ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

7 • 2014

ІНФОРМАТИКА ТА КІБЕРНЕТИКА

УДК 517.977.56

М. М. Копець

Оптимальне керування процесом нагрівання тонкого стержня

(Представлено членом-кореспондентом НАН України А. О. Чикрієм)

Розглядається лінійно-квадратична задача оптимального керування процесом нагрівання тонкого стержня. Припускається одночасне використання розподілених і граничних керувань. Для цієї задачі пропонується метод множників Лагранжа, причому функція Лагранжа включає в себе не тільки рівняння з частинними похідними, але і крайові умови. Для розглядуваної задачі оптимізації отримано необхідні умови оптимальності. Аналіз цих умов дав можливість вивести інтегро-диференціальне рівняння Ріккаті.

Задачі оптимального керування процесами, що описуються рівняннями з частинними похідними, є досить актуальними. Їх дослідженню присвячена значна кількість робіт. Особливе місце серед цих задач займає лінійно-квадратична задача, тобто коли процес описується лінійним диференціальним рівнянням з частинними похідними і цільовий функціонал є квадратичним. У теорії оптимального керування лінійно-квадратична задача відіграє важливу роль. Вона виникає при побудові оптимального керування за принципом оберненого зв'язку [1, 2], в деяких задачах теорії диференціальних ігор [3]. Робота присвячена лінійно-квадратичній задачі оптимального керування процесом нагрівання тонкого стержня. Для отримання необхідних умов оптимальності в даній роботі застосовано метод множників Лагранжа. Встановлено умови, що забезпечують єдиність оптимального керування. Вперше для такої задачі із застосуванням дельта-функції Дірака отримано інтегро-диференціальне рівняння Ріккаті.

Постановка задачі. Нехай керований процес описується таким рівнянням з частинними похідними:

$$\frac{\partial z(t,x)}{\partial t} = a\frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial x^2} + u(t,x), \tag{1}$$

$$t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \qquad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{2}$$

де дійсні числа a, $l > 0$, $t_0 \geqslant 0$, $t_1 > 0$ відомі. Для рівняння (1) задано початкову умову

$$z(t_0, x) = f(x) \tag{3}$$

та крайові умови

$$\frac{\partial z(t,0)}{\partial x} - h_1 z(t,l) = 0, \qquad \frac{\partial z(t,l)}{\partial x} + h_2 z(t,l) = 0, \tag{4}$$

де $\partial z(t,0)/\partial x$ та $\partial z(t,l)/\partial x$ — значення частинної похідної $\partial z(t,x)/\partial x$ при $x = 0$ і $x = l$ відповідно, дійсні числа $h_1 > 0$, $h_2 > 0$ і функція $f(x) \in L_2(0,l)$ задані. Функція $u(t,x)$ називається допустимим керуванням, якщо $u(t,x) \in L_2(\Omega)$, де множина Ω задана так:

$$\Omega = \{(t,x)\colon t_0 \leqslant t \leqslant t_1, 0 \leqslant x \leqslant l\}.$$

Для фіксованого допустимого керування $u(t,x)$ розв'язком $z(t,x)$ задачі (1)–(3) вважається узагальнений розв'язок $z(t,x) \in L_2(\Omega)$. Рівняння (1) — це диференціальне рівняння з частинними похідними параболічного типу. Відомо, що рівняння (1) описує процес поширення тепла в тонкому стержні [4, с. 178].

Далі розглянемо такий критерій оптимальності:

$$I(u,z) = \frac{1}{2}\int\limits_0^l z^2(t_1,x)dx + \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_0^l [z^2(t,x) + u^2(t,x)]\,dxdt. \tag{5}$$

Задача оптимізації (1)–(4) полягає у знаходженні допустимого керування $u(t,x)$, на якому функціонал (4) досягає свого найменш можливого значення. Якщо таке допустиме керування $u(t,x)$ існує, то його називають *оптимальним керуванням.*

Необхідні умови оптимальності. Необхідні умови оптимальності для сформульованої вище задачі оптимізації можна знайти за допомогою методу множників Лагранжа [5, с. 31]. З цією метою розглянемо допоміжний функціонал

$$\begin{aligned} J(p,u,z) &= \frac{1}{2}\int\limits_0^l z^2(t_1,x)dx + \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_0^l [z^2(t,x) + u^2(t,x)]dxdt + \\ &+ \int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_0^l p(t,x)\left[a\frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial x^2} + u(t,x) - \frac{\partial z(t,x)}{\partial t}\right]dxdt - \\ &- \int\limits_{t_0}^{t_1} ap(t,0)\left[\frac{\partial z(t,0)}{\partial x} - h_1 z(t,0)\right]dt - \int\limits_{t_0}^{t_1} a + p(t,l)\left[\frac{\partial z(t,l)}{\partial x} + h_2 z(t,l)\right]dt, \end{aligned} \tag{6}$$

де функція $p(t,x)$ — множник Лагранжа. В такий спосіб задача (1)–(4) на умовний екстремум функціонала (4) зводиться до задачі мінімізації функціонала (5) із урахуванням умови (2). Далі, користуючись стандартним способом варіаційного числення, знайдемо приріст $\triangle J$ функціонала (5)

$$\triangle J = J(p + \varepsilon\delta p, u + \varepsilon\delta u, z + \varepsilon\delta z) - J(p,u,z).$$

Після очевидних спрощень (розкриття дужок, зведення подібних членів та інтегрування частинами) отримаємо таке співвідношення:

$$\triangle J = \varepsilon\int\limits_0^l [z(t_1,x)-p(t_1,x)]\delta z(t_1,x)dx +$$

$$+\varepsilon\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_0^l\left[\left[z(t,x)+a\frac{\partial^2 p(t,x)}{\partial x^2}+\frac{\partial p(t,x)}{\partial t}\right]\delta z(t,x)+[u(t,x)+p(t,x)\right]\delta u(t,x)\right]dxdt -$$

$$-\varepsilon\int\limits_{t_0}^{t_1} a\left[\frac{\partial p(t,0)}{\partial x}-h_1 p(t,0)\right]\delta z(t,0)dt-\varepsilon\int\limits_{t_0}^{t_1} a\left[\frac{\partial p(t,l)}{\partial x}+h_2 p(t,l)\right]\delta z(t,l)dt +$$

$$+\varepsilon\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_0^l \delta p(t,x)\left[a\frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial x^2}+u(t,x)-\frac{\partial z(t,x)}{\partial t}\right]dxdt +$$

$$+\varepsilon\int\limits_{t_0}^{t_1} a\delta p(t,0)\left[\frac{\partial z(t,0)}{\partial x}-h_1 z(t,0)\right]dt-\varepsilon\int\limits_{t_0}^{t_1} a\delta p(t,l)]\left[\frac{\partial z(t,l)}{\partial x}+h_2 z(t,l)\right]dt -$$

$$-\frac{\varepsilon^2}{2}\left[\int\limits_0^l [\delta z(t_1,x)]^2 dx+\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_0^l [[\delta z(t,x)]^2+[\delta u(t,x)]^2]dxdt. \qquad (7)$$

Беручи до уваги рівність (6), приходимо до такого висновку.

Теорема 1. *Оптимальне керування в задачі* (1)–(4) *єдине і визначається із співвідношень*

$$\frac{\partial z(t,x)}{\partial t} = a\frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial x^2}+u(t,x), \qquad (7а)$$

$$z(t_0,x)=f(x), \qquad \frac{\partial z(t,0)}{\partial x}-h_1 z(t,0)=0, \qquad \frac{\partial z(t,l)}{\partial x}+h_2 z(t,l)=0, \qquad (7б)$$

$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial t} = -a\frac{\partial^2 p(t,x)}{\partial x^2}-z(t,x), \qquad (7в)$$

$$p(t_1,x)=z(t_1,x), \qquad \frac{\partial p(t,0)}{\partial x}-h_1 z(t,0)=0, \qquad \frac{\partial p(t,l)}{\partial x}+h_2 z(t,l)=0, \qquad (7г)$$

$$u(t,x)+p(t,x)=0. \qquad (7д)$$

Інтегро-диференціального рівняння Ріккаті. Рівність $p(t_1,x)=z(t_1,x)$ дає підстави вважати, що між функціями $p(t,x)$ і $z(t,x)$, які задовольняють співвідношення (7а)–(7д), існує певна залежність. Шукатимемо цю залежність у вигляді

$$p(t,x)=\int\limits_0^l R(t,x,y)z(t,y)\,dy. \qquad (8)$$

Враховуючи співвідношення (7д), (8), (1) та використовуючи інтегрування частинами, одержуємо таку рівність:

$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial t} = \int_0^l \left[\frac{\partial R(t,x,y)}{\partial t} + a\frac{\partial^2 R(t,x,y)}{\partial y^2} - \int_0^l R(t,x,s)R(t,s,y)ds\right] z(t,y)dy +$$
$$+ a\left[\frac{\partial R(t,x,0)}{\partial y} - h_1 R(t,x,0)\right] z(t,0) - a\left[\frac{\partial R(t,x,l)}{\partial y} + h_2 R(t,x,l)\right] z(t,l). \qquad (9)$$

З іншого боку, на підставі рівностей (7в) та (8) знаходимо

$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial t} = -\int_0^l \left[a\frac{\partial^2 R(t,x,y)}{\partial x^2} + \delta(x-y)\right] z(t,y)\,dy, \qquad (10)$$

де $\delta(x)$ — дельта-функція Дірака. В результаті порівняння співвідношень (9) та (10) приходимо до таких рівностей:

$$\frac{\partial R(t,x,y)}{\partial t} + a\left[\frac{\partial^2 R(t,x,s)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 R(t,x,y)}{\partial y^2}\right] - \int_0^l R(t,x,s)R(t,s,y)\,ds + \delta(x-y) = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial R(t,x,0)}{\partial y} - h_1 R(t,x,0) = 0, \qquad \frac{\partial R(t,x,l)}{\partial y} + h_2 R(t,x,l) = 0. \qquad (12)$$

Крім того, рівність $p(t_1,x) = z(t_1,x)$ приводить до співвідношення

$$R(t_1,x,y) = \delta(x-y). \qquad (13)$$

В результаті можна сформулювати таке твердження.

Теорема 2. *Функція* $R(t,x,y)$ *— це розв'язок інтегро-диференціального рівняння* (11), *задовольняє крайові умови* (12) *та додаткову умову* (13). *Якщо відома функція* $R(t,x,y)$, *то оптимальне керування* $u(t,x)$ *має вигляд*

$$u(t,x) = -\int_0^l R(t,x,y)z(t,y)\,dy,$$

де функція $z(t,y)$ *є розв'язком інтегро-диференціального рівняння*

$$\frac{\partial z(t,y)}{\partial t} = a\frac{\partial^2 z(t,y)}{\partial y^2} - \int_0^l R(t,y,s)z(t,s)\,ds,$$

задовольняє початкову умову

$$z(t_0,y) = f(y)$$

та крайові умови

$$\frac{\partial z(t,0)}{\partial y} - h_1 z(t,0) = 0, \qquad \frac{\partial z(t,l)}{\partial y} + h_2 z(t,l) = 0.$$

Таким чином, у роботі розглядається лінійно-квадратична задача оптимального керування процесом нагрівання тонкого стержня. За допомогою методу множників Лагранжа отримано необхідні умови оптимальності. Встановлено умови, що забезпечують єдиність оптимального керування. Вперше для такої задачі з використанням дельта-функції Дірака одержано інтегро-диференціальне рівняння Ріккаті.

1. *Ройтенберг Я. Н.* Автоматическое управление. – Москва: Наука, 1978. – 551 с.
2. *Naidu D. S.* Optimal control systems. – Boca Raton: CRC Press, 2003. – 433 p.
3. *Жуковский В. И., Чикрий А. А.* Линейно-квадратичные дифференциальные игры. – Киев: Наук. думка, 1994. – 320 с.
4. *Крылов Н. А.* О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложение в технических вопросах. – Ленинград: Изд-во АН СССР, 1933. – 472 с.
5. *Сиразетдинов Т. К.* Оптимизация систем с распределенными параметрами. – Москва: Наука, 1977. – 480 с.

НТУ України "Київський політехнічний інститут"

Надійшло до редакції 20.12.1013

М. М. Копец

Оптимальное управление процессом нагревання тонкого стержня

Рссматривается линейно-квадратическая задача оптимального управления процессом нагревания тонкого стержня. Предполагается одновременное использование распределенных и граничных управлений. Для этой цели предлагается метод множителей Лагранжа, причем функция Лагранжа включает в себя не только уравнение с частными производными, но и краевые условия. Для рассматриваемой задачи оптимизации получены необходимые условия оптимальности. Анализ этих условий дал возможность вывести интегро-дифференциальное уравнение Риккати.

M. M. Kopets

Optimal control over the process of heating of a thin core

The paper is devoted to the linear-quadratic optimal control problem for the process of heating of a thin core. The simultaneous use of distributed and boundary controls is supposed. A method of Lagrange multipliers is proposed, and the Lagrange function includes not only a partial differential equation, but also boundary conditions. For the considered optimization problem, the necessary conditions of optimality are obtained. Their analysis has given chance to deduce the Riccati integro-differential equation.