УДК 519.21

М. В. Лебідь, Г. М. Торбін

Про порівнянні та непорівнянні міри Хаусдорфа

(Представлено академіком НАН України В. С. Королюком)

Розвиток загальних методів обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича — одна з центральних проблем теорії фракталів. Досліджено тривіальність (нетривіальність) мережевих мір Хаусдорфа. Знайдено достатні умови, при виконанні яких сімейства локально тонких покриттів породжують порівнянні мережеві міри Хаусдорфа $H^{\alpha}(\cdot,\Phi)$. Також знайдено загальні достатні умови довірчості для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича локально тонких систем покриттів. Доведено довірчість сімейства циліндричних відрізків факторіальної системи числення. Показано, що клас довірчих покриттів суттєво ширший за клас покриттів, які породжують порівнянні мережеві міри Хаусдорфа.

Міра Хаусдорфа та розмірність Хаусдорфа–Безиковича є основними інструментами дослідження в теорії фракталів, з якими пов'язана значна кількість відкритих проблем [1, 2]. Задача знаходження чи хоча б оцінки розмірності Хаусдорфа–Безиковича залишається нерозв'язаною навіть для класу двовимірних самоафінних фракталів, що задовольняють умову відкритої множини [3]. Тому розвиток методів обчислення вказаної фрактальної розмірності є важливим як з точки зору розвитку загальної теорії, так і для дослідження фрактальних властивостей конкретних сімейств фрактальних множин. Один із підходів, який почав інтенсивно розвиватися протягом останніх п'яти років, полягає у вивченні довірчості сімейства покриттів для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича та дослідження порівнянності (непорівнянності) породжених мір з класичною мірою Хаусдорфа.

Нехай (M,ρ) — метричний простір, E — обмежена підмножина, $d(E)$ — її діаметр. Нагадаємо, що сімейство Φ_M підмножин з M називається *сімейством локально тонких покриттів* (СЛТП) множини M, якщо $\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\{E_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ $(E_j \in \Phi_M,\ d(E_j) \leqslant \varepsilon,\ \forall\, j \in \mathbb{N})$: $M \subset \bigcup\limits_j E_j$. Зауважимо, що не в кожному метричному просторі існує хоча б одне СЛТП.

α–мірною мірою Хаусдорфа підмножини $E \subset M$ відносно заданого СЛТП Φ_M називається

$$H^{\alpha}(E,\Phi_M) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\inf_{d(E_j)\leqslant\varepsilon}\left\{\sum_j d(E_j)^{\alpha}\right\}\right] = \lim_{\varepsilon\to 0} H^{\alpha}_{\varepsilon}(E,\Phi_M),$$

де інфімум береться за всіма можливими не більш ніж зчисленними ε-покриттями $\{E_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ множини E, де $E_j \in \Phi_M$, $\forall\, j \in \mathbb{N}$. Якщо $(M,\rho) = \mathbb{R}^n$, то сімейство всіх відкритих (замкнених) підмножин породжує класичну α-мірну міру Хаусдорфа $H^{\alpha}(\cdot)$.

Означення 1 [4]. Сімейство Φ підмножин називається **мережею** на M, якщо:

(a) з того, що A_1 та A_2 належать Φ, випливає, що або $A_1 \subset A_2$, або $A_2 \subset A_1$, або $A_1 \bigcap A_2 = \varnothing$;

(b) кожна з точок простору M належить або до деякої множини $C \in \Phi$ нульового діаметра, або до сімейства множин з Φ, які мають як завгодно малий діаметр;

(c) Φ — зчисленне сімейство підмножин;

(d) кожен елемент $A \in \Phi$ міститься лише в скінченній кількості елементів з Φ;

(e) кожна множина з Φ є F_σ-множиною.

Якщо Φ — мережа, то $H^\alpha(\cdot, \Phi)$ називають мережевою мірою Хаусдорфа [4]. Очевидно, що всяка мережа є сімейством локально тонких покриттів простору M.

Означення 2. Нехай Φ_M — СЛТП на M та $\alpha > 0$. Міра $H^\alpha(\cdot, \Phi_M)$ називається *порівнянною* з мірою Хаусдорфа, якщо існує додатна константа $C = C(\alpha) > 0$ така, що

$$H^\alpha(E) \leqslant H^\alpha(E, \Phi) \leqslant C H^\alpha(E), \qquad \forall\, E \subset M.$$

СЛТП Φ_M називається *порівнянним*, якщо $\forall\, \alpha > 0$ відповідна міра $H^\alpha(\cdot, \Phi_M)$ є порівнянною з мірою Хаусдорфа.

Означення 3. Нехай Φ_M — СЛТП на M та $\alpha > 0$. Міра $H^\alpha(E, \Phi_M)$ називається *непорівнянною* з мірою Хаусдорфа, якщо існує множина $E \subset M$ така, що $H^\alpha(E) = 0$, $H^\alpha(E, \Phi) > 0$ або $H^\alpha(E) \in (0, +\infty)$, $H^\alpha(E, \Phi) = +\infty$.

СЛТП Φ_M називається *непорівнянним*, якщо існує $\alpha > 0$ таке, що відповідна міра $H^\alpha(\cdot, \Phi_M)$ є непорівнянною з мірою Хаусдорфа.

Означення 4. Невід'ємне число

$$\dim_H(E, \Phi_M) = \inf\{\alpha\colon H^\alpha(E, \Phi_M) = 0\}$$

називається розмірністю Хаусдорфа–Безиковича множини $E \subset M$ відносно СЛТП Φ_M.

Означення 5. СЛТП Φ_M називається *довірчим сімейством покриттів* для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на M, якщо $\dim_H(E, \Phi) = \dim_H(E)$, $\forall\, E \subseteq M$.

Безпосередньо з означення випливає, що довільне сімейство Φ_M порівнянних покриттів є довірчим для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича. Умови довірчості СЛТП вивчалися багатьма дослідниками. Перші кроки у цьому напряму були зроблені А. Безиковичем [5], який довів довірчість сімейства циліндрів двійкового розкладу. Результат А. Безиковича був узагальнений П. Біллінгслі [6] для сімейства s-адичних циліндрів. М. Працьовитий поширив попередні результати до сімейства Q-S-циліндрів [7]. S. Albeverio та Г. Торбін узагальнили ці результати до сімейства Q^*-циліндрів для таких матриць Q^*, елементи p_{0k}, $p_{(s-1)k}$ яких відокремлені від нуля [8]. У роботах [9, 10] було знайдено деякі загальні достатні умови, які гарантують не лише довірчість, але і порівнянність сімейств покриттів. Усі ці результати були отримані з використанням такого підходу:

Твердження 1. *Якщо для даного СЛТП Φ існують додатні константи $\beta \in \mathbb{R}$ та $N^* \in \mathbb{N}$ такі, що для довільної кулі B існує не більше N^* множин $B_j \in \Phi$, які покривають B, та $d(B_j) \leqslant \beta \cdot d(B)$, то сімейство Φ є довірчим.*

Нижченаведений результат узагальнює та поглиблює твердження 1.

Теорема 1. *Нехай (M, ρ) — метричний простір та $\Phi := \Phi_M$ — СЛТП на M. Припустимо, що існують додатні константи $C = C(\alpha)$, β і функція $f(x)\colon R_+ \to \mathbb{N}$ така, що:*

1) для будь-якої кулі $I \subset M$ існує не більш як $f(d(I))$ підмножин

$$\triangle_1^I, \qquad \triangle_2^I, \qquad \ldots, \qquad \triangle_{l(I)}^I \in \Phi,$$

$$l(I) \leqslant f(d(I)), \qquad d(\triangle_j^I) \leqslant \beta d(I) \qquad i \qquad I \subset \bigcup_{j=1}^{l(I)} \triangle_j^I;$$

2) для довільного $\delta > 0$ існує $\varepsilon_1(\delta) > 0$ таке, що

$$f(d(I)) \cdot (d(I))^{\delta} \leqslant C, \qquad \text{для довільної кулі } I\text{, діаметр якої не перевищує } \varepsilon_1(\delta).$$

Тоді сімейство Φ довірче для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на M.

Доведення. Зрозуміло, що $\dim_H(E) \leqslant \dim_H(E, \Phi)$, $\forall\, E \subset M$. Доведемо тепер, що $\dim_H(E) \geqslant \dim_H(E, \Phi)$. Виберемо α та δ так, що $0 < \delta < \alpha \leqslant 1$. Нехай $\{I_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ — довільне ε-покриття множини E та $\varepsilon \leqslant \varepsilon_1(\delta)$. Зафіксуємо деяке I_j. З припущення теореми випливає існування не більше ніж $f(d(I_j))$ підмножин $\Delta_1^{I_j}, \Delta_2^{I_j}, \ldots, \Delta_{l(I_j)}^{I_j}$ з Φ таких, що $d(\Delta_i^{I_j}) \leqslant \beta d(I_j)$ для $i \in \{1, \ldots, l(I_j)\}$ та $I_j \bigcap E \subset \bigcup\limits_{i=1}^{l(I_j)} \Delta_i^{I_j}$.

Отже,

$$\sum_{i=1}^{l(I_j)} (d(\Delta_i^{I_j}))^{\alpha} \leqslant f(d(I_j))(\beta d(I_j))^{\alpha} = f(d(I_j))(d(I_j))^{\delta} \beta^{\alpha} (d(I_j))^{\alpha-\delta}.$$

Таким чином,

$$\sum_j \sum_{i=1}^{l(I_j)} (d(\Delta_i^{I_j}))^{\alpha} \leqslant C\beta^{\alpha} \sum_j (d(I_j))^{\alpha-\delta}$$

для довільного $\alpha \in (0,1]$, $\delta \in (0,\alpha)$ і для довільного ε-покриття $\{I_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ множини E, $\varepsilon \leqslant \varepsilon_1(\delta)$. Тому

$$H^{\alpha}_{\beta\varepsilon}(E, \Phi) \leqslant \sum_j \sum_{i=1}^{l(I_j)} (d(\Delta_i^{I_j}))^{\alpha} \leqslant C\beta^{\alpha} \sum_j (d(I_j))^{\alpha-\delta}$$

для довільного $\delta \in (0,\alpha)$ і довільного ε-покриття $\{I_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ множини E, $\varepsilon \leqslant \varepsilon_1(\delta)$. Отже,

$$H^{\alpha}_{\beta\varepsilon}(E, \Phi) \leqslant C\beta^{\alpha} H^{\alpha-\delta}_{\varepsilon}(E), \qquad \forall\, \alpha > 0, \qquad \forall\, \delta \in (0,\alpha), \qquad \forall\, \varepsilon \leqslant \varepsilon_1(\delta).$$

Таким чином,

$$H^{\alpha}(E, \Phi) \leqslant C\beta^{\alpha} H^{\alpha-\delta}(E), \qquad \forall\, \alpha > 0, \qquad \forall\, \delta \in (0,\alpha). \tag{1}$$

Припустимо, що $\dim_H E < \dim_H(E, \Phi)$. Виберемо α і δ так, щоб $\alpha \in (\dim_H E, \dim_H(E, \Phi))$ і $\alpha - \delta \in (\dim_H E, \dim_H(E, \Phi))$. Тоді $H^{\alpha}(E, \Phi) = +\infty$ та $H^{\alpha-\delta} = 0$, що суперечить нерівності (1). Тому $\dim_H(E, \Phi) \geqslant \dim_H E$, що і доводить теорему.

Зауважимо, що твердження 1 неможливо використати для дослідження довірчості сімейства циліндричних відрізків навіть для факторіальної системи числення, тобто для сімейства $\widetilde{Q}$-циліндрів (див. [11]), яке породжене матрицею $\widetilde{Q}$ з $q_{ik} = 1/(k+1)$, $\forall\, i \in \{0, 1, \ldots, k\}$. При такому виборі матриці $\widetilde{Q}$ кожне дійсне число $x \in [0,1]$ можна зобразити у вигляді

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k(x)}{(k+1)!}, \qquad \text{де} \qquad \alpha_k(x) \in \{0, 1, \ldots, k\}. \tag{2}$$

Покажемо, яким чином теорема 1 дозволяє дослідити проблему довірчості для випадку факторіальної системи числення.

Теорема 2. *СЛТП* Φ*, яке складається з циліндричних відрізків факторіальної системи числення, тобто*

$$\Phi = \{E\colon E = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k},\ \alpha_i \in \{0,\ldots,i\},\ i = 1,2,\ldots,k,\ k \in \mathbb{N}\}, \qquad \textit{де}$$

$$\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k} := \left\{x\colon x \in \left[\sum_{i=1}^{k}\frac{\alpha_i}{(i+1)!};\frac{1}{(k+1)!} + \sum_{i=1}^{k}\frac{\alpha_i}{(i+1)!}\right]\right\},$$

є довірчою для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на одиничному відрізку.

Доведення. Нехай δ — довільне додатне число. Тоді існує мінімальне $k_0 = k_0(\delta) \in \mathbb{N}$ таке, що $\forall\, k > k_0$ виконується нерівність $(2k+2)((k+1)!)^{-\delta} \leqslant 1$. Для k_0 виберемо довільне $\varepsilon_1(\delta) \in (1/(k_0+1)!, 1/k_0!)$.

Нехай I — довільний сегмент $\langle a, b\rangle$ та $d(I) < \varepsilon_1(\delta)$. Для кожного сегмента I існує мінімальне значення $m := k(d(I))$ таке, що $1/m! < d(I)$. При цьому існує не більше, ніж $2m+2$ циліндричних відрізків рангу m, об'єднання яких містить I. Покладемо $f(d(I)) = 2m+2$, $c = 1$, $\beta = 1$. Тоді, очевидно, всі умови теореми 1 виконуються і, отже, СЛТП Φ є довірчим.

Означення 6. СЛТП Φ називається *недовірчим сімейством покриттів* для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на (M, ρ), якщо $\exists E \subseteq M\colon\ \dim_H(E,\Phi) \neq \dim_H(E)$.

Якщо Φ недовірча для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича, то вона породжує міру Хаусдорфа $H^{\alpha}(\cdot,\Phi)$, яка не є порівнянною з класичною мірою Хаусдорфа.

Парадоксальним, на перший погляд, може видатись той факт, що перші приклади недовірчих СЛТП спочатку були відкриті для двовимірного випадку при вивченні фрактальних властивостей самоафінних множин протягом останнього десятиліття XX ст. (див., наприклад, [12]). Природно постає питання про існування довірчих СЛТП, які не є порівнянними. З цією метою дослідимо сімейство циліндрів, породжених $\widetilde{Q}$-зображенням, для випадку, коли існує послідовність натуральних чисел $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $n_k > 1$ така, що $q_{ik} = 1/n_k$, $\forall\, i \in \{0,1,\ldots,n_k-1\}$. У цьому випадку $\widetilde{Q}$-зображення дійсних чисел збігається з класичним розкладом Кантора [13].

Нижчеподана теорема показує суттєву різницю між поняттями довірчості та порівнянності сімейства покриттів.

Теорема 3. *Нехай* $n_k = 4^k$ *та* Φ *— сімейство циліндричних відрізків розкладу Кантора. Тоді СЛТП* Φ *є довірчим для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на одиничному відрізку, але породжена ним міра Хаусдорфа* $H^{\alpha}(\cdot,\Phi)$ *є непорівнянною з класичною мірою Хаусдорфа.*

Доведення. Розглянемо множину

$$A = \left\{x \in [0,1]\colon x = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k(x)}{\prod_{i=1}^{k} n_i},\ \alpha_k(x) \in \{0,1,\ldots,2^k-1\},\ \forall\, k \in \mathbb{N}\right\}$$

і доведемо, що $\dim_H A = 1/2$, $H^{1/2}(A,\Phi) \geqslant 1$ та $H^{1/2}(A) = 0$.

Нехай λ — міра Лебега на одиничному інтервалі та μ_ξ — ймовірнісна міра випадкової величини

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k}{\prod_{i=1}^{k} n_i},$$

де ξ_k — незалежні випадкові величини, які набувають значень $0, 1, \ldots, 2^k-1$ з ймовірностями $1/2^k$. Нехай $\Delta_n(x)$ — циліндр n-го рангу розкладу Кантора, який містить точку $x \in [0,1]$. Зрозуміло, що для будь-якої точки $x \in A$ виконується

$$\mu_\xi(\Delta_n(x)) = 2^{-n(n+1)/2} \qquad \text{та} \qquad \lambda(\Delta_n(x)) = 4^{-n(n+1)/2}.$$

Отже,

$$\frac{\ln \mu_\xi(\Delta_n(x))}{\ln \lambda(\Delta_n(x))} = \frac{1}{2}, \qquad \forall\, x \in A. \tag{3}$$

Оскільки A — спектр міри μ_ξ, то, використовуючи теорему 2.5 з [6], отримуємо $\dim_H(A,\Phi) = 1/2$. Нехай δ — довільне додатне число. Тоді існує мінімальне $k_0 \in N$ таке, що $\forall\, k > k_0$ виконується нерівність $2 \cdot 4^{k-\frac{k(k+1)}{2}\delta} \leqslant 1$. Для k_0 виберемо довільне $\varepsilon_1(\delta) \in (1/4^{\frac{k_0(k_0+1)}{2}}, 1/4^{\frac{k_0(k_0-1)}{2}})$. Нехай I — довільний сегмент $< a,\, b >$ та $d(I) < \varepsilon_1(\delta)$. Для кожного сегмента I існує мінімальне значення $m := k(d(I))$ таке, що $1/4^{\frac{m(m+1)}{2}} < d(I)$. Існує не більше, ніж $2 \cdot 4^m$ циліндрів рангу m, об'єднання яких містить I. Покладемо $f(d(I)) = 2 \cdot 4^m$, $c = 1$, $\beta = 1$. Тоді, очевидно, всі умови теореми 1 виконуються і, отже, СЛТП Φ є довірчим.

Нехай $\{E_j\}$ — довільне ε-покриття множини A циліндрами з Φ. Не зменшуючи загальності $E_j \bigcap A \neq \varnothing$, тобто $E_j = \Delta_{n_j}(x)$ для деякого $x \in A$. Нерівність

$$1 = \mu(A) = \mu\left(\bigcup_j E_j\right) \leqslant \sum_j \mu(E_j) = \sum_j d(E_j)^{1/2}$$

виконується для кожного ε-покриття множини A циліндрами з Φ. Отже, $H^{1/2}(A,\Phi) \geqslant 1$.

З іншого боку, множину A можна покрити $2^1 \cdot 2^2 \cdot \cdots \cdot 2^{k-1} \cdot 1$ відрізками (кожен з них є об'єднанням 2^k циліндричних відрізків k-го рангу) довжини 2^{-k^2}. Відповідний α-об'єм цього покриття (при $\alpha = 1/2$) дорівнює $2^{(k-1)k/2} \cdot (2^{-k^2})^{1/2} \to 0$ $(k \to \infty)$. Тому $H^{1/2}(A) = 0$, що і доводить теорему.

Зауваження 1. Останнє твердження є доказом суттєвої різниці між порівнянними та довірчими сімействами покриттів та показує, що клас довірчих сімейств покриттів значно ширший за клас порівнянних. Співвідношення між цими двома класами в певному сенсі подібне до співвідношення між біліпшецевими перетвореннями та перетвореннями, які зберігають розмірність Хаусдорфа–Безиковича (див. [14]).

1. *Beresnevich V., Velani S.* A mass transference principle and the Duffin–Schaeffer conjecture for Hausdorff measures // Ann. of Math. – 2006. – **164**. – P. 971–992.
2. *Zhou Z., Feng L.* Twelve open problems on the exact value of the Hausdorff measure and on topological entropy: a brief survey of recent results // Nonlinearity. – 2004. – **17**, No 2. – P. 493–502.
3. *Baranski K.* Hausdorff dimension of the limit sets of some planar geometric constructions // Adv. Math. – 2007. – **210**. – P. 215–245.
4. *Rogers C.* Hausdorff measures. – London: Cambridge Univ. Press, 1970. – 179 p.
5. *Besicovitch A.* On existence of subsets of finite measure of sets of infinite measure // Indag. Math. – 1952. – **14**. – P. 339–344.
6. *Billingsley P.* Hausdorff dimension in probability theory II // Ill. J. Math. – 1961. – **5**. – P. 291–198.
7. *Турбин А. Ф., Працевитый Н. В.* Фрактальные множества, функции, распределения. – Киев: Наук. думка, 1992. – 208 с.

8. *Albeverio S., Torbin G.* Fractal properties of singularly continuous probability distributions with independent Q^*-digits // Bull. Sci. Math. – 2005. – **129**, No 4. – P. 356–367.
9. *Cutler C.* A note on equivalent interval covering systems for Hausdorff dimension on R // Internat. J. Math. and Math. Sci. – 1988. – **2**, No 4. – P. 643–650.
10. *Працьовитий М. В., Торбін Г. М.* Аналітичне (символьне) представлення неперервних перетворень R^1, що зберігають розмірність Хаусдорфа–Безиковича // Наук. зап. НПУ ім. М. П. Драгоманова. Фіз.-мат. науки. – 2003. – **4**, № 1. – 207–215 с.
11. *Albeverio S., Koshmanenko V., Pratsiovytyi M., Torbin G.* On fine structure of singularly continuous probability measures and random variables with independent $\widetilde{Q}$-symbols // Methods of Functional Analysis and Topology. – 2011. – **17**, No 2. – P. 97–111.
12. *Bernardi M., Bondioli C.* On some dimension problems for self-affine fractals // J. Anal. and its Appl. – 1999. – **18**, No 3. – P. 733–751.
13. *Erdös P., Renyi A.* Some further statistical properties of the digits in Cantor's series // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. – 1959. – **10**. – P. 207–215.
14. *Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G.* Fractal probability distributions and transformations preserving the Hausdorff–Besicovitch dimension // Ergodic Theory and Dynamical Systems. – 2004. – **24**, No 1. – P. 1–16.

Білефельдський університет, Німеччина
Національний педагогічний університет
ім. М. П. Драгоманова, Київ
Інститут математики НАН України, Київ

Надійшло до редакції 17.02.2014

Н. В. Лебедь, Г. М. Торбин

О сравнимых и несравнимых мерах Хаусдорфа

Развитие общих методов вычисления размерности Хаусдорфа–Безиковича — одна из з центральных проблем теории фракталов. Исследована тривиальность (нетривиальность) сетевых мер Хаусдорфа. Найдены достаточные условия, при выполнении которых семейства локально тонких покрытий порождают сравнимые сетевые меры Хаусдорфа $H^\alpha(\cdot, \Phi)$. *Также найдены общие достаточные условия доверительности для вычисления размерности Хаусдорфа–Безиковича локально тонких систем покрытий. Доказана доверительность семейства цилиндрических отрезков факториальной системи исчисления. Показано, что класс доверительных покрытий существенно шире класса покрытий, порождающих сравнимые сетевые меры Хаусдорфа.*

M. V. Lebid, G. M. Torbin

On comparable and non-comparable Hausdorff measures

General methods of calculation of the Hausdorff–Besicovitch dimension are developed, and the triviality (non-triviality) of net Hausdorff measures is studied. Sufficient conditions for a fine covering family to generate comparable net Hausdorff measures $H^\alpha(\cdot, \Phi)$ *are given. General sufficient conditions for a fine covering family to be faithful are also found. The faithfulness for the family of coverings generated by the factorial expansion for real numbers is proved. It is shown that the family of faithful coverings is essentially wider than the family of coverings generating the comparable net Hausdorff measures.*