УДК 517.926,517.927.2

В. А. Михайлец, Г. А. Чеханова

Фредгольмовые краевые задачи с параметром на пространствах $C^{(n)}[a,b]$

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины Ю. С. Самойленко)

Введены и исследованы краевые задачи, порожденные системой m линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка и краевыми условиями вида $By = c$, где линейный непрерывный оператор $B\colon C^{(n)}([a,b],\mathbb{C}^m) \to \mathbb{C}^m$, а m, n — натуральные числа. Установлена фредгольмовость таких краевых задач. Найдены достаточные условия непрерывности по параметру их решений вместе с производными до порядка n в равномерной норме.

1. Пусть далее числа $m, n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим на конечном интервале (a,b) векторное линейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' + A(t)y = f(t), \tag{1}$$

где комплекснозначные $(m \times m)$-матрица-функция $A(\cdot)$ и вектор-функция $f(\cdot)$ суммируемы на $[a,b]$. Каждое решение дифференциального уравнения (1) принадлежит пространству $AC([a,b],\mathbb{C}^m)$. Поэтому можно рассмотреть вместе с уравнением (1) неоднородное краевое условие

$$By = c, \tag{2}$$

где вектор $c \in \mathbb{C}^m$, а линейный непрерывный оператор

$$B\colon C([a,b],\mathbb{C}^m) \to \mathbb{C}^m. \tag{3}$$

Известно (см., например, [1]), что такой оператор допускает однозначное аналитическое представление

$$By = \int_a^b [d\Phi(t)]y(t), \tag{4}$$

где $\Phi(\cdot)$ — $(m \times m)$-матрица-функция, элементы которой непрерывны справа на интервале (a,b) и имеют ограниченную вариацию на $[a,b]$, $\Phi(a) = 0_m$, а интеграл понимается по Риману–Стилтьесу.

Дополнительные условия вида (3) именуют общими. Они охватывают все классические виды краевых условий. В частности, задачи Коши, двухточечные и многоточечные, интегральные и смешанные краевые условия (см. 2 гл. II, § 5], где приведены соответствующие ссылки). Известно (см., например, [3]), что краевая задача (1), (2) является фредгольмовой.

Пусть теперь коэффициент дифференциального выражения, оператор B и правые части равенств (1), (2) зависят от параметра $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, где $\varepsilon_0 > 0$. Рассмотрим семейство неоднородных краевых задач

$$y'(t,\varepsilon) + A(t,\varepsilon)y(t,\varepsilon) = f(t,\varepsilon), \tag{5}$$

$$B(\varepsilon)y(\cdot,\varepsilon) = c(\varepsilon), \tag{6}$$

где при фиксированном значении параметра ε задача (5), (6) является общей краевой. Тогда решение $y(\cdot,\varepsilon)$ также зависит от ε. В работах [3–6] найдены достаточные условия непрерывной зависимости от параметра $\varepsilon \to 0+$ решений (5), (6) в равномерной норме. Вместе с тем оставался открытым вопрос о зависимости от параметра $\varepsilon \to 0+$ производных решения $y(\cdot,\varepsilon)$ в равномерной норме. Для существования таких производных необходимо сделать дополнительные предположения относительно уравнения (1).

2. Будем предполагать далее, что в дифференциальном уравнении (1)

$$A(\cdot) \in C^{(n-1)}([a,b],\mathbb{C}^{m\times m}), \qquad f(\cdot) \in C^{(n-1)}([a,b],\mathbb{C}^{m}).$$

В этом случае каждое решение уравнения (1) принадлежит банаховому пространству $C^{(n)}([a,b],\mathbb{C}^m)$. Поэтому можно рассмотреть вместе с уравнением дополнительное неоднородное условие (2), в котором линейный непрерывный оператор

$$B\colon C^{(n)}([a,b],\mathbb{C}^m) \to \mathbb{C}^m. \tag{7}$$

Из строгих включений для пространств линейных непрерывных операторов

$$L(C^{(n)}([a,b],\mathbb{C}^m),\mathbb{C}^m) \supset L(C^{(n-1)}([a,b],\mathbb{C}^m),\mathbb{C}^m)$$

следует, что с увеличением параметра n в (7) введенные нами классы краевых условий расширяются. В частности, каждый из операторов в (3) заведомо удовлетворяет условию (7). Можно показать, что каждый из операторов в (7) допускает однозначное аналитическое представление

$$By = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k y^{(k-1)}(a) + \int_a^b [d\Phi(t)]y^{(n)}(t),$$

где матрицы $\alpha_k \in \mathbb{C}^{m\times m}$, а матрица-функция $\Phi(\cdot)$ такая же, как и в равенстве (4). Краевые задачи с такими операторами в краевых условиях встречаются в ряде приложений и в общей постановке, по-видимому, не исследовались. Их анализу и посвящена данная работа.

Неоднородную краевую задачу (1), (2) можно записать в виде операторного уравнения

$$L_B y = (f, c),$$

где линейный оператор

$$L_B := (L, B), \qquad Ly := y' + A(t)y.$$

Теорема 1. *Оператор L_B непрерывно действует из банахова пространства $C^{(n)}([a,b],\mathbb{C}^m)$ в банахово пространство $C^{(n-1)}([a,b],\mathbb{C}^m)\times\mathbb{C}^m$ и является фредгольмовым.*

Следствие 1. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) Неоднородная краевая задача (1), (2) *имеет одно решение при любых* $f(\cdot) \in C^{(n-1)}([a,b],\mathbb{C}^m)$ *и* $c \in \mathbb{C}^m$.

2) Однородная краевая задача вида (1), (2) *имеет только тривиальное решение.*

3. Пусть $Y(t)$ — единственное решение (матрицант) линейного матричного дифференциального уравнения

$$Y'(t) = -A(t)Y(t), \qquad t \in (a,b) \tag{8}$$

с начальным условием

$$Y(t_0) = I_m, \qquad t_0 \in [a,b]. \tag{9}$$

Введем метрическое пространство матриц-функций

$$\mathcal{Y}(n,m,t_0) := \{Y(t) \in C^{(n)}([a,b],\mathbb{C}^{m\times m}) \colon Y(t_0) = I_m, \det Y(t) \neq 0\}$$

с метрикой

$$d_n(Y,Z) := \|Y(\cdot) - Z(\cdot)\|_{(n)},$$

где $\|\cdot\|_{(n)}$ — норма в банаховом пространстве $C^{(n)}([a,b],\mathbb{C}^{m\times m})$.

Ключевым местом в доказательстве основной теоремы работы является

Теорема 2. *При каждом фиксированном значении параметров* n, m, t_0 *нелинейное отображение*

$$A(\cdot) \mapsto Y(\cdot)$$

в задаче (8), (9) *является гомеоморфизмом банахова пространства* $C^{(n-1)}([a,b],\mathbb{C}^{m\times m})$ *на метрическое пространство* $\mathcal{Y}(n,m,t_0)$.

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 2.1 работы [7].

4. Рассмотрим теперь параметрическое семейство неоднородных краевых задач (5), (6), где при фиксированном значении параметра ε матрица-функция $A(\cdot,\varepsilon) \in C^{(n-1)}([a,b],\mathbb{C}^{m\times m})$, вектор-функция $f(\cdot,\varepsilon) \in C^{(n-1)}([a,b],\mathbb{C}^m)$, а оператор $B(\varepsilon)$ удовлетворяет соотношению (7). Тогда содержателен и представляет интерес вопрос об условиях, при которых

$$\|y(\cdot,\varepsilon) - y(\cdot,0)\|_{(n)} \to 0, \tag{10}$$

где $\varepsilon \to 0+$, а $\|\cdot\|_{(n)}$ — норма в пространстве $C^{(n)}([a,b],\mathbb{C}^m)$.

Чтобы этот вопрос имел смысл, будем предполагать далее, что *предельная однородная краевая задача* ($f(\cdot,0) = 0$, $c(0) = 0$) *имеет только тривиальное решение.* В силу следствия в этом случае вектор-функция $y(\cdot,0)$ в соотношении (10) определена однозначно.

Основным результатом работы является

Теорема 3. *Пусть при* $\varepsilon \to 0+$ *выполнены условия:*

(i) $\|A(\cdot,\varepsilon) - A(\cdot,0)\|_{(n-1)} \to 0$;

(ii) $\|f(\cdot,\varepsilon) - f(\cdot,0)\|_{(n-1)} \to 0$;

(iii) $B(\varepsilon)y \to B(0)y$, $y \in C^{(n)}([a,b],\mathbb{C}^m)$; $c(\varepsilon) \to c(0)$.

Тогда для достаточно малых ε решения $y(\cdot,\varepsilon)$ задачи (5), (6) *определены однозначно и для них выполняется предельное равенство* (10).

Заметим, что в условиях теоремы 3 операторы $L_B(\varepsilon)$ сходятся к оператору $L_B(0)$ в сильной операторной топологии, но, вообще говоря, не сходится по норме.

Замечание 1. Из теоремы Ф. Рисса о необходимых и достаточных условиях слабой сходимости линейных непрерывных функционалов на пространстве $C([a,b],\mathbb{C})$ следует, что условие *(iii)* теоремы 3 равносильно следующему условию на матрицы $\alpha_k(\varepsilon)$ и матрицы-функции $\Phi(\cdot,\varepsilon)$, задающие операторы $B(\varepsilon)$: при $\varepsilon\to 0+\alpha_k(\varepsilon)\to\alpha_k(0)$, $c(\varepsilon)\to c(0)$, $V_a^b\Phi(\cdot,\varepsilon)=O(1)$, $\Phi(b,\varepsilon)\to\Phi(b,0)$, $\int\limits_a^t\Phi(s,\varepsilon)ds\to\int\limits_a^t\Phi(s,0)ds$, $t\in(a,b]$.

Замечание 2. Из теоремы 2 вытекает, что условие *(i)* теоремы 3 является необходимым для справедливости предельного равенства (10) применительно к задачам частного вида с

$$f(\cdot,\varepsilon)\equiv 0,\qquad c(\varepsilon)\equiv c\in\mathbb{C}^m,\qquad B(\varepsilon)y\equiv y(a).$$

Отметим также, что близкая по форме задача, где вместо пространств $C^{(n)}$ присутствуют соболевские пространства W_p^n, $n\in\mathbb{N}$, $p\in[1,\infty)$ исследована ранее в [7]. Доказательство теоремы 3 проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 1.1 работы [7].

Исследование В. А. Михайлеца поддержано грантом 03–01–12 совместных проектов НАН Украины и СО РАН.

1. *Кигурадзе И. Т.* Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. – Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1975. – 352 с.
2. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – Москва: Наука, 1965. – 704 с.
3. *Кигурадзе И. Т.* Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Совр. проблемы математики. Новейшие достижения. Т. 30. – Москва: ВИНИТИ, 1987. – С. 3–103.
4. *Ashordia M.* Criteria of correctness of linear boundary-value problems for systems of generalized differential equations // Czech. Math. J. – 1996. – **46**, No 3. – P. 385–404.
5. *Михайлец В. А., Рева Н. В.* Обобщения теоремы Кигурадзе о корректности линейных краевых задач // Доп. НАН України. – 2008. – № 9. – С. 23–27.
6. *Kodlyuk T. I., Mikhailets V. A., Reva N. V.* Limit theorems for one-dimensional boundary-value problems // Ukr. Math. J. – 2013. – **65**, No 1. – P. 77–90.
7. *Kodlyuk T. I., Mikhailets V. A.* Solutions of one-dimensional boundary-value problems with a parameter in Sobolev spaces // J. Math. Sci. – 2013. – **190**, No 4. – P. 589–599.

Институт математики НАН Украины, Киев
НТУ Украины "Киевский политехнический институт"
Поступило в редакцию 27.02.2014

В. А. Михайлець, Г. О. Чеханова

Фредгольмові крайові задачі з параметром на просторах $C^{(n)}[a,b]$

Введено і досліджено крайові задачі, породжені системою m лінійних звичайних диференціальних рівнянь першого порядку і крайовими умовами вигляду $By=c$, де лінійний неперервний оператор $B\colon C^{(n)}([a,b],\mathbb{C}^m)\to\mathbb{C}^m$, а m, n — натуральні числа. Встановлено фредгольмовість таких крайових задач. Знайдено достатні умови неперервності за параметром їх розв'язків разом з похідними до порядку n у рівномірній нормі.

V. A. Mikhailets, G. A. Chekhanova

Fredholm boundary-value problems with a parameter on the spaces $C^{(n)}[a, b]$

We introduce and study boundary-value problems generated by the system of m ordinary linear differential equations of the first order and boundary conditions of the form $By = c$, where $B\colon C^{(n)}([a, b], \mathbb{C}^m) \to \mathbb{C}^m$ is a continuous linear operator, and m, n are positive integers. We prove that such boundary-value problems possess the Fredholm property. Sufficient conditions for their solutions together with their derivatives up to order n to depend continuously on the parameter in the uniform norm are found.