УДК 519.217

Є.О. Лебєдєв, В.Д. Пономарьов

Про багатоканальні системи з повторними викликами сталої інтенсивності

(Представлено членом-кореспондентом НАН України П. С. Кноповим)

Досліджено марковські моделі систем з повторними викликами, в яких інтенсивність потоку повторних викликів не залежить від кількості їх джерел. Для такого класу систем з'ясовано умови існування стаціонарного режиму і отримано явні формули векторно-матричного типу знаходження стаціонарного розподілу через параметри системи.

Системи з повторними викликами утворюють важливий клас стохастичних систем, які часто зустрічаються на практиці. Функціонування комп'ютерних і телефонних мереж, систем керування чергами та інших стохастичних систем якнайкраще описується саме системами з повторними викликами (див., наприклад, [1]).

Характерною особливістю систем з повторними викликами є те, що виклик, який надійшов до системи в момент, коли всі прилади зайняті, не губиться, а повертається через деякий випадковий час з метою повторно отримати обслуговування. В класичній системі з повторними викликами вважається, що ймовірність надходження повторного виклику в інтервалі часу $(t, t+dt)$, при умові, що в системі є j джерел повторних викликів, дорівнює $j\mu dt + o(dt)$. Натомість у багатьох комп'ютерних і телекомунікаційних мережах інтервали часу між повторними викликами контролюються спеціальними пристроями і не залежать від кількості викликів, які намагаються повторно отримати обслуговування (див. [2]). Тому в таких системах ймовірність надходження повторного виклику в інтервалі часу $(t, t+dt)$ при умові, що є хоча б одне джерело повторних викликів, дорівнює $\mu dt + o(dt)$. Системи саме з такою організацією потоку повторних викликів будуть розглядатися в даній роботі.

Незважаючи на широке використання систем з повторними викликами, аналітичне подання стаціонарних ймовірностей було отримане лише для декількох найпростіших випадків [1, 3]. Складності в отриманні явного подання стаціонарного розподілу через параметри системи пов'язані з тим, що марковський процес, який описує функціонування такої системи, має зліченну множину станів, а матриця інтенсивностей переходів між станами, як правило, не має спеціальних властивостей, які б полегшили її перетворення для побудови явного розв'язку.

У роботі [3] досліджуються моделі систем з повторними викликами для розрахунку характеристик системи бездротового зв'язку CSMA/CD. Основним об'єктом дослідження була система з двома обслуговуючими приладами, для якої було отримано явні формули розрахунку стаціонарних ймовірностей і досліджено декілька основних інтегральних характеристик. На жаль, метод побудови стаціонарного розподілу системи, який використовував автор, неможливо поширити на системи з більшою кількістю обслуговуючих приладів.

У даній роботі ми зосередимось на побудові аналітичного подання ймовірнісних характеристик систем $M/M/c/\infty$ у стаціонарному режимі через їх параметри для будь-якого $c = 1, 2, \ldots$.

1. Марковська модель процесу обслуговування. Основна модель, що розглядається в роботі, є двовимірним ланцюгом Маркова з неперервним часом $X(t) = (C(t); N(t))$, $C(t) \in \{0, 1, \ldots, c\}$, $N(t) \in \{0, 1, \ldots\}$, який задається інфінітезимальними характеристиками $a_{(i,j)(i',j')}$, (i, j), $(i', j') \in S(X) = \{0, 1, \ldots, c\} \times \{0, 1, \ldots\}$:

1) якщо $i = \{0, 1, \ldots, c-1\}$, то

$$a_{(i,j)(i',j')} = \begin{cases} \lambda, & (i',j') = (i+1,j), \\ \mu, & (i',j') = (i+1,j-1), \\ i\nu, & (i',j') = (i-1,j), \\ -[\lambda+\mu+i\nu], & (i',j') = (i,j), \\ 0, & \text{в іншому випадку;} \end{cases}$$

2) якщо $i = c$, то

$$a_{(c,j)(i',j')} = \begin{cases} \lambda, & (i',j') = (c,j+1), \\ c\nu, & (i',j') = (c-1,j), \\ -[\lambda+c\nu], & (i',j') = (c,j), \\ 0, & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Ланцюг Маркова $X(t)$ описує процес обслуговування у такій системі з повторними викликами. Вхідний потік вимог є пуассонівським з параметром λ. Вимоги обслуговуються на c однакових приладах. Якщо є хоча б один вільний прилад, то вимога обслуговується негайно. Час обслуговування — показниково розподілена випадкова величина з параметром ν. Якщо всі прилади зайняті, то вимога стає джерелом повторних викликів. Потік повторних викликів має сталу інтенсивність μ, яка не залежить від кількості джерел повторних викликів. Кількість зайнятих приладів у будь-який момент часу задається першою компонентою процесу $X(t)$, а кількість джерел повторних викликів — другою.

Перш за все з'ясуємо умови існування ергодичного режиму для процесу $X(t)$, $t > 0$. Вони задаються такою лемою.

Лема 1. *Для того щоб процес $X(t)$ був ергодичним, необхідно і достатньо, щоб виконувалась нерівність*

$$\rho_c = \frac{\lambda(\lambda+\mu)^c}{c!\mu \displaystyle\sum_{i=0}^{c-1} \frac{(\lambda+\mu)^i}{i!\nu^{i-c}}} < 1.$$

Доведення. Для того щоб процес $X(t)$ був ергодичним, необхідно і достатньо, щоб (див. [4, теорема 1])

$$(\lambda+\mu)\pi_b(\lambda+\mu) < \mu,$$

де $\pi_b(\lambda+\mu)$ — блокуюча ймовірність у звичайній моделі Ерланга $M/M/c$ з інтенсивністю вхідного потоку $(\lambda+\mu)$ та інтенсивністю обслуговування ν. Оскільки

$$\pi_b(\lambda+\mu)=\frac{\dfrac{(\lambda+\mu)^c}{c!\nu^c}}{\displaystyle\sum_{i=0}^{c}\frac{(\lambda+\mu)^i}{i!\nu^i}},$$

то $X(t)$ ергодичний тоді і тільки тоді, коли $\rho_c<1$.

З'ясувавши умову існування стаціонарного режиму, розглянемо функціонування системи в стаціонарному режимі.

2. Дослідження стаціонарного режиму. Далі основною метою є побудова формул для стаціонарних ймовірностей системи, що розглядається, через її параметри. Позначимо через π_{ij}, $(i,j)\in S(X)$ стаціонарний розподіл системи.

Для пошуку стаціонарних ймовірностей π_{ij} використаємо теорему про рівність потоку ймовірностей через границю замкненої області в стаціонарному режимі [5, с. 49]. Для кожного $j=0,1,\ldots$ побудуємо розбиття фазового простору $S(X)=S_j^{(1)}(X)\bigcup\overline{S}_j^{(1)}(X)$, $S_j^{(1)}(X)=\{(p,q)\in S(X)\colon q\leqslant j\}$. Прирівнюючи потоки ймовірностей через границю області $S_j^{(1)}(X)$, знаходимо:

$$\lambda\pi_{cj}=\mu\sum_{i=0}^{c-1}\pi_{ij+1},\qquad j=0,1,\ldots. \tag{1}$$

Тепер для $i=0,1,\ldots,c-1$, $j=0,1,\ldots$ побудуємо розбиття фазового простору $S(X)=$ $=S_{ij}^{(2)}(X)\cup\overline{S}_{ij}^{(2)}(X)$, $S_{ij}^{(2)}(X)=\{(i,j)\}$. Прирівнюючи потоки ймовірностей через границю області $S_{ij}^{(2)}(X)$, отримаємо таку систему рівнянь:

$$[\lambda+(1-\delta_{j0})\mu]\pi_{0j}=\nu\pi_{1j},\qquad j=0,1,\ldots, \tag{2}$$

$$[\lambda+(1-\delta_{j0})\mu+i\nu]\pi_{ij}=\lambda\pi_{i-1j}+(i+1)\nu\pi_{i+1j}+\mu\pi_{i-1j+1}, \tag{3}$$

$$i=1,\ldots,c-1,\qquad j=0,1,\ldots. \tag{4}$$

Введемо такі позначення для матриць, що залежать від параметрів системи:

$A=\|a_{ik}\|_{i,k=1}^{c}$ — матриця з елементами $a_{ii-1}=\mu$, $i=1,\ldots,c-1$,

$$a_{ck}=\begin{cases}\dfrac{c\mu\nu}{\lambda}, & k\neq c-1,\\[2mm] \dfrac{\mu[\lambda+c\nu]}{\lambda}, & k=c-1,\end{cases}$$

а всі інші елементи дорівнюють 0;

$B=\|b_{ik}\|_{i,k=1}^{c}$ — тридіагональна матриця з елементами $b_{ii-1}=-\lambda$, $i=2,\ldots,c$, $b_{ii}=\lambda+$ $+\mu+(i-1)\nu$, $i=1,\ldots,c$, $b_{ii+1}=-i\nu$, $i=1,\ldots,c-1$. $B_0=B-\mu E$, де $E=\|\delta_{ik}\|_{i,k=1}^{c}$ — одинична матриця (δ_{ik} — символ Кронекера);

$C=\|c_{ik}\|_{i,k=1}^{c}$, де $c_{11}=1$, $c_{1k}=0$, $k=2,\ldots,c$, $c_{ik}=b_{i-1k}$, $i=2,\ldots,c$, $k=1,\ldots,c$.

Має місце нижченаведене твердження.

Лема 2. *Матриці B_0, B і C невироджені, причому:*

1) $B_0^{-1} = \|b_0^{(-1)}(i,k)\|_{i,k=1}^c$, *де* $b_0^{(-1)}(i,k) = \sum\limits_{j=(k-i)^+}^{c-i} (i+j-1)!\nu^j/((i-1)!\lambda^{j+1})$, $(k-i)^+ = \max(0, k-i)$;

2) $B^{-1} = \Big(\sum\limits_{p=0}^{\infty} B_1^p\Big)F^{-1}$, *де F — діагональна матриця з елементами* $f_{ii} = \lambda + \mu + (i-1)\nu$, $i = 1, \ldots, c$ *на головній діагоналі,* B_1 *— матриця, в якій ненульовими елементами є* $b_1(i, i-1) = \dfrac{\lambda}{\lambda + \mu + (i-1)\nu}$, $i = 2, \ldots, c$, $b_1(i, i+1) = \dfrac{i\nu}{\lambda + \mu + (i-1)\nu}$, $i = 1, \ldots, c-1$.

Для того щоб побудувати стаціонарний розподіл процесу обслуговування в системі $M/M/c/\infty$, розглянемо аналогічну систему з обмеженим простором станів. Така система функціонує аналогічно до вихідної, але має обмеження на максимальну довжину черги: нові вимоги на обслуговування губляться, коли всі прилади зайняті і в системі вже є N джерел повторних викликів. Формально функціонування такої системи описується ланцюгом Маркова $X(t,N) = (C(t,N); N(t,N))$, де $C(t,N) \in \{0, \ldots, c\}$, $N(t,N) \in \{0, \ldots, N\}$. Його інфінітезимальні характеристики $a_{(i,j)(i',j')}^{(N)}$, (i,j), $(i',j') \in S(X,N) = \{0, \ldots, c\} \times \{0, \ldots, N\}$, збігаються з відповідними характеристиками $a_{(i,j)(i',j')}$ процесу $X(t)$ в усіх точках, крім граничного випадку $i = c$, $j = N$

$$a_{(c,N)(i',j')}^{(N)} = \begin{cases} c\nu, & (i',j') = (c-1, N), \\ -c\nu, & (i',j') = (c, N), \\ 0, & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Оскільки фазовий простір $S(X,N)$ процесу $X(t,N)$ скінченний, то для $X(t,N)$ існує стаціонарний режим і через $\pi_{ij}(N)$, $(i,j) \in S(X,N)$ будемо позначати його стаціонарні ймовірності.

Через $\pi_j(N) = (\pi_{0j}(N), \ldots \pi_{c-1j}(N))^T$ позначимо вектор стаціонарних ймовірностей.

Має місце така лема.

Лема 3. *Між стаціонарними ймовірностями процесу $X(t,N)$ виконується співвідношення*

$$\pi_j(N) = \Delta_j(N)\pi_{00}(N), \qquad j = 0, 1, \ldots,$$

де

$$\Delta_0(N) = B_0^{-1} B \Delta_1(N), \qquad \Delta_j(N) = \frac{(B^{-1}A)^{N-j} C^{-1} e_1}{e_1^T B_0^{-1} B (B^{-1}A)^N C^{-1} e_1}, \qquad j = 1, 2, \ldots,$$

$$e_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \ldots, \delta_{ic})^T.$$

Доведення. Ймовірності $\pi_{ij}(N)$, $(i,j) \in S(X,N)$ урізаної системи задовольняють систему рівнянь (1)–(3) для вихідної системи. Окремого розгляду потребує лише граничний випадок $j = N$, для якого справедливі співвідношення

$$[\lambda + \mu]\pi_{0N}(N) = \nu \pi_{1N}(N),$$

$$[\lambda + \mu + i\nu]\pi_{iN}(N) = \lambda \pi_{i-1N}(N) + (i+1)\nu \pi_{i+1N}(N), \qquad i = 1, \ldots, c-2.$$

Додамо до останньої системи рівнянь тотожність $\pi_{0N}(N) = \pi_{0N}(N)$ і перепишемо її у векторно-матричному вигляді:

$$C\pi_N(N) = e_1\pi_{0N}(N).$$

Звідси знаходимо

$$\pi_N(N) = C^{-1}e_1\pi_{0N}(N). \tag{5}$$

Систему рівнянь (1)–(3) для урізаної системи можна переписати у векторно-матричній формі:

$$A\pi_1(N) = B_0\pi_0(N),$$
$$A\pi_{j+1}(N) = B\pi_j(N), \qquad j = 1, \ldots, N-1.$$

Врахувавши (5), знаходимо

$$\pi_j(N) = (B^{-1}A)^{N-j}C^{-1}e_1\pi_{0N}(N), \qquad j = 1, \ldots, N. \tag{6}$$

Із системи (1)–(3) при $j = 0$

$$\pi_0(N) = B_0^{-1}A\pi_1(N) = B_0^{-1}B(B^{-1}A)^N C^{-1}e_1\pi_{0N}(N).$$

З останнього рівняння маємо ймовірність $\pi_{0N}(N)$:

$$\pi_{0N}(N) = \{e_1^T B_0^{-1}B(B^{-1}A)^N C^{-1}e_1\}^{-1}\pi_{00}(N).$$

Підставляючи останній вираз у рівняння (6), отримуємо твердження леми.

Дослідимо граничну поведінку вектора $\Delta_j(N)$. Має місце такий результат.

Лема 4. *Вектори $\Delta_j(N)$, $j = 0, 1, \ldots$ при $N \to \infty$ мають границі, які задаються співвідношеннями*

$$\Delta_0 = B_0^{-1}B\Delta_1, \qquad \Delta_j = \frac{uv^T C^{-1}e_1}{e_1^T B_0^{-1}Buv^T(B^{-1}A)^j C^{-1}e_1}, \qquad j = 1, 2, \ldots,$$

де $u^T = (u_1, u_2, \ldots, u_c) > 0$, $v^T = (v_1, v_2, \ldots, v_c) > 0$ — правий і лівий власні вектори матриці $B^{-1}A$, які відповідають перроніву кореню.

Доведення. Оскільки $B^{-1}A > 0$, то для цієї матриці виконуються умови теореми 4 [6, с. 150] і її N-й степінь можна записати у вигляді

$$(B^{-1}A)^N = r^N uv^T + o(r_1^N),$$

де $r_1 < r$, r — перронів корінь матриці $B^{-1}A$, а u і v — такі правий і лівий власні вектори, що відповідають r, для яких $u^T v = 1$.

Підставимо це подання у вираз для вектора $\Delta_j(N)$, $j = 1, 2, \ldots$:

$$\Delta_j(N) = \frac{(B^{-1}A)^{N-j}C^{-1}e_1}{e_1^T B_0^{-1}B(B^{-1}A)^N C^{-1}e_1} = \frac{(uv^T r^{N-j} + o(r_1^N))C^{-1}e_1}{e_1^T B_0^{-1}B(uv^T r^{N-j} + o(r_1^N))(B^{-1}A)^j C^{-1}e_1}. \tag{7}$$

Розділимо чисельник і знаменник (7) на r^{N-j} і перейдемо до границі при $N \to \infty$:

$$\Delta_j = \lim_{N\to\infty} \Delta_j(N) = \frac{uv^T C^{-1} e_1}{e_1^T B_0^{-1} B uv^T (B^{-1}A)^j C^{-1} e_1}.$$

Оскільки матриця uv^T входить і в чисельник і в знаменник виразу для Δ_j, то умову нормування $u^T v = 1$ для власних векторів u, v можна відкинути.

Сформулюємо і доведемо ще один допоміжний результат.

Лема 5. *Нехай виконується умова леми 1. Тоді*

$$\sum_{j=1}^{\infty} 1^T(c)\Delta_j < \infty, \tag{8}$$

де $1^T(c)$ — *вектор розмірності* c, *складений з одиниць.*

Доведення. При виконанні умови леми 1 процес $X(t)$ ергодичний, а значить, існує ймовірність $\pi_{00} > 0$. Використовуючи результати про стохастичну впорядкованість для імовірнісних розподілів процесів міграції з [1], знаходимо

$$\lim_{N\to\infty} \pi_{00}(N) = \pi_{00} > 0. \tag{9}$$

З умови нормування стаціонарних ймовірностей процесу $X(t, N)$, враховуючи результати леми 3, маємо

$$\pi_{00}(N) = \left\{ 1^T(c)\Delta_0(N) + \frac{\lambda+\mu}{\lambda} \sum_{j=1}^{N} 1^T(c)\Delta_j(N) \right\}^{-1}.$$

Доводити твердження леми будемо методом від супротивного. Припустимо, що ряд (8) розбігається. Це означає, що для будь-якого великого $L > 0$, існує номер $M = M(L)$ такий, що

$$\frac{\lambda+\mu}{\lambda} \sum_{j=1}^{M} 1^T(c)\Delta_j > L.$$

Нескладно перевірити, що

$$\pi_{00}^{-1} = \lim_{N\to\infty} \pi_{00}^{-1}(N) = \lim_{N\to\infty} \left\{ 1^T(c)\Delta_0(N) + \frac{\lambda+\mu}{\lambda} \sum_{j=1}^{N} 1^T(c)\Delta_j(N) \right\} \geqslant$$

$$\geqslant \lim_{N\to\infty} \left\{ 1^T(c)\Delta_0(N) + \frac{\lambda+\mu}{\lambda} \sum_{j=1}^{M} 1^T(c)\Delta_j(N) \right\} =$$

$$= 1^T(c)\Delta_0 + \frac{\lambda+\mu}{\lambda} \sum_{j=1}^{M} 1^T(c)\Delta_j > 1^T(c)\Delta_0 + L.$$

Таким чином, $\pi_{00} = 0$, що суперечить (9).

При $N \to \infty$ стаціонарні ймовірності $\pi_{ij}(N)$ наближають відповідні ймовірності вихідної системи. Використовуючи подані вище допоміжні результати, доведемо теорему, яка дає явні векторно-матричні подання стаціонарних ймовірностей системи через її параметри.

Теорема 1. *Якщо для процесу $X(t)$ виконується умова леми 1, то*

$$\pi_j = \lim_{N\to\infty} \pi_j(N) = \Delta_j \cdot \pi_{00}, \qquad \pi_{cj} = \frac{\mu}{\lambda} 1^T(c)\Delta_{j+1} \cdot \pi_{00}, \qquad j = 0, 1, \ldots, \tag{10}$$

де

$$\pi_{00} = \left\{ 1^T(c)\Delta_0 + \frac{\lambda+\mu}{\lambda} \sum_{j=1}^{\infty} 1^T(c)\Delta_j \right\}^{-1}.$$

Доведення. Використаємо результати лем 3 та 4:

$$\pi_j = \lim_{N\to\infty} \pi_j(N) = \Delta_j \cdot \pi_{00}, \qquad j = 0, 1, \ldots.$$

Ймовірності π_{cj}, $j = 0, 1, \ldots$, знайдемо з рівнянь (1), а ймовірність π_{00} — з умови нормування.

Використаємо теорему 1, щоб отримати стаціонарні ймовірності для систем $M/M/2/\infty$ та $M/M/3/\infty$ для порівняння з відомими результатами.

Наслідок 1. *Якщо виконується умова леми 1, то стаціонарні ймовірності для системи типу $M/M/2/\infty$ існують і можуть бути подані у вигляді:*

$$\pi_{0j} = \Phi_j \cdot \pi_{00}, \qquad j = 1, 2, \ldots,$$

$$\pi_{10} = \frac{\lambda}{\nu}\pi_{00}, \qquad \pi_{1j} = \frac{\lambda+\mu}{\nu}\Phi_j \cdot \pi_{00}, \qquad j = 1, 2, \ldots,$$

$$\pi_{2j} = \frac{\mu(\lambda+\mu+\nu)}{\lambda\nu}\Phi_{j+1} \cdot \pi_{00}, \qquad j = 0, 1, \ldots,$$

де

$$\Phi_j = \frac{\lambda^2}{(\lambda+\mu)^2 + \mu\nu} \left(\frac{\lambda}{\mu\nu} \frac{(\lambda+\mu)^2 + \mu\nu}{3\lambda + 2\mu + 2\nu} \right)^j,$$

$$\pi_{00} = \nu^2(3\lambda + 2\mu + 2\nu) \Biggl\{ [\lambda+\mu+\nu][(\lambda+\mu)^2 + 3\nu(\lambda+\mu) + 2\nu^2] \times$$

$$\times \sum_{j=1}^{\infty} \Phi_j + \nu(3\lambda + 2\mu + 2\nu)(\lambda+\nu) + \lambda^2(\lambda+\mu+\nu) \Biggr\}^{-1}.$$

Формули, наведені у наслідку 1, з точністю до позначень збігаються з результатами роботи [3].

Знайдемо тепер явний вигляд стаціонарного розподілу системи з трьома обслуговуючими пристроями. Введемо позначення $B^{-1}A = D = \|d_{ij}\|_{i,j=1}^3$. Очевидно, компоненти матриці D можна виписати явно через параметри λ, μ, ν, якими задається $M/M/3/\infty$-система.

Наслідок 2. *Якщо виконується умова леми 1, то стаціонарні ймовірності для системи типу $M/M/3/\infty$ існують і можуть бути подані співвідношенням* (10), *у якому перронів корінь*

$$r = \frac{1}{2}(d_{11} + d_{22} + d_{33}) + \frac{1}{2}\sqrt{(d_{11} - d_{22} - d_{33})^2 + 4(d_{12}d_{21} + d_{13}d_{31} + d_{32}d_{23} - d_{22}d_{33})},$$

а додатні правий і лівий власні вектори можуть бути взяті у вигляді

$$u^T = (u_1, u_2, u_3) = g^{-1}(g, d_{23}d_{13} - d_{21}(d_{33} - r), d_{32}d_{21} - d_{31}(d_{22} - r)),$$

$$v^T = (v_1, v_2, v_3) = g^{-1}(g, d_{13}d_{32} - d_{12}(d_{33} - r), d_{12}d_{23} - d_{13}(d_{22} - r)),$$

$$g = (d_{22} - r)(d_{33} - r) - d_{32}d_{23}.$$

Отримані в наслідку 2 співвідношення на відміну від результатів роботи [7], які містять рекурентний алгоритм підрахунку стаціонарного розподілу для $M/M/3/\infty$-системи, дають явні формули для стаціонарних ймовірностей.

Таким чином, досліджено системи з повторними викликами сталої інтенсивності. З'ясовано умови існування стаціонарного режиму і побудовано явні формули векторно-матричного типу для підрахунку стаціонарних ймовірностей через параметри системи. Для порівняння отриманих результатів з відомими окремо розглянуто системи з двома і трьома обслуговуючими пристроями. Наведені розрахункові формули можна використовувати для подальшого детального аналізу систем, підрахунку характеристик їх функціонування, постановки і розв'язку оптимізаційних задач.

1. *Falin G. I., Templeton J. G. C.* Retrial queues. – London: Chapman & Hall, 1997. – 317 p.
2. *Choi B. D., Shin Y. W., Ahn W. C.* Retrial queues with collision arising from unsoltted CSMA/CD protocol // Queueing Systems. – 1992. – **11**. – P. 335–356.
3. *Artalejo J. R.* Stationary analysis of the characteristics of the M/M/2 queue with constant repeated attempts // Opsearch. – 1996. – **33**. – P. 83–95.
4. *Falin G.* Heavy traffic analysis of a random walk on a lattice semi-strip // Stochastic Models. – 1995. – **11**, No 3. – P. 395–409.
5. *Уолрэнд Дж.* Введение в теорию сетей массового обслуживания. – Москва: Мир, 1993. – 336 с.
6. *Севастьянов Б. А.* Ветвящиеся процессы. – Москва: Наука, 1971. – 436 с.
7. *Gomez-Corral A., Ramalhoto M. F.* The stationary distribution of a Markovian process arising in the theory of multiserver retrial queueing systems // Math. and Comput. Modelling. – 1999. – **30**. – P. 141–158.

Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 17.12.2013

Е. А. Лебедев, В. Д. Пономарев

Про многоканальные системы с повторными вызовами постоянной интенсивности

Исследованы марковские модели систем с повторными вызовами, в которых интенсивность потока повторных вызовов не зависит от количества их источников. Для такого класса систем найдены условия существования стационарного режима и получены явные формулы векторно-матричного типа для нахождения стационарного распределения через параметры системы.

E. A. Lebedev, V. D. Ponomarov

On multichannel systems with constant retrial rate

The paper deals with the Markov models of retrial queues, in which the intensity of a repeated request flow does not depend on the number of their sources. We find out the conditions of the steady state existence for such class of systems and obtain explicit formulas of the vector-matrix type for the stationary distribution through the system parameters.