УДК 517.5

В. В. Волчков, Вит. В. Волчков

Переопределенные интерполяционные задачи для целых функций экспоненциального типа

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В. П. Моторным)

Получены критерии существования целых функций экспоненциального типа не выше ς, принимающих заданные значения в точках заданной последовательности с плотностью, большей ς.

Классическая задача интерполяции состоит в отыскании функции данного класса, принимающей в заданных точках — узлах интерполяции — заданные значения. В теории целых функций значительное число работ посвящено различным обобщениям интерполяционной задачи вида

$$f(z_k) = c_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

где f — целая функция с ограничениями на рост, $\{z_k\}$ — все нули (или часть нулей) некоторой целой функции φ (см. [1]). Класс функций, в котором ищется решение задачи, задается, как правило, неравенством

$$|f(z)| \leqslant Ae^{Bp(z)},$$

в котором A и B — положительные постоянные, зависящие от функции f, p — неотрицательная субгармоническая функция, обладающая свойствами:

1) $\ln(1 + |z|) = O(p(z))$;

2) если $|\zeta - z| \leqslant 1$, то $p(\zeta) \leqslant Cp(z) + D$ с постоянными C и D, не зависящими от ζ и z.

Основным средством исследования задачи (1) и ее аналогов являются интерполяционные ряды и метод $\overline{\partial}$-проблемы, основанный на результатах Л. Хермандера [1–3].

Особый интерес представляет интерполяция целыми функциями экспоненциального типа. Ряд известных результатов в этом направлении принадлежит А. О. Гельфонду, В. А. Котельникову, Б. Я. Левину, Картрайт, Боасу и др. (см. [1, 2]). В частности, класс всех целых функций экспоненциального типа, меньшего π, является классом единственности для интерполяционной задачи

$$f(k) = c_k, \qquad k = 1, 2, \ldots. \tag{2}$$

Условия разрешимости задачи (2) для этого класса изучались Ло, Вигертом, Фабером, Карлсоном, Полиа, Дюфренуа, Пизо и др. (см., например, [4 гл. 2], [5, §§ 1.1.3, 7.7.2, 7.7.3]). Результаты, полученные этими авторами, показывают, что разрешимость задачи (2) в данном случае эквивалентна возможности аналитического продолжения суммы степенного ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k z^k$ в дополнение некоторого компакта.

В настоящей работе получены критерии существования четной целой функции экспоненциального типа не выше ς, растущей не быстрее многочлена на вещественной оси и принимающей заданные значения в точках заданной последовательности плотности, большей ς. Такие интерполяционные задачи естественно называть переопределенными. В качестве узлов интерполяции выбираются нули бесселевых и гипергеометрических функций. Отметим, что указанные вопросы тесно связаны с некоторыми аспектами периодических в среднем функций на евклидовых и двухточечно-однородных пространствах (см. [6, ч. 2, гл. 3]).

Перейдем к формулировкам основных результатов. Обозначим Z_ς — множество всех четных целых функций $w\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, удовлетворяющих оценке

$$|w(\lambda)| \leqslant \gamma(1+|\lambda|)^m e^{\varsigma|\mathrm{Im}\lambda|}, \qquad \lambda \in \mathbb{C}$$

для некоторых констант $\gamma > 0$, $m \in \mathbb{Z}$, $\varsigma \geqslant 0$.

Теорема 1. *Пусть $\tau > \varsigma \geqslant 0$ и $\{\nu_l\}_{l=1}^{\infty}$ — последовательность всех положительных нулей функции Бесселя $J_{n/2}(\tau z)$, $n \in \{0,1,2,\ldots\}$. Пусть также $\{\mu_l\}_{l=1}^{\infty}$ — последовательность комплексных чисел. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) Существует $w \in Z_\varsigma$ такая, что $w(\nu_l) = \mu_l$ для всех l.

(ii) Ряды

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\nu_l^{n/2+2}\mu_l}{J_{n/2+1}^2(\nu_l\tau)} J_{n/2}(\nu_l t) \qquad \text{и} \qquad \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\nu_l\mu_l}{J_{n/2+1}(\nu_l\tau)} |t|^{n/2+1} J_{n/2}(\nu_l|t|)$$

сходятся к нулю на интервалах $(\varsigma, 2\tau-\varsigma)$ и $(\varsigma-\tau, \tau-\varsigma)$ в пространствах распределений $\mathcal{D}'(\varsigma, 2\tau-\varsigma)$ и $\mathcal{D}'(\varsigma-\tau, \tau-\varsigma)$ соответственно.

Полагая в теореме 1 $n = 1$, $\tau = \pi$ и учитывая, что в этом случае последовательность $\{\nu_l\}_{l=1}^{\infty}$ совпадает с натуральным рядом, получаем следующий критерий разрешимости задачи (2) для класса Z_ς.

Следствие 1. *Пусть $0 \leqslant \varsigma < \pi$ и $\{\mu_l\}_{l=1}^{\infty}$ — последовательность комплексных чисел. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) Существует $w \in Z_\varsigma$ такая, что $w(l) = \mu_l$ для любого $l = 1, 2, \ldots$.

(ii) Ряды

$$\sum_{l=1}^{\infty} l^3 \mu_l \sin(lt) \qquad \text{и} \qquad \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l l \mu_l t \sin(lt)$$

сходятся к нулю на интервалах $(\varsigma, 2\pi-\varsigma)$ и $(\varsigma-\pi, \pi-\varsigma)$ в пространствах распределений $\mathcal{D}'(\varsigma, 2\pi-\varsigma)$ и $\mathcal{D}'(\varsigma-\pi, \pi-\varsigma)$ соответственно.

Перейдем к аналогу теоремы 1 для нулей гипергеометрических функций. Положим

$$\varphi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(r) = F\left(\frac{\alpha+\beta+1+i\lambda}{2}, \frac{\alpha+\beta+1-i\lambda}{2}; \alpha+1; -\operatorname{sh}^2 r\right), \tag{3}$$

где F — гипергеометрическая функция Гаусса. Обозначение $\varphi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(r)$ в (3) объясняется тем, что при определенных значениях α и β эти функции совпадают с зональными сферическими функциями римановых симметрических пространств ранга один отрицательной кривизны, для которых используется это обозначение (см. [7, гл. 4]).

Свойства нулей λ функции $\varphi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(r)$ сходны со свойствами нулей бесселевых функций и описаны в следующем утверждении [8 гл. 7].

Предложение 1. *Для фиксированных* $\alpha \geqslant 0$, $-1/2 \leqslant \beta \leqslant \alpha$, $r > 0$ *справедливы следующие утверждения.*

(i) Функция $\varphi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(r)$ *имеет бесконечно много нулей. Все нули* $\varphi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(r)$ *являются вещественными, простыми и расположены симметрично относительно точки* $\lambda = 0$. *Кроме того,* $\varphi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(r) > 0$ *при* $i\lambda \in \mathbb{R}^1$.

(ii) Пусть $\lambda_l = \lambda_l(\alpha,\beta,r)$, $l = 1,2,\ldots,$ *— последовательность всех положительных нулей* $\varphi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(r)$, *занумерованная в порядке возрастания, и предположим* $0 < r_1 \leqslant r \leqslant r_2$. *Тогда*

$$r\lambda_l = \pi\left(\frac{2\alpha+3}{4} + l + q(r,\alpha,\beta)\right) + \frac{(1/4-\alpha^2)(\operatorname{ch} r)^2 + (1/4-\beta^2)(\operatorname{sh} r)^2}{\lambda_l \operatorname{sh} 2r} + O\left(\frac{1}{\lambda_l^3}\right),$$

где $q(r,\alpha,\beta) \in \mathbb{Z}$ *не зависит от* l *и постоянная в знаке* O *зависит только от* α, β, r_1, r_2.

Обозначим через Π множество пар вида $(n/2-1, n/2-1)$, $(n-1,0)$, $(2n-1,1)$, $(7,3)$, где $n = 2,3,\ldots$

Теорема 2. *Пусть* $(\alpha,\beta) \in \Pi$, $\tau > \varsigma \geqslant 0$, $\{\nu_l\}_{l=1}^\infty$ *— последовательность всех положительных нулей* λ *функции* $\varphi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(\tau)$ *и* $\{\mu_l\}_{l=1}^\infty$ *— последовательность комплексных чисел. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) Существует $w \in Z_\varsigma$ *такая, что* $w(\nu_l) = \mu_l$ *для всех* l.

(ii) Ряды

$$\sum_{l=1}^{\infty} \nu_l\mu_l \left(\left(\frac{d}{d\lambda}\varphi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(\tau)\right)\bigg|_{\lambda=\nu_l} \varphi_{\nu_l}^{(\alpha+1,\beta+1)}(\tau)\right)^{-1} \varphi_{\nu_l}^{(\alpha,\beta)}(t)$$

и

$$\sum_{l=1}^{\infty} \nu_l\mu_l \left(\left(\frac{d}{d\lambda}\varphi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(\tau)\right)\bigg|_{\lambda=\nu_l}\right)^{-1} \varphi_{\nu_l}^{(\alpha,\beta)}(t)|t|^{1+2\alpha}$$

сходятся к нулю на интервалах $(\varsigma, 2\tau-\varsigma)$ *и* $(\varsigma-\tau, \tau-\varsigma)$ *в пространствах распределений* $\mathcal{D}'(\varsigma, 2\tau-\varsigma)$ *и* $\mathcal{D}'(\varsigma-\tau, \tau-\varsigma)$ *соответственно.*

Стандартные рассуждения, связанные с применением принципа Фрагмена–Линделефа, показывают, что функция w в теоремах 1, 2 определяется однозначно. Отметим также, что из сходимости рядов в утверждении (ii) этих теорем следует оценка $\mu_l = O(l^\gamma)$ для некоторого $\gamma > 0$ (см. [9, ч. 3, доказательство леммы 2.7]).

1. *Гольдберг А. А., Левин Б. Я., Островский И. В.* Целые и мероморфные функции. – Москва: ВИНИТИ, 1991. – С. 5–185. – (Итоги науки и техн. Соврем. пробл. матем. Фундамент. направления; Т. 85).
2. *Гельфонд А. О.* Исчисление конечных разностей. – Москва: Наука, 1967. – 376 с.
3. *Хермандер Л.* Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. – Москва: Мир, 1968. – 279 с.
4. *Маркушевич А. И.* Избранные главы теории аналитических функций. – Москва: Наука, 1976. – 191 с.
5. *Бибербах Л.* Аналитическое продолжение. – Москва: Наука, 1967. – 240 с.
6. *Volchkov V. V., Volchkov Vit. V.* Offbeat integral geometry on symmetric spaces. – Heidelberg: Springer, 2013. – 592 p.
7. *Хелгасон С.* Группы и геометрический анализ. – Москва: Мир, 1987. – 735 с.

8. *Volchkov V. V., Volchkov Vit. V.* Harmonic analysis of mean periodic functions on symmetric spaces and the Heisenberg group. – London: Springer, 2009. – 674 p.
9. *Volchkov V. V.* Integral geometry and convolution equations. – Dordrecht: Kluwer, 2003. – 454 p.

Донецкий национальный университет *Поступило в редакцию 04.12.2013*

В. В. Волчков, Віт. В. Волчков

Перевизначені інтерполяційні задачі для цілих функцій експоненціального типу

Отримано критерії існування цілих функцій експоненціального типу не вище ς, що набувають заданих значень у точках заданої послідовності із щільністю, більшою ніж ς.

V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov

Overdetermined interpolation problems for entire functions of the exponential type

Criteria for the existence of entire functions of the exponential type of at most ς which take the given values at the points from the given sequence of numbers with a density of more than ς are obtained.