ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

6 • 2014

ТЕПЛОФІЗИКА

УДК 517.958:536.24

В. В. Панин, Ф. А. Кривошей, Ю. А. Богдан

Стохастическая регуляризация некорректных задач теплопереноса

(Представлено академиком НАН Украины А. А. Халатовым)

Стохастическая аппроксимация параболического уравнения теплопроводности и последующее его осреднение по реализациям случайных параметров приводит к уравнению гиперболического типа для средних значений функций переноса. На основе этого уравнения постановки обратных задач восстановления краевых условий корректны.

Обширный класс некорректных задач математической физики составляют обратные задачи (ОЗ), возникающие при обработке и интерпретации результатов экспериментов [1]. При постановке обратных задач теплопереноса искомыми являются физические свойства веществ (теплопроводность, удельная теплоемкость) и краевые условия. Характерной особенностью ОЗ является, как известно, неустойчивость их решений по отношению к ошибкам экспериментальных данных. Физическим эквивалентом этой особенности является значительная неопределенность искомых решений и вытекающая из нее проблема различимости и выделения "физических" решений. Оказалось, что возможность чисто детерминированными средствами исключить или, по меньшей мере, существенно сократить неопределенность решений ограничена [2]. Стремление преодолеть "информационную ограниченность", присущую чисто детерминированным постановкам и методам решения ОЗ теплопереноса, привело к развитию направления и методов, базирующихся на более глубоких представлениях о вероятностной природе модели теплопереноса, результатов измерений и искомых решений. Представителями стохастического направления в решении некорректных задач являются, в частности, методы статической регуляризации [2] и динамической фильтрации [3], базирующиеся на развитии идеи фильтра Калмана [4]. Однако эти методы можно отнести к стохастическим лишь в узком смысле этого понятия, поскольку они базируются на детерминированных моделях. В силу стохастичности эксперимента очевидно, что все без исключения параметры модели — как физические свойства, температура, так и пространственно-временные (координаты, время) по сути случайны. Если учесть, что измеряемые значения функции и независимые переменные являются реализациями некоторых случайных процессов, то стохастический подход к решению ОЗ в такой расширенной интерпретации модели представляется адекватным. Стохастическая аппроксимация уравнения теплопереноса базируется на явлении случайных флуктаций характеризующих его параметров. Известно, что малые отклонения (флуктации) результатов решения прямой задачи (экспериментальных данных) могут приводить к большим отклонениям искомых решений ОЗ. Именно на факте существенного влияния малых возмущений основана суть подхода: используя случайные флуктации параметров уравнения теплопереноса, построить метод решения некорректных ОЗ, подавляющий их неустойчивость.

Получим уравнение теплопереноса для осредненных значений случайных функций температуры. Для иллюстрации метода рассмотрим одномерное исходное уравнение теплопроводности

$$c(x,t)\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(x,t)\frac{\partial T}{\partial x}\right) = 0, \tag{1}$$

$$T(0,x) = T_H, \tag{2}$$

$$\Gamma(T,t) = m_1(t)T'_X + m_2(t)T, \tag{3}$$

где T, c, λ — соответственно температура, удельная теплоемкость и теплопроводность. Варьируя в граничных условиях коэффициенты m_1, m_2, получаем условие Дирихле ($m_1 = 0, m_2 > 0$), Неймана ($m_1 > 0, m_2 = 0$) или смешанные условия ($m_1, m_2 > 0$). По известным (измеренным) пространственно-временным фрагментам поля $T(x,t)$ требуется восстановить некоторые из следующих функций: c, λ, краевые условия (2), (3). Доказательства существования и единственности пары функций c, λ приведены в [5], краевых условий — в [6]. Вследствие стохастичности эксперимента случайной величиной или функцией (процессом) могут быть все параметры, входящие в уравнение (1): случайные величины координат x, времени t, случайные поля (или процессы) c, λ, T.

Представим стохастические параметры в виде суммы осредненного и случайного (флуктирующего) слагаемых: $\langle T\rangle + \delta T$, $\langle c\rangle + \delta c$, $\langle\lambda\rangle + \delta(\lambda)$, $\langle X\rangle + \delta x$, $\langle t\rangle + \delta t$. Последние два можно интерпретировать как случайные ошибки измерений координат или времени. Следовательно, экспериментальное поле $T(x,t)$можно рассматривать как случайное, испытывающее воздействие всех параметров. При постановке конкретной ОЗ ситуация иная, здесь выбор стохастического параметра обусловлен постановкой задачи и зависит от искомой функции. В этой ситуации случайная функция T интерпретируется как результат воздействия на детерминированную функцию одной или двух случайных величин. Остальные параметры считаются детерминированными ("замороженными"). Для пространственно-временного распределения флуктаций δT хорошим приближением можно полагать гауссовское распределение. Такое приближение широко используется при исследовании турбулентных течений и двухфазных потоков [7, 8]. Если система подверглась некоторому числу случайных независимых воздействий, то допустимо описать ее состояние в терминах средних значений за времена, бóльшие времени "единичного толчка". Такая физическая ситуация может быть описана в приближении дельта-коррелированного процесса [9].

Пусть в уравнении (1) c, λ — случайные δ-коррелированные поля со средними значениями $\langle c\rangle$, $\langle\lambda\rangle$ и корреляционными функциями

$$\langle\delta c(x_1,t_1)\delta c(x_2,t_2)\rangle = B_1(x,t)\delta(x_1 - x_2)\delta(t_1 - t_2), \tag{4}$$

$$\langle\delta\lambda(x_1,t_1)\delta\lambda(x_2,t_2)\rangle = B_2(x,t)\delta(x_1 - x_2)\delta(t_1 - t_2). \tag{5}$$

Осредним уравнение (1) по реализации случайных полей c, λ, имея в виду, что $c = \langle c\rangle + \delta c$, $\lambda = \langle\lambda\rangle + \delta(\lambda)$, $T = \langle T\rangle + \delta T$

$$\langle c(x,t)\rangle \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} + \left\langle \delta c(x,t)\frac{\partial}{\partial t}\delta T(x,t)\right\rangle - \frac{\partial}{\partial x}\langle\lambda(x,t)\rangle\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} - \\ - \frac{\partial}{\partial x}\left\langle \delta\lambda(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\delta T(x,t)\right\rangle = 0. \qquad (6)$$

Задача нахождения замкнутого уравнения для средних значений $\langle T\rangle$ стохастически не линейна, так как в осредненном уравнении (6) появляются члены типа $\langle\delta c(\partial\delta T/\partial t)\rangle$, $\langle\delta\lambda(\partial\delta T/\partial x)\rangle$. Для расщепления этих корреляций воспользуемся формулой Фурутцу–Новикова [10], которая для гауссовских полей в терминах нелинейностей уравнения (6) принимает вид

$$\left\langle \delta c(x,t)\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}\right\rangle = \int d(x,t)'\left\langle \delta c(x,t)\delta(c)(x,t)'\left\langle \frac{\delta}{\delta[\delta c(x,t)']}\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}\right\rangle\right., \qquad (7)$$

$$\left\langle \delta\lambda(x,t)\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right\rangle = \int d(x,t)'\left\langle \delta\lambda(x,t)\delta\lambda(x,t)'\left\langle \frac{\delta}{\delta[\delta\lambda(x,t)']}\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right\rangle\right.. \qquad (8)$$

Таким образом, задача расщепления сводится к вычислению функциональных производных

$$\left\langle \frac{\delta}{\delta[\delta c(x,t)']}\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}\right\rangle = \frac{\partial}{\partial t}\left\langle \frac{\delta T(x,t)}{\delta[\delta c(x,t)']}\right\rangle, \qquad (9)$$

$$\left\langle \frac{\delta}{\delta[\delta\lambda(x,t)']}\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right\rangle = \frac{\partial}{\partial x}\left\langle \frac{\delta T(x,t)}{\delta[\delta\lambda(x,t)']}\right\rangle. \qquad (10)$$

С учетом (4), (5) выражения (7), (8) принимают вид

$$\left\langle \delta c(x,t)\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}\right. = B_1(x,t)\frac{\partial}{\partial t}\left\langle \frac{\delta T(x,t)}{\delta[\delta c(x,t)']}\right\rangle, \qquad (11)$$

$$\left\langle \delta\lambda(x,t)\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right. = B_2(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\left\langle \frac{\delta T(x,t)}{\delta[\delta\lambda(x,t)']}\right\rangle. \qquad (12)$$

Используя для вычисления производных (9), (10) уравнение (1) и условие причинности

$$\frac{\delta T(x,t)}{\delta[\delta c(x,t)]} = 0$$

при $t' < \tau$ получаем

$$\frac{\delta T(x,t)}{\delta[\delta c(x,t,\tau)]} = \int_\tau^t \Big[\langle c(x,t)'\rangle^{-1}\nabla\langle\lambda(x,t)'\rangle\nabla T(x,t)' + \langle c(x,t)'\rangle^{-1}\nabla\delta\lambda(x,t)'\nabla T(x,t)' - \\ - \langle c(x,t)'\rangle^{-1}\delta c(x,t)'\frac{\partial T(x,t)'}{\partial t'}\Big]\frac{\delta T(x,t)'}{\delta[\delta c(x,\tau)]}dt' - \\ - \int_0^t \langle c(x,t)'\rangle^{-1}\frac{\partial T(x,t)'}{\partial t'}\frac{\delta[\delta c(x,t)']}{\delta[\delta c(x,\tau)]}dt' \qquad (13)$$

Имея в виду определение функциональной производной $\delta[\delta c(x,t)]/\delta[\delta c(x,\tau)] = \delta(t' - \tau)$ и полагая в (13) $\tau = t$, получаем

$$\frac{\delta T(x,t)}{\delta[\delta c(x,t)]} = \langle c(x,t)\rangle^{-1}\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}. \tag{14}$$

Полагая $\delta\lambda = 0$ и учитывая (11), (14) окончательно получаем

$$\left\langle \delta c(x,t)\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}\right\rangle = B_1(x,t)\frac{\partial}{\partial t}\langle c(x,t)\rangle^{-1}\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}. \tag{15}$$

После подстановки выражения (15) в уравнение (6) при $\delta\lambda = 0$ последнее приобретает замкнутый вид уравнения гиперболического типа

$$\left[\langle c\rangle\frac{\partial}{\partial t} + B_1(x,t)\frac{\partial}{\partial t}\left(\langle c\rangle\frac{\partial}{\partial t} - \lambda\Delta\right)\right]\langle T\rangle = 0. \tag{16}$$

Аналогично, полагая $\delta c = 0$ и вычислив производную $\delta T/\delta(\delta\lambda)$ из (6), получаем уравнение для средних значений $\langle T\rangle$

$$\left[c\frac{\partial}{\partial t} - \langle\lambda\rangle\Delta - B_2(x,t)\Delta^2\right]\langle T\rangle = 0. \tag{17}$$

Если флуктации δc, $\delta\lambda$ описываются гоуссовским δ-коррелированным процессом, то $B_1 = \sigma_c^2$, $B_2 = \sigma_\lambda^2$, т.е. в уравнениях (16), (17) в качестве малых параметров появляются статистические характеристики коэффициентов c, λ — их дисперсии. Таким образом ОЗ формулируется как задача восстановления среднего удельного теплового потока на границе или среднего начального распределения температур по средним значениям поля $\langle T\rangle$. В частности, уравнение (16) приводит к корректной постановке граничной ОЗ Неймана для теплопроводности в виде интегрального уравнения Вольтерра II рода для средней плотности теплового потока $\langle q\rangle$

$$\alpha\langle q\rangle - \int\limits_0^t \langle q\rangle dt' = c\int\limits_0^x \langle T\rangle\, dx', \tag{18}$$

где $\alpha = \sigma_c^2/\langle c\rangle^2$. Это уравнение формально эквивалентно уравнению в методе Лаврентьева [11]. Аналогично, уравнение (17), на основе которого задача восстановления среднего начального распределения $\langle T_H\rangle$ оказывается корректной, формально идентично уравнению в методе квазиобращения [12]. Однако, в отличие от [11, 12], где возникает проблема выбора малых параметров регуляризации, уравнения (16), (17), (18) содержат вполне определенные параметры регуляризации — статистические характеристики коэффициентов c, λ.

1. *Тихонов А. Н.* О некорректно поставленных задачах // Вычислительные методы и программирование. – Москва: Изд-во Моск. ун-та, 1967. – С. 3–33.
2. *Турчин В. Ф., Козлов В. П., Малкевич М. С.* Использование методов математической статистики для решения некорректных задач // Усп. физ. наук. – 1970. – **102**, № 3. – С. 345–386.
3. *Мацевитый Ю. М., Лушпенко С. Ф.* Идентификация теплофизических свойств твердых тел. – Киев: Наук. думка, 1990. – 216 с.
4. *Калман Р., Бьюси Р.* Новые результаты в линейной фильтрации и теории предсказания // Тр. америк. об-ва инж.-мех. Сер. Д. – 1961. – **83**, № 1. – С. 123–141.

5. *Клибанов М. В.* Об одном классе обратных задач для нелинейных параболических уравнений // Докл. АН СССР. – 1985. – **280**, № 3. – С. 533–536.
6. *Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. – Москва: Наука, 1980. – 288 с.
7. *Деревич И. В., Зайчик Л. И.* Уравнение для плотности вероятности скорости и температуры частиц в турбулентном потоке, моделируемом гауссовым случайным полем // Прикл. мех. и мат. – 1990. – **4**, № 5. – С. 767–774.
8. *Кривошей Ф. А.* Стохастическая модель нестационарного потока двухфазной среды // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1993. – **33**, № 7. – С. 1103–1109.
9. *Кляцкин В. И.* Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. – Москва: Наука, 1980. – 335 с.
10. *Новиков Е. А.* Функционалы и метод случайных полей в теории турбулентности // Журн. эксперим. и теорет. физики. – 1964. – **47**, № 6. – С. 1919–1926.
11. *Лаврентьев М. М.* О некорректных задачах математической физики. – Москва: Изд-во АН СССР, 1962. – 250 с.
12. *Латтес Р., Лионс Ж. Л.* Метод квазиобращения и его применения. – Москва: Мир, 1970. – 336 с.

Киевская государственная академия водного транспорта им. гетмана Петра Конашевича-Сагайдачного

Поступило в редакцию 25.02.2014

В. В. Панін, Ф. О. Кривошей, Ю. О. Богдан

Стохастична регуляризація некоректних задач теплопереносу

Стохастична апроксимація параболічного рівняння теплопровідності та наступне його осереднення за реалізаціями випадкових параметрів приводить до рівняння гіперболічного типу для середніх значень функцій переносу. На основі цього рівняння постановки обернених задач відновлення крайових умов коректні.

V. V. Panin, F. A. Krivoshey, Yu. A. Bogdan

Stochastic regularization of ill-posed problems of heat transfer

The stochastic approximation of the parabolic equation of heat conduction and its subsequent averaging over realizations of random parameters leads to an equation of the hyperbolic type for the average values of transfer functions. On a basis of this equation, the statements of inverse problems concerning the restoration of boundary conditions are well-posed.