

$$\mathfrak{V}_1(t, \{Y\}) = \widehat{\mathfrak{A}}_1(t, \{Y\}) \doteq e^{t\Lambda^*_s} \prod_{i=1}^{s} e^{-t\Lambda^{*[1]}(i)},$$

$$\mathfrak{V}_2(t, \{Y\}, s+1) = \widehat{\mathfrak{A}}_2(t, \{Y\}, s+1) - \widehat{\mathfrak{A}}_1(t, \{Y\}) \sum_{i_1=1}^{s} \widehat{\mathfrak{A}}_2(t, i_1, s+1),$$

$$\mathfrak{V}_3(t, \{Y\}, s{+}1, s{+}2) = \widehat{\mathfrak{A}}_3(t, \{Y\}, s{+}1, s{+}2) - 2!\widehat{\mathfrak{A}}_2(t, \{Y\}, s{+}1) \sum_{i_1=1}^{s+1} \widehat{\mathfrak{A}}_2(t, i_1, s{+}2) -$$

$$- \widehat{\mathfrak{A}}_1(t, \{Y\}) \Bigg(\sum_{i_1=1}^{s} \widehat{\mathfrak{A}}_3(t, i_1, s+1, s+2) - 2! \sum_{i_1=1}^{s} \sum_{i_2=1}^{s+1} \widehat{\mathfrak{A}}_2(t, i_1, s+1) \widehat{\mathfrak{A}}_2(t, i_2, s+2) +$$

$$+ 2! \sum_{1=i_1<i_2}^{s} \widehat{\mathfrak{A}}_2(t, i_1, s+1) \widehat{\mathfrak{A}}_2(t, i_2, s+2) \Bigg),$$

де оператори $\widehat{\mathfrak{A}}_n(t)$, $n \geqslant 1$, з наведених розкладів є кумулянтами відповідного порядку півгруп операторів розсіяння $\Big\{ e^{t\Lambda^*_k} \prod\limits_{i=1}^{k} e^{-t\Lambda^{*[1]}(i)} \Big\}_{t\geqslant 0}$, $k \geqslant 1$. Твірні еволюційні оператори довільного порядку $\mathfrak{V}_{1+n}(t)$, $n \geqslant 0$, визначаються розкладами, подібними до аналогічних розкладів твірних еволюційних операторів у випадку систем багатьох квантових частинок [9]. За умови $\|F_1(t)\|_{L^1(\mathcal{J} \times \mathcal{U})} < e^{-(3s+2)}$, для довільного $t \geqslant 0$ ряд (8) є збіжним за нормою простору $L^1((\mathcal{J} \times \mathcal{U})^s)$.

Зауважимо, що маргінальними функціоналами стану (8) описуються всі можливі кореляції, які виникають у процесі еволюції активної м'якої конденсованої речовини.

Для доведення основного результату встановимо справедливість рівності (5) у випадку спеціальних класів маргінальних спостережуваних.

Оскільки у випадку маргінальних спостережуваних $B^{(1)}(0) = (0, b_1^{\varepsilon}(\mathbf{u}_1), 0, \ldots)$, тобто маргінальних спостережуваних адитивного типу [7], розклад (2) набуває вигляду

$$B_s^{(1)}(t, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_s) = \mathfrak{A}_s(t, Y) \sum_{i=1}^{s} b_1^{\varepsilon}(\mathbf{u}_i), \qquad s \geqslant 1,$$

то для функціонала (4) справедливе таке зображення:

$$\langle B^{(1)}(t) \big| F^c \rangle = \langle B^{(1)}(0) \big| F(t \mid F_1(t)) \rangle = \int\limits_{(\mathcal{J} \times \mathcal{U})} d\mathbf{u}_1 b_1^{\varepsilon}(\mathbf{u}_1) F_1(t, \mathbf{u}_1),$$

де одночастинкова функція розподілу $F_1(t, \mathbf{u}_1)$ визначається розкладом у ряд (6).

Для маргінальних спостережуваних k-арного типу, тобто $B^{(k)}(0) = (0, \ldots, 0, b_k^{\varepsilon}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k), 0, \ldots)$, $k \geqslant 2$, справедлива така рівність:

$$\langle B^{(k)}(t) \big| F^c \rangle = \langle B^{(k)}(0) \big| F(t \mid F_1(t)) \rangle = \\ = \frac{1}{k!} \int\limits_{(\mathcal{J} \times \mathcal{U})^k} d\mathbf{u}_1 \cdots d\mathbf{u}_k b_k^{\varepsilon}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k) F_k(t, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k \mid F_1(t)),$$

де маргінальний функціонал стану $F_k(t \mid F_1(t))$ визначається розкладом у ряд (8).

Доведення цієї рівності грунтується на застосуванні кластерних розкладів кумулянтів півгруп операторів, які є двоїстими до кінетичних кластерних розкладів кумулянтів півгруп операторів, введених у роботі [9] у випадку квантових систем багатьох частинок.

У просторі $L^1(\mathcal{J} \times \mathcal{U})$ одночастинкова маргінальна функція розподілу (6) задовольняє таку задачу Коші для немарковського кінетичного рівняння:

$$\frac{\partial}{\partial t} F_1(t, \mathbf{u}_1) = \Lambda^{*[1]}(1) F_1(t, \mathbf{u}_1) + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\varepsilon^k}{k!} \int\limits_{(\mathcal{J} \times \mathcal{U})^k} d\mathbf{u}_2 \cdots d\mathbf{u}_{k+1} \times \\ \times \sum_{\substack{j_1 \neq \cdots \neq j_{k+1} \in \\ \in (1, \ldots, k+1)}} \Lambda^{*[k+1]}(j_1, \ldots, j_{k+1}) F_{k+1}(t, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{k+1} \mid F_1(t)), \tag{9}$$

$$F_1(t, \mathbf{u}_1)|_{t=0} = F_1^{0,\varepsilon}(\mathbf{u}_1), \tag{10}$$

де функціонали $F_{k+1}(t \mid F_1(t))$, $k \geqslant 1$, визначаються розкладами в ряд (8). У просторі $L^1(\mathcal{J} \times \mathcal{U})$ для абстрактної задачі Коші (9), (10) справедливе таке твердження.

Якщо $F_1^{0,\varepsilon} \in L^1(\mathcal{J} \times \mathcal{U})$, то за умови, що $\|F_1^{0,\varepsilon}\|_{L^1(\mathcal{J} \times \mathcal{U})} < C < +\infty$, існує єдиний глобальний сильний розв'язок задачі Коші для немарковського кінетичного рівняння (9), (10), який визначається розкладом у ряд (6).

Таким чином, якщо стан системи взаємодіючих стохастичних процесів, якими моделюється еволюція активної м'якої конденсованої речовини, в початковий момент часу визначається одночастинковою маргінальною функцією розподілу, то всі можливі стани системи в довільний момент часу можуть бути описані в термінах одночастинкової маргінальної функції розподілу, яка є роз'язком задачі Коші для немарковського кінетичного рівняння (9), (10).

За допомогою немарковського кінетичного рівняння (9) в скейлінгових границях можна обгрунтувати кінетичні рівняння марковського типу для активної м'якої речовини. Розглянемо асимптотичну поведінку розв'язку (6) задачі Коші для немарковського кінетичного рівняння (9), (10) в границі самоузгодженого поля для системи, яка складається з двох субпопуляцій, тобто випадок $N = 2$.

Нехай функція розподілу $f_1^0 \in L^1(\mathcal{J} \times \mathcal{U})$ — границя самоузгодженого поля початкових даних (10), тобто існує така границя:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|\varepsilon F_1^{\varepsilon,0} - f_1^0\|_{L^1(\mathcal{J}\times\mathcal{U})} = 0.$$

Тоді на скінченному проміжку часу $t \in (0, t_0)$ у такому ж сенсі існує границя самоузгодженого поля розв'язку (6) задачі Коші для немарковського кінетичного рівняння (9), (10)

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|\varepsilon F_1(t) - f_1(t)\|_{L^1(\mathcal{J}\times\mathcal{U})} = 0, \tag{11}$$

яка зображується розкладом у ряд

$$\begin{aligned} f_1(t, \mathbf{u}_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t dt_1 \cdots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \int_{(\mathcal{J}\times\mathcal{U})^n} d\mathbf{u}_2 \cdots d\mathbf{u}_{n+1} e^{(t-t_1)\Lambda^{*[1]}(1)} \Lambda^{*[2]}(1,2) \times \\ \times \prod_{j_1=1}^{2} e^{(t_1-t_2)\Lambda^{*[1]}(j_1)} \cdots \prod_{j_{n-1}=1}^{n} e^{(t_{n-1}-t_n)\Lambda^{*[1]}(j_{n-1})} \sum_{i_n=1}^{n} \Lambda^{*[2]}(i_n, 1+n) \times \\ \times \prod_{j_n=1}^{1+n} e^{t_n \Lambda^{*[1]}(j_n)} \prod_{i=1}^{1+n} f_1^0(\mathbf{u}_i). \end{aligned} \tag{12}$$

Якщо $f_1^0 \in L^1(\mathcal{J} \times \mathcal{U})$, то гранична функція розподілу (12) є сильним розв'язком задачі Коші для кінетичного рівняння самоузгодженого поля [5]:

$$\frac{\partial}{\partial t} f_1(t, \mathbf{u}_1) = \Lambda^{*[1]}(1) f_1(t, \mathbf{u}_1) + \int_{\mathcal{J}\times\mathcal{U}} d\mathbf{u}_2 \Lambda^{*[2]}(1,2) f_1(t, \mathbf{u}_1) f_1(t, \mathbf{u}_2), \tag{13}$$

$$f_1(t, \mathbf{u}_1)|_{t=0} = f_1^0(\mathbf{u}_1). \tag{14}$$

У випадку системи, яка складається з довільної кількості взаємодіючих субпопуляцій $N \geqslant$ $\geqslant 1$, кінетичне рівняння самоузгодженого поля має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f_1(t, \mathbf{u}_1) = \Lambda^{*[1]}(1) f_1(t, \mathbf{u}_1) + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k!} \times \\ \times \int_{(\mathcal{J}\times\mathcal{U})^k} d\mathbf{u}_2 \cdots d\mathbf{u}_{k+1} \sum_{j_1 \neq \cdots \neq j_{k+1} \in (1,\ldots,k+1)} \Lambda^{*[k+1]}(j_1, \ldots, j_{k+1}) \prod_{i=1}^{k+1} f_1(t, \mathbf{u}_i). \end{aligned} \tag{15}$$

Розглянемо в наближенні самоузгодженого поля поведінку нерівноважних кореляцій активної м'якої конденсованої речовини. Оскільки розв'язок (6) задачі Коші для немарковського кінетичного рівняння (9), (10) збігається до розв'язку (12) задачі Коші (13), (14) в сенсі (11), то для маргінальних функціоналів (8) маємо

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_{(\mathcal{J}\times\mathcal{U})^s} d\mathbf{u}_1\cdots d\mathbf{u}_s\Big|\varepsilon^s F_s(t,\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_s\mid F_1(t))-\prod_{j=1}^{s} f_1(t,\mathbf{u}_j)\Big|=0,$$

де гранична функція розподілу визначається розкладом у ряд (12). Це твердження інтерпретується як властивість поширення початкового хаосу в наближенні самоузгодженого поля, тобто в цьому наближенні складові активної м'якої речовини в процесі еволюції залишаються статистично незалежними.

Доведення сформульованого твердження грунтується на застосуванні відповідних формул для кумулянтів асимптотично збурених півгруп операторів розсіяння.

Таким чином, у роботі на основі непертурбативного розв'язку (2) рекурсивних еволюційних рівнянь для маргінальних спостережуваних системи багатьох взаємодіючих стохастичних процесів розвинуто метод виведення немарковського кінетичного рівняння (9), яким описуються колективні властивості активної м'якої речовини.

Одна з переваг такого підходу полягає в можливості побудови кінетичних рівнянь у скейлінгових границях у випадку початкових станів активної м'якої речовини в конденсованих станах, які характеризуються наявністю кореляцій [10]. Також зазначимо, що метод виведення кінетичного рівняння самоузгодженого поля (15) з немарковського кінетичного рівняння (9) дає можливість будувати поправки за малим параметром до інтеграла зіткнень кінетичного рівняння (15), що може бути суттєвим для опису нерівноважних властивостей систем математичної біології.

Робота частково підтримана проектом "Mathematics for Life Sciences", FP7-People-2011-IRSES No. 295164.

1. *Marchetti M. C., Joanny J. F., Ramaswamy S. et al.* Hydrodynamics of soft active matter // Rev. Mod. Phys. – 2013. – **85**. – P. 1143–1195.
2. *Bellouquid A., Delitala M.* Mathematical modeling of complex biological systems: a kinetic theory approach. – Boston: Birkhäuser, 2006. – 195 p.
3. *Lachowicz M.* Links between microscopic and macroscopic descriptions // Multiscale Problems in the Life Sciences. From Microscopic to Macroscopic. – Berlin: Springer, 2008. – P. 201–215.
4. *Lachowicz M.* Individually-based Markov processes modeling nonlinear systems in mathematical biology // Nonlinear Analysis: Real World Applications – 2011. – **12**. – P. 2396–2408.
5. *Gerasimenko V. I., Fedchun Yu. Yu.* On kinetic models for the evolution of many-entity systems in mathematical biology // J. Coupled Syst. Multiscale Dyn. – 2013. – **1**, No 2. – P. 273–279.
6. *Gerasimenko V. I., Fedchun Yu. Yu.* Nonperturbative solution expansions of hierarchies of evolution equations in functional derivatives // Proc. Inst. Math. NASU. – 2012. – **9**, No 2. – P. 347–375.
7. *Borgioli G., Gerasimenko V. I.* Initial-value problem of the quantum dual BBGKY hierarchy // Nuovo Cimento C. – 2010. – **33**, No 1. – P. 71–78.
8. *Cercignani C., Gerasimenko V. I., Petrina D. Ya.* Many-particle dynamics and kinetic equations. – Dordrecht: Kluwer, 1997. – 252 p.
9. *Gerasimenko V. I., Tsvir Zh. A.* A description of the evolution of quantum states by means of the kinetic equation // J. Phys. A: Math. Theor. – 2010. – **43**, No 48. – 485203.
10. *Gerasimenko V. I., Tsvir Zh. A.* On quantum kinetic equations of many-particle systems in condensed states // Physica A: Stat. Mech. Appl. – 2012. – **391**, No 24. – P. 6362–6366.

Інститут математики НАН України, Київ
Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 19.12.2013

В. И. Герасименко, Ю. Ю. Федчун

Кинетические уравнения активного мягкого вещества

Построено немарковское обобщение кинетического уравнения для системы взаимодействующих стохастических марковских процессов, которыми моделируется эволюция активного мягкого конденсированного вещества. Для таких систем обосновано кинетическое уравнение в скейлинговом пределе самосогласованного поля и установлено свойство распространения начального хаоса активного мягкого вещества.

V. I. Gerasimenko, Yu. Yu. Fedchun

Kinetic equations of soft active matter

We construct a non-Markovian generalization of the kinetic equation for a system of interacting stochastic Markovian processes modeling the evolution of soft active matter. For such systems, we substantiate the kinetic equation in the mean field scaling limit and establish the property of the initial chaos to propagate in soft active matter.