

Н. В. Никитина

## О существовании гомоклинической траектории с симметрией в трехмерных системах

(Представлено академиком НАН Украины А. А. Мартынюком)

Приводятся условия существования гомоклинической траектории в системе, заданной в трехмерном пространстве. Рассмотрена диссипативная система с симметрией.

Работа нацелена на классификацию трехмерных систем, которые порождают периодические орбиты из гомоклинических петель. Эти вопросы широко обсуждались в работах [1, 2]. Гомоклинические траектории (ГТ) играют важную роль в теории бифуркаций и в механизме образования странного аттрактора [1–7]. Напомним (см. [8]), что траектория  $x(t)$  системы

$$\frac{dx}{dt} = F(x), \quad x \in R^n,$$

с гладкой вектор-функцией  $F(x)$  называется гомоклинической, если существуют пределы

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_1, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = x_2. \quad (1)$$

Рассмотрим геометрический аспект проблемы. *Нахождение геометрической симметрии двумерной системы тождественно выполнению условия (1).* Представим в виде двумерной системы

$$\frac{dx}{dt} = F_1(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = F_2(x, y),$$

где  $x, y \in R$  и  $F_x \in C(R^2, R)$ ,  $F_y \in C(R^2, R)$  и  $F_i(0, 0) = 0$  ( $i = 1, 2$ ), нелинейный осциллятор  $\ddot{x} - a\dot{x} + x + ax^3 = 0$

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = ay - x - ay^3. \quad (2)$$

Колебания осциллятора (2), имеющего особую точку — неустойчивый фокус, образуют аттрактор благодаря нелинейной составляющей ( $-ay^3$ ).

Нелинейная система (2) имеет на плоскости  $xy$  кососимметрию траектории, так как удовлетворяет определенным условиям [9]

$$F_1(-x, y) = -F_1(x, -y), \quad F_2(-x, y) = -F_2(x, -y). \quad (3)$$

Линейная система, соответствующая системе (2), имеет тенденцию к кососимметрии, так как удовлетворяет условию (3), но выполнение условия (1) возможно лишь в нелинейной системе. Удовлетворение условию (3) приводит к кососимметрии траектории на плоскости  $xy$  в том случае, когда нелинейность имеет вид  $(-x^2y)$  (осциллятор Ван дер Поля)

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = ay - x - ax^2y.$$

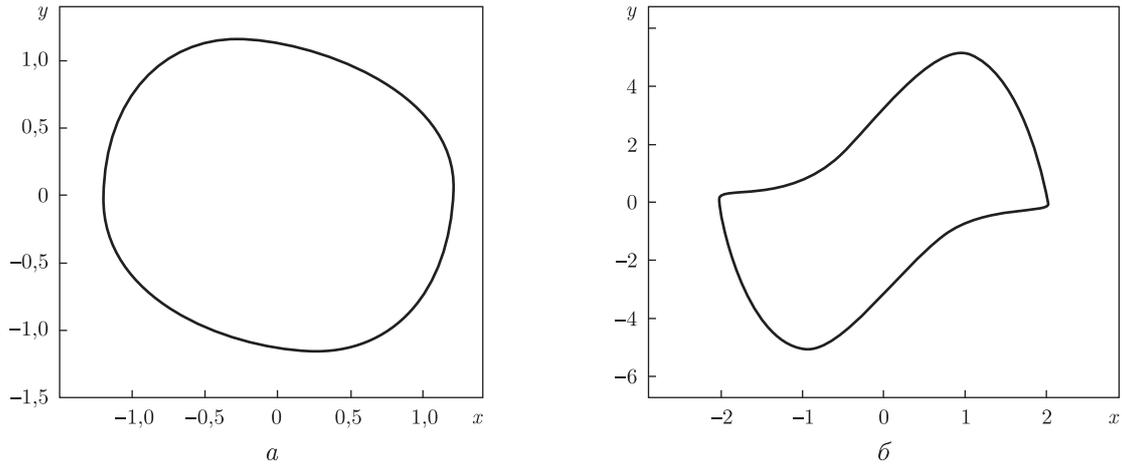


Рис. 1

На рис. 1, *a*, *б* приведены фазовые портреты с кососимметрией осциллятора (2) (параметр  $a = 0,7$ ) и осциллятора Ван дер Поля (параметр  $a = 3$ ).

**Трехмерные системы.** Траектории простых трехмерных систем обнаруживают симметрию проекций на координатные плоскости и этим качеством можно пользоваться для установления существования ГТ с определенной формой симметрии. Рассмотрим систему, которая носит название “модель устойчивости средней фирмы” [10, 11]

$$\dot{x} = -\nu x + \epsilon y, \quad \dot{y} = \mu(x + y) - \beta xz, \quad \dot{z} = -\gamma z + \alpha xy. \quad (4)$$

Система (4) связывает величины кредита  $x$ , капитала  $y$  и численности сотрудников  $z$  с помощью положительных параметров  $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon, \mu, \nu$ . Определим особые точки системы (4). Их будет три:

$$O(0, 0, 0), \quad A\left(\sqrt{\frac{\gamma\mu(\nu + \epsilon)}{\alpha\beta\nu}}, \sqrt{\frac{\gamma\mu\nu(\nu + \epsilon)}{\alpha\beta\epsilon^2}}, \frac{\mu(\nu + \epsilon)}{\beta\epsilon}\right),$$

$$B\left(-\sqrt{\frac{\gamma\mu(\nu + \epsilon)}{\alpha\beta\nu}}, -\sqrt{\frac{\gamma\mu\nu(\nu + \epsilon)}{\alpha\beta\epsilon^2}}, \frac{\mu(\nu + \epsilon)}{\beta\epsilon}\right).$$

Введем малые отклонения  $\delta x, \delta y, \delta z$  в системе (4) от частных решений  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  и составим уравнения в вариациях

$$\delta\dot{x} = -\nu\delta x + \epsilon\delta y, \quad \delta\dot{y} = (\mu - \beta\bar{z})\delta x + \mu\delta y - \beta\bar{x}\delta z, \quad \delta\dot{z} = -\gamma\delta z + \alpha(\bar{y}\delta x + \bar{x}\delta y). \quad (5)$$

Характеристическое уравнение системы (5) имеет вид

$$\lambda^3 + \lambda^2(\gamma + \nu - \mu) + \lambda(\gamma(\nu - \mu) - \mu(\nu + \epsilon) + \beta(\alpha\bar{x}^2 + \epsilon\bar{z})) + \gamma(-\mu(\nu + \epsilon) + \epsilon\beta\bar{z}) + \alpha\beta\bar{x}(\nu\bar{x} + \epsilon\bar{y}) = 0. \quad (6)$$

С помощью уравнения (6) можно определить характеристические показатели любой точки в поле трехмерного пространства системы (4). В точке  $O$ , например, уравнение (6) приобретает вид

$$(\lambda + \gamma)(\lambda^2 + \lambda(\nu - \mu) - \mu(\nu + \epsilon)) = 0,$$

из которого находим корни

$$\lambda_{1,2} = -(\nu - \mu)/2 \pm \sqrt{(\nu - \mu)/2)^2 + \mu(\nu + \epsilon)}, \quad \lambda_3 = -\gamma. \quad (7)$$

Поскольку система подвергалась качественному исследованию, воспользуемся выбором параметров, приведенном, например, в [11],

$$(\alpha, \beta, \epsilon, \mu, \nu) = (4; 8; 1; 2, 1; 4, 1); \quad \gamma \in (2, \dots, 2, 3345). \quad (8)$$

Особая точка  $O$  системы (4) является седлоузлом для интервала рассматриваемых параметров (8). Будем рассматривать *седловую величину* системы (4) для особых точек и точек, находящихся на траектории (термин *седловая величина* взят из [1, 2]). Седловая величина в точке  $O$ , согласно (7), равна

$$\sigma_O = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 < 0 \quad (9)$$

для параметров (8).

Выделим в правой части уравнения (5) слагаемые, которые определяют линейную часть системы (4). Остальные слагаемые содержат частные решения  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ,  $\bar{z}$ . Анализ последних может показать, что эти члены могут влиять лишь на мнимую часть характеристических показателей. Тогда седловая величина для всех точек пространства, которое порождено системой дифференциальных уравнений, будет одинаковой.

**О бифуркациях системы (4).** Приведем теорему Гробмана–Хартмана (см. [1]), которая будет полезна далее.

*Пусть точка  $O$  есть грубое состояние равновесия. Тогда существуют окрестности  $U_1$  и  $U_2$ , в которых исходная и линеаризованная системы топологически эквивалентны.*

Запишем уравнения в вариациях (5) в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} \delta \dot{x} \\ \delta \dot{y} \\ \delta \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nu & \epsilon & 0 \\ \mu & \mu & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\beta \bar{z} & 0 & -\beta \bar{x} \\ \alpha \bar{y} & \alpha \bar{x} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix}. \quad (10)$$

В уравнениях (10) справа первая матрица тождественна линейной матрицы системы (4), вторая соответствует той части уравнений (5), которая содержит частные решения  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ,  $\bar{z}$ . Докажем следующее утверждение

**Утверждение 1.** *Пусть вторая матрица в системе в вариациях (10) имеет такие характеристические числа: мнимые и одно нулевое. Тогда в окрестности точки  $O$  системы (4) существует поле седлоузловых точек, которые переходят в седлофокусные и седловая величина  $\sigma$ , полученная в соответствии с определенными значениями параметров, будет одинаковой для всех точек трехмерного пространства, включая особые точки.*

**Доказательство.** Первая матрица системы (10) имеет спектр, согласно формулам (7). Вторая матрица имеет следующие характеристические числа:

$$\bar{\lambda}_{1,2} = \pm i \sqrt{\alpha \beta \bar{x}^2}, \quad \bar{\lambda}_3 = 0. \quad (11)$$

Таким образом, бифуркационный процесс в поле трехмерной системы (4) происходит в соответствии с теоремой Гробмана–Хартмана. Окрестность, заполненная седлоузловыми точками, переходит седлофокусный континуум. Седлофокусная петля имеет отрицательную седловую величину  $\sigma_i$  во всех точках траектории (для рассматриваемых параметров (8))

$$\sigma_i = \sigma_A = \sigma_B = \sigma_O < 0. \quad (12)$$

Спектр характеристических показателей Ляпунова системы (4) удовлетворяет неравенству

$$\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 < 0.$$

Полагаем, что утверждение 1 устанавливает, что седлофокусная петля, для которой справедливо утверждение 1, имеет гомоклиническую траекторию, т.е. выполнение условий (1).

**О симметрии системы (4).** В пределах параметров (8) рассмотрим движение изображающей точки на плоскости  $xy$ , которое представим двухмерной системой

$$\dot{x} = -\nu x + \epsilon y, \quad \dot{y} = \mu(x + y). \quad (13)$$

Движение по двум плоскостям  $xz$ ,  $yz$  представлены двумя уравнениями, которые не связаны друг с другом:  $\dot{x} = -\nu x$ ,  $\dot{z} = -\gamma z$ ;  $\dot{y} = \mu y$ ,  $\dot{z} = -\gamma z$ .

**Утверждение 2.** Пусть трехмерная система, согласно утверждению 1, имеет седловую петлю с отрицательной седловой величиной (12). Уравнения движения на одной из плоскостей удовлетворяют условиям (3). Тогда гомоклиническая траектория системы (4) может иметь кососимметрию в соответствующей плоскости.

**Доказательство.** Линейная система (13) имеет тенденцию к кососимметрии, так как удовлетворяет условию (3). В плоскостях  $xz$ ,  $yz$  траектория по переменным  $z$  стремится к нулю, по переменной  $y$  — уходит. При расширении окрестности нуля траектория системы (4) становится седлофокусной и притягивающей петлей, так как точки на траектории имеют такие характеристические показатели:  $Re\lambda_1 < 0$ ,  $Re\lambda_2 < 0$ ,  $\lambda_3 < 0$ . Система (13) не показывает проекцию системы (4) на плоскость  $xy$ , но указывает на то, что эта проекция может иметь кососимметрию.

На рис. 2 приведены кососимметричные проекции системы (4) на плоскость  $xy$  (рис. 2, а при  $\gamma = 2$ , рис. 2, б, в при  $\gamma = 2,3345$ ). При увеличении параметра, влияющего на диссипацию системы ( $\gamma = 2,3345$ ), точка  $O$  включена в петлю траектории (рис. 2, б, в). На рис. 2, б полужирной линией обозначены траектории, содержащие седлофокусные точки, тонкой линией — седлоузловые. Этот численный результат получен при решении уравнения (6). Частные решения  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ,  $\bar{z}$ , которые включены в уравнение (6), соответствуют решению системы (4).

Дальнейшее увеличение параметра  $\gamma$  приводит к тому, что система организует траектории относительно особых точек  $A$ ,  $B$ . На уровне физических представлений: увеличение диссипации вызывает увеличение притяжения, увеличение отрицательной седловой величины  $\sigma_i$  во всех точках траектории, что приводит к разделению предельного цикла на два.

На рис. 3, а, б, в представлены проекции на координатные плоскости при  $\gamma = 2,4$ .

Заметим, что странный аттрактор рождается за пределами параметров (8). При сравнительно невысокой диссипации области существования замкнутой траектории относительно

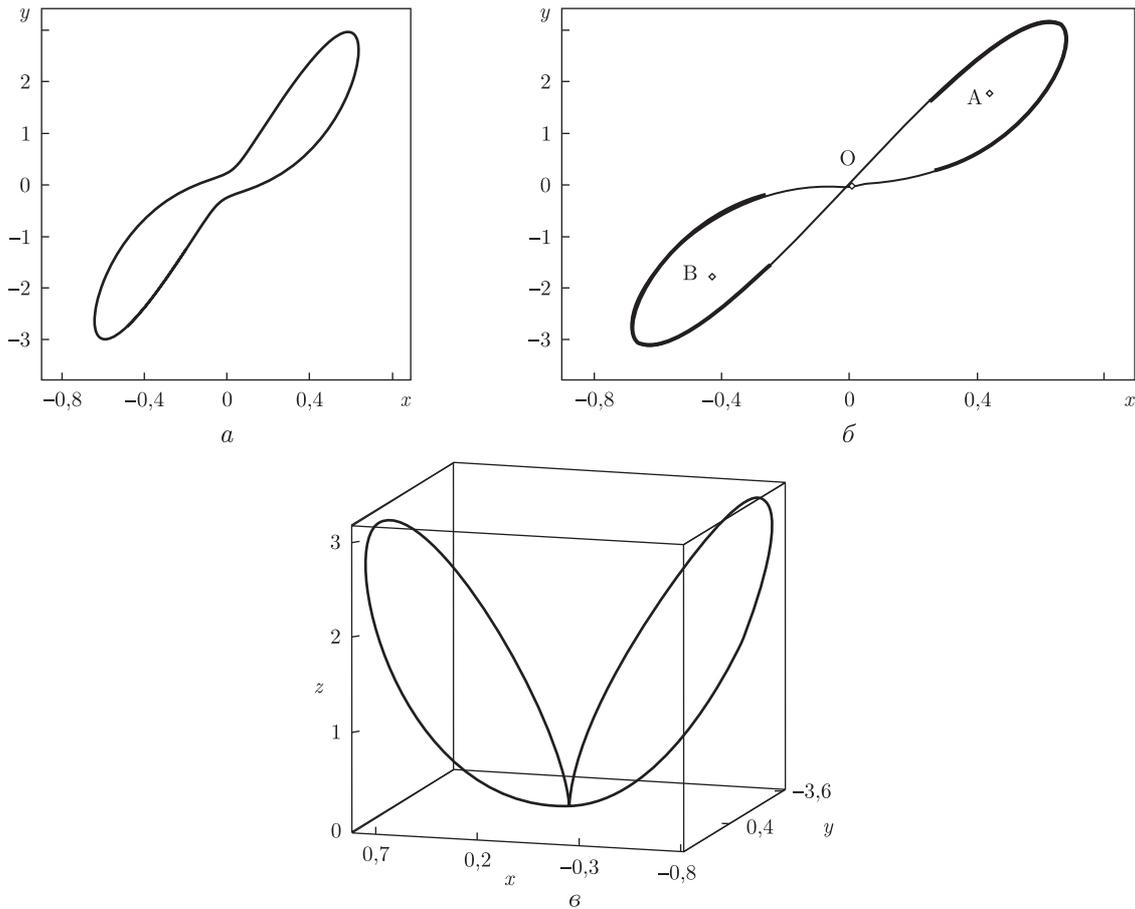


Рис. 2

точек  $A$  и  $B$  пересекаются. Порождается орбитная неустойчивость, которая сопровождается перескоком изображающей точки с одной орбиты на другую.

**Система Лоренца.** Покажем, что схожесть двух систем (Лоренца и модели устойчивости средней фирмы) связана с топологией трехмерного пространства. Система Лоренца

$$\dot{x} = s(-x + y), \quad \dot{y} = rx - y - xz, \quad \dot{z} = -bz + xy, \quad (14)$$

где  $b, r, s$  — положительные параметры, имеет следующие уравнения в вариациях:

$$\delta\dot{x} = -s\delta x + s\delta y, \quad \delta\dot{y} = (r - \bar{z})\delta x - \delta y - \bar{x}\delta z, \quad \delta\dot{z} = -b\delta z + \bar{y}\delta x + \bar{x}\delta y.$$

Система (14) имеет такие особые точки:

$$\begin{aligned} O(0, 0, 0), \quad A\left(\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1\right), \\ B\left(-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1\right). \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{pmatrix} \delta\dot{x} \\ \delta\dot{y} \\ \delta\dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s & s & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\bar{z} & 0 & -\bar{x} \\ \bar{y} & \bar{x} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix}.$$

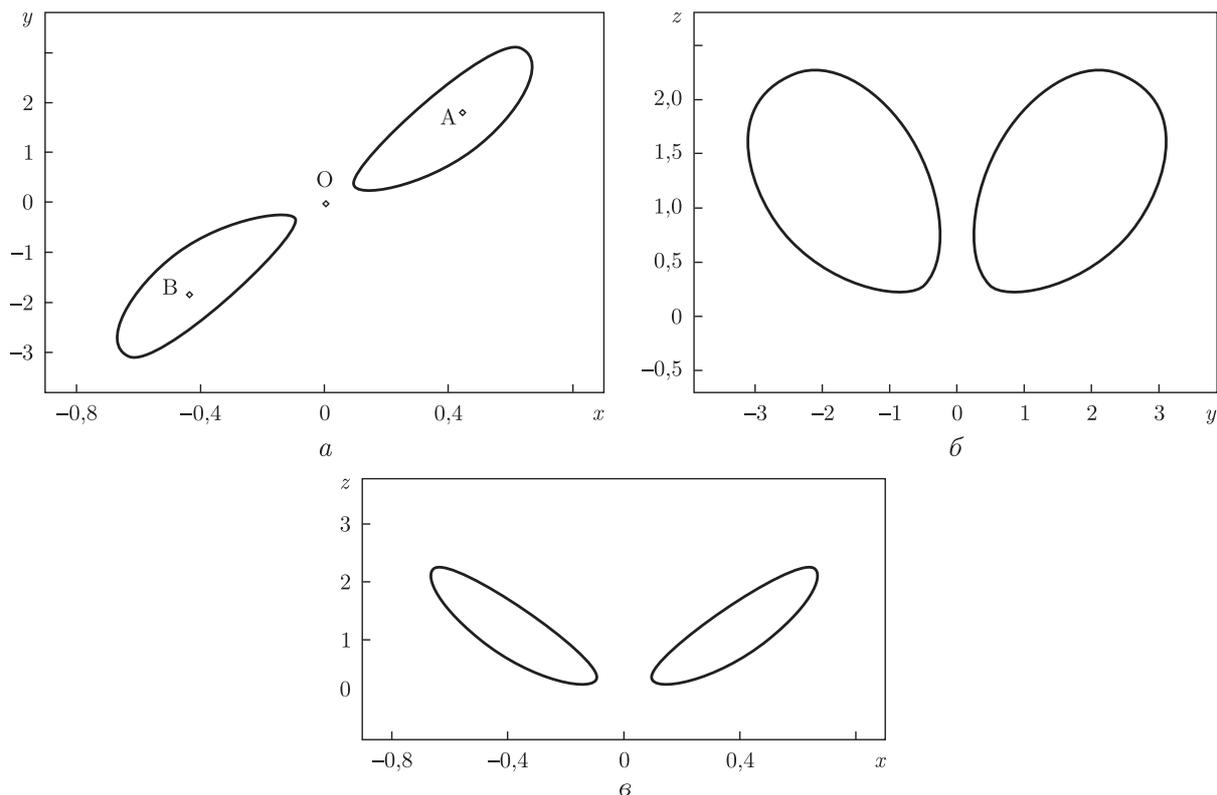


Рис. 3

Первая матрица в правой части системы (15) имеет спектр линейной системы, вторая имеет характеристические показатели

$$\bar{\lambda}_{1,2} = \pm i\sqrt{\bar{x}^2}, \quad \bar{\lambda}_3 = 0.$$

Для системы Лоренца имеет место утверждение 1.

Приведем характеристическое уравнение системы в вариациях

$$\lambda^3 + \lambda^2(s + b + 1) + \lambda(s(1 - r + \bar{z}) + b(s + 1) + \bar{x}^2) + s(b(1 - r + \bar{z}) + \bar{x}(\bar{x} + \bar{y})) = 0. \quad (16)$$

На рис. 4, а, б приведен фазовый портрет и наглядное изображение предельного цикла системы (14) при следующих значениях параметров:  $(b, r, s) = (8/3; 148, 4; 10)$ . На рис. 4, а полужирными линиями отмечены совокупности точек траектории седлофокусного характера, тонкими линиями — седлоузловые.

Таким образом, в данной работе установлено существование симметрии, ГТ и указаны оценки характеристических показателей Ляпунова в системах, которые объединены определенным свойством топологического характера. Доказательство существования гомоклинической траектории приведено на основе определенной специфики топологии трехмерного пространства систем (4), (14). Отметим, что условие кососимметрии из [9] возникло под влиянием теорем о симметрии из [12]. Доказательство существования гомоклинической траектории можно осуществить также на основе принципа симметрии применительно к трехмерным системам.

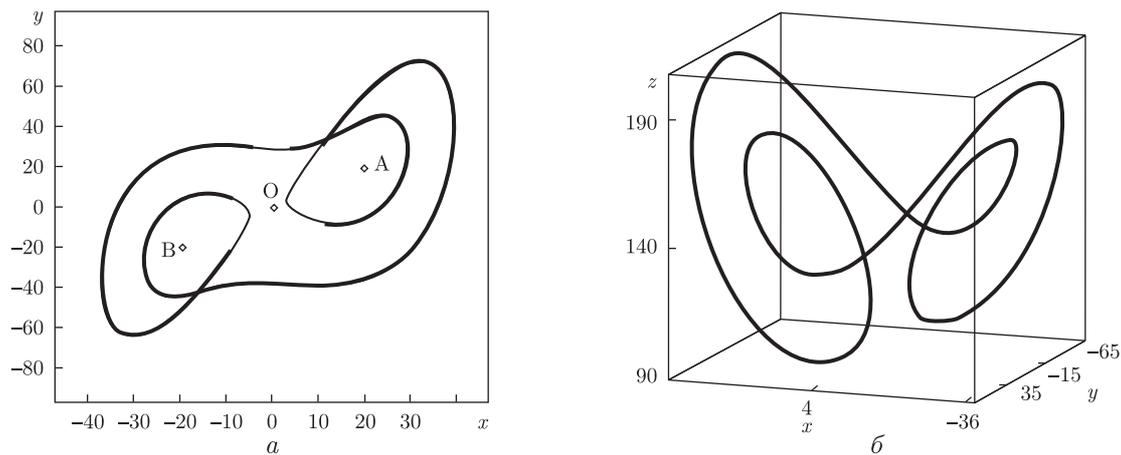


Рис. 4

1. Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Ч. 1. – Москва; Ижевск: ИКИ, 2004. – 414 с.
2. Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Ч. 2. – Москва; Ижевск: Ин-т компьютерн. исслед., 2009. – 546 с.
3. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. – Москва: Наука, 1981. – 568 с.
4. Анищенко В. С. Сложные колебания в простых системах. – Москва: Наука, 1990. – 312 с.
5. Неймарк Ю. И., Ланда П. С. Стохастические и хаотические колебания. – Москва: Наука, 1987. – 424 с.
6. Belhaq M., Lakrad F. Analytics of homoclinic bifurcations in three-dimensional systems // Intern. J. of Bifurcation and Chaos. – 2002. – **12**, No 11. – P. 2479–2486.
7. Leonov G. A. Strange attractors and classical stability theory. – St.-Peterburg: Univ. Press, 2008. – 160 p.
8. Леонов Г. А. Задача Трикоми о существовании гомоклинических траекторий в диссипативных системах // Прикл. мех. и мат. – 2013. – **77**, вып. 3. – С. 410–421.
9. Никитина Н. В. Нелинейные системы со сложным и хаотическим поведением траекторий. – Киев: Феникс, 2012. – 235 с.
10. Шаповалов В. И., Каблов В. Ф., Башмаков В. А., Авакумов В. Е. Синергетическая модель устойчивости средней фирмы // Синергетика и проблемы теории управления / Под ред. А. А. Колесникова. – Москва: Физматлит, 2004. – С. 454–464.
11. Гурина Т. А., Дорощев И. А. Существование гомоклинической бабочки в модели устойчивости средней фирмы // Динамич. системы. – 2010. – **77**, вып. 28. – С. 63–68.
12. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. – Москва; Ленинград: Гостехтеориздат, 1949. – 550 с.

Институт механики им. С. П. Тимошенко  
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 24.12.2013

**Н. В. Нікітіна**

### Про існування гомоклінічної траєкторії з симетрією у тривимірних системах

*Встановлено умови існування гомоклінічної траєкторії у системі, заданій у тривимірному просторі. Розглянуто дисипативну систему з симетрією.*

**N. V. Nikitina**

**About the existence of a homoclinic trajectory with symmetry in the three-dimensional systems**

*The conditions of existence of a homoclinic trajectory are obtained for a system set in the three-dimensional space. The dissipative system with symmetry is considered.*