УДК 519.21

Д. В. Затула, Ю. В. Козаченко

Умови Ліпшиця для випадкових процесів з банахових просторів $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ випадкових величин

(Представлено академіком НАН України М. О. Перестюком)

Досліджено ліпшицеву неперервність випадкових процесів з банахових просторів $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$, знайдено оцінки розподілу норм таких процесів.

Нехай $(\mathbb{T}, \rho)$ — деякий метричний простір. Будемо розглядати умови, за яких траєкторії випадкових процесів $X = (X(t), t \in \mathbb{T})$ задовольняють умову Ліпшиця. Зокрема, знайдемо функцію f — модуль неперервності, тобто таку, що

$$\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\sup\limits_{0<\rho(t,s)\leqslant\varepsilon} |X(t) - X(s)|}{f(\varepsilon)} \leqslant 1,$$

та оцінимо ймовірності

$$\mathsf{P}\left\{ \sup_{0<\rho(t,s)\leqslant v} \frac{|X(t) - X(s)|}{f(\rho(t,s))} > x \right\}$$

для випадкових процесів з просторів $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ випадкових величин, тобто банахових просторів з нормою

$$\|\xi\|_\psi = \sup_{u\geqslant 1} \frac{(\mathsf{E}|\xi|^u)^{1/u}}{\psi(u)},$$

де $\psi(u) > 0$ — деяка монотонно зростаюча функція. Такі простори були введені в роботі [1], а властивості випадкових величин та процесів з просторів $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ досліджені в роботі [2].

Для гауссових процесів модулі неперервності f були знайдені в роботі [3]. Ці результати були узагальнені для деяких класів процесів з просторів Орліча в [4, 5], а також у [6, 7]. Досліджена ліпшицева неперервність для узагальнених субгауссових процесів та знайдені оцінки розподілу норм таких процесів у роботі [8].

1. Умова А простору $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$.

Означення 1 [2]. Нехай $\psi(u) > 0$, $u \geqslant 1$, — деяка монотонно зростаюча функція така, що $\psi(u) \to \infty$ при $u \to \infty$. Випадкова величина ξ належить простору $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$, якщо виконується умова

$$\sup_{u\geqslant 1} \frac{(\mathsf{E}|\xi|^u)^{1/u}}{\psi(u)} \leqslant \infty.$$

У роботі [1] (див. також [2]) було доведено, що $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ є простором з нормою

$$\|\xi\|_\psi = \sup_{u\geqslant 1} \frac{(\mathsf{E}|\xi|^u)^{1/u}}{\psi(u)}.$$

Теорема 1 [2]. *Якщо випадкова величина ξ належить простору $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$, то $\forall\, x > 0$ виконується така нерівність:*

$$\mathsf{P}\{|\xi| > x\} \leqslant \inf_{u \geqslant 1} \frac{\|\xi\|_\psi^u (\psi(u))^u}{x^u}.$$

Теорема 2 [9]. *Якщо випадкова величина ξ належить $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ і $\psi(u) = e^{\alpha u^\beta}$, де $\alpha > 0$, $\beta > 0$, то для будь-якого $x > \|\xi\|_\psi$ виконується нерівність*

$$\mathsf{P}\{|\xi| > x\} \leqslant \exp\biggl\{-\frac{\beta}{\alpha^{1/\beta}}\biggl(\frac{\ln(x/\|\xi\|_\psi)}{\beta+1}\biggr)^{(\beta+1)/\beta}\biggr\}.$$

Надалі будемо розглядати простори $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$, які задовольняють нижченаведену умову.

Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — випадкові величини з простору $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$. Позначимо $\eta = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |\xi_k|$, $a = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \|\xi_k\|_\psi$.

Умова А. Існують функція $z(x) > 0$, монотонно зростаюча функція $U(n)$ та дійсне число $x_0 > 0$, що $\forall\, x > x_0$ виконується така нерівність:

$$\mathsf{P}\{\eta > xaU(n)\} \leqslant \frac{1}{n}\exp\{-z(x)\}.$$

Наведемо приклади просторів $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$, які задовольняють умову А.

Теорема 3. *Нехай $\psi(u) = e^{\alpha u^\beta}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Тоді нижченаведена нерівність виконується для $\forall\, x \geqslant \exp\biggl\{\biggl(\dfrac{\ln 3}{c\sqrt[\beta]{2}(\ln 3 - 1)}\biggr)^{2\beta/(\beta+1)}\biggr\}$, $c = \dfrac{\beta}{\alpha^{1/\beta}}(\beta+1)^{-(\beta+1)/\beta}$:*

$$\mathsf{P}\biggl\{\eta > xa\exp\Bigl\{(\ln(n+2))^{2\beta/(\beta+1)}\Bigr\}\biggr\} \leqslant \frac{1}{n}\exp\biggl\{-\frac{\beta}{\alpha^{1/\beta}}\biggl(\frac{2}{\beta+1}\biggr)^{(\beta+1)/\beta}(\ln x)^{(\beta+1)/(2\beta)}\biggr\}.$$

Теорема 4. *Нехай $\psi(u) = \exp\{c(\ln u)^\alpha\}$, $\alpha > 1$, $c > 0$. Тоді нижченаведена нерівність виконується для $\forall\, x \geqslant \exp\biggl\{c\biggl(\ln\dfrac{2\ln 3}{\ln 3 - 1}\biggr)^\alpha + 1\biggr\}$:*

$$\mathsf{P}\{\eta > xa(\exp\{(\ln\ln(n+2))^\alpha\})^c\} \leqslant \frac{1}{n}\exp\biggl\{-\exp\biggl\{\biggl(\frac{1}{c}\ln\frac{x}{e}\biggr)^{1/\alpha}\biggr\}\biggr\}.$$

2. Модулі неперервності та умови Ліпшиця для випадкових процесів з просторів $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ випадкових величин.

Теорема 5. *Нехай $(\mathbb{T}, \rho)$ — деякий метричний компактний простір. Розглянемо сепарабельний випадковий процес $X = (X(t), t \in \mathbb{T})$ з банахового простору $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$, що задовольняє умову А з функціями $U(n)$, $z(x)$ та $x_0 > 0$. Припустимо, що існує монотонно зростаюча неперервна функція $\sigma = \{\sigma(h), h \geqslant 0\}$ така, що $\sigma(0) = 0$ та виконується нерівність*

$$\sup_{\rho(t,s) \leqslant h} \|X(t) - X(s)\|_\psi \leqslant \sigma(h).$$

Нехай $N(\varepsilon) = N_\rho(\mathbb{T}, \varepsilon)$ — метрична масивність простору $(\mathbb{T}, \rho)$. Також нехай

$$\varepsilon_0 = \sigma^{(-1)}(\sup_{t,s \in \mathbb{T}} \rho(t,s));$$

$$g_B(\varepsilon) = \int\limits_0^{\sigma(\varepsilon)} U(B^2 N^2(\sigma^{(-1)}(t)))\, dt < \infty, \qquad \varepsilon > 0,$$

де $B > 1$ *— деяке число. Тоді для* $x > x_0$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *виконується така нерівність:*

$$\mathsf{P}\left\{ \sup_{0<\rho(t,s)\leqslant\varepsilon} \frac{|X(t) - X(s)|}{(6 + 4\sqrt{2}) f_B(\rho(t,s)) + (5 + 2\sqrt{6}) g_B(\rho(t,s))} > x \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2B^2 + B}{(B^2 - 1)N(\varepsilon)} \exp\{-z(x)\},$$

де $f_B(\varepsilon) = \int\limits_0^{\sigma(\varepsilon)} U(BN(\sigma^{(-1)}(t)))\, dt$, $\varepsilon > 0$.

Теорема 6. *Нехай виконуються усі припущення теореми 5. Тоді з імовірністю 1 має місце*

$$\limsup_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{\Delta(X; \varepsilon)}{(6 + 4\sqrt{2}) f_B(\varepsilon) + (5 + 2\sqrt{6}) g_B(\varepsilon)} \leqslant 1,$$

де

$$\Delta(X; \varepsilon) = \sup_{\substack{t,s\in\mathbb{T} \\ 0<\rho(t,s)\leqslant\varepsilon}} |X(t) - X(s)|,$$

$$f_B(\varepsilon) = \int\limits_0^{\sigma(\varepsilon)} U(BN(\sigma^{(-1)}(t)))\, dt, \qquad g_B(\varepsilon) = \int\limits_0^{\sigma(\varepsilon)} U(B^2 N^2(\sigma^{(-1)}(t)))\, dt < \infty, \qquad \varepsilon > 0.$$

З теореми 6 випливає такий наслідок:

Наслідок 1. *Для досить малих* v

$$\sup_{\rho(t,s)\leqslant v} |X(t) - X(s)| \leqslant (6 + 4\sqrt{2}) f_B(v) + (5 + 2\sqrt{6}) g_B(v)$$

з імовірністю 1.

3. Приклади.

Приклад 1. Нехай $\psi(u) = e^{\alpha u^\beta}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, та функція $\sigma(h) = dh^c$, h, c, $d > 0$.

Згідно з теоремою 3 та теоремою 5, для $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 = \sigma^{(-1)}(\sup\limits_{t,s\in\mathbb{T}} \rho(t,s))$, $B > 1$, $\forall\, N(\varepsilon) \geqslant 2$ та $\forall\, x \geqslant \exp\left\{ \left(\dfrac{\ln 3}{b \sqrt[\beta]{2} (\ln 3 - 1)} \right)^{(2\beta)/(\beta+1)} \right\}$, $b = \dfrac{\beta}{\alpha^{1/\beta}} (\beta + 1)^{-(\beta+1)/\beta}$ виконується така нерівність:

$$\mathsf{P}\left\{ \sup_{0<\rho(t,s)\leqslant\varepsilon} \frac{|X(t) - X(s)|}{\gamma_B(\rho(t,s))} > x \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2B^2 + B}{(B^2 - 1)N(\varepsilon)} \exp\left\{ -\frac{\beta}{\alpha^{1/\beta}} \left(\frac{2}{\beta + 1} \right)^{(\beta+1)/\beta} (\ln x)^{(\beta+1)(2\beta)} \right\},$$

де

$$\gamma_B(\varepsilon) = (6+4\sqrt{2})\int\limits_0^{d\varepsilon^c} \exp\biggl\{\biggl(\ln\biggl(BN\biggl(\sqrt[c]{\frac{t}{d}}\biggr)+2\biggr)\biggr)^{2\beta/(\beta+1)}\biggr\}dt +$$

$$+ (5+2\sqrt{6})\int\limits_0^{d\varepsilon^c} \exp\biggl\{\biggl(\ln\biggl(B^2N^2\biggl(\sqrt[c]{\frac{t}{d}}\biggr)+2\biggr)\biggr)^{2\beta/(\beta+1)}\biggr\}dt.$$

Більше того, відповідно до теореми 6 з імовірністю 1 має місце

$$\limsup_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{\sup\limits_{0<\rho(t,s)\leqslant\varepsilon}|X(t)-X(s)|}{\gamma_B(\varepsilon)} \leqslant 1.$$

Тепер розглянемо простір $\mathbb{T}=[0,T]$. Оскільки метрична масивність $N(u)$ — це найменша кількість елементів в u-покритті простору $\mathbb{T}$ (у даному випадку відрізку $[0,T]$), то $T/(2u) \leqslant N(u) \leqslant T/(2u)+1$. Або ж для функції $\sigma^{(-1)}(u)$

$$N\biggl(\sqrt[c]{\frac{u}{d}}\biggr) = N(\sigma^{(-1)}(u)) \leqslant \frac{T}{2\sigma^{(-1)}(u)}+1 = \frac{T}{2\sqrt[c]{\dfrac{u}{d}}}+1 = \frac{T}{2}\sqrt[c]{\frac{d}{u}}+1.$$

Тому, згідно з теоремою 5, для $\varepsilon\in(0,\min\{\varepsilon_0,T/2\})$, $\beta\in(0,1)$, $c>1$, $B>1$ та $\forall x \geqslant \exp\biggl\{\biggl(\dfrac{\ln 3}{b\sqrt[\beta]{2}(\ln 3-1)}\biggr)^{2\beta/(\beta+1)}\biggr\}$, $b=\dfrac{\beta}{\alpha^{1/\beta}}(\beta+1)^{-(\beta+1)/\beta}$ виконується така нерівність:

$$\mathsf{P}\biggl\{\sup_{0<\rho(t,s)\leqslant\varepsilon}\frac{|X(t)-X(s)|}{\gamma_{1,B}(\rho(t,s))} > x\biggr\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\varepsilon(2B^2+B)}{T(B^2-1)}\exp\biggl\{-\frac{\beta}{\alpha^{1/\beta}}\biggl(\frac{2}{\beta+1}\biggr)^{(\beta+1)/\beta}(\ln x)^{(\beta+1)/(2\beta)}\biggr\},$$

де

$$\gamma_{1,B}(\varepsilon) = (6+4\sqrt{2})\int\limits_0^{d\varepsilon^c}\exp\biggl\{\biggl(\ln\biggl(B\biggl(\frac{T}{2}\sqrt[c]{\frac{d}{t}}+1\biggr)+2\biggr)\biggr)^{2\beta/(\beta+1)}\biggr\}dt +$$

$$+ (5+2\sqrt{6})\int\limits_0^{d\varepsilon^c}\exp\biggl\{\biggl(\ln\biggl(B^2\biggl(\frac{T}{2}\sqrt[c]{\frac{d}{t}}+1\biggr)^2+2\biggr)\biggr)^{2\beta/(\beta+1)}\biggr\}dt.$$

Більше того, відповідно до теореми 6, з імовірністю 1 має місце

$$\limsup_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{\sup\limits_{0<\rho(t,s)\leqslant\varepsilon}|X(t)-X(s)|}{\gamma_{1,B}(\varepsilon)} \leqslant 1.$$

Приклад 2. Нехай $\psi(u)=e^{\alpha u^\beta}$, $\alpha>0$, $\beta>0$, та функція $\sigma(h)=\dfrac{1}{\ln(1/h+1)}$, $h>0$.

Згідно з теоремою 3 та теоремою 5, для $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 = \sigma^{(-1)}(\sup_{t,s \in \mathbb{T}} \rho(t,s))$, $B > 1$, $\forall\, N(\varepsilon) \geqslant 2$ та $\forall\, x \geqslant \exp\left\{\left(\dfrac{\ln 3}{c\sqrt[\beta]{2}(\ln 3 - 1)}\right)^{2\beta/(\beta+1)}\right\}$, $c = \dfrac{\beta}{\alpha^{1/\beta}}(\beta+1)^{-(\beta+1)/\beta}$ виконується така нерівність:

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{0<\rho(t,s)\leqslant\varepsilon} \leqslant \frac{|X(t)-X(s)|}{\gamma_B(\rho(t,s))} > x\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2B^2+B}{(B^2-1)N(\varepsilon)} \exp\left\{-\frac{\beta}{\alpha^{1/\beta}}\left(\frac{2}{\beta+1}\right)^{(\beta+1)/\beta} (\ln x)^{(\beta+1)/(2\beta)}\right\},$$

де

$$\gamma_B(\varepsilon) = (6+4\sqrt{2}) \int\limits_0^{\left(\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}+1\right)\right)^{-1}} \exp\left\{\left(\ln\left(BN\left(\frac{1}{e^{1/t}-1}\right)+2\right)\right)^{2\beta/(\beta+1)}\right\}dt +$$
$$+ (5+2\sqrt{6}) \int\limits_0^{\left(\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}+1\right)\right)^{-1}} \exp\left\{\left(\ln\left(B^2N^2\left(\frac{1}{e^{1/t}-1}\right)+2\right)\right)^{2\beta/(\beta+1)}\right\}dt.$$

Більше того, відповідно до теореми 6, з імовірністю 1 має місце

$$\limsup_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{\sup\limits_{0<\rho(t,s)\leqslant\varepsilon} |X(t)-X(s)|}{\gamma_B(\varepsilon)} \leqslant 1.$$

Тепер розглянемо простір $\mathbb{T} = [0, T]$. Має місце нерівність для метричної масивності

$$N\left(\frac{1}{e^{1/u}-1}\right) = N(\sigma^{(-1)}(u)) \leqslant \frac{T}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1 = \frac{T(e^{1/u}-1)}{2} + 1.$$

Тому, згідно з теоремою 5, для $\varepsilon \in (0, \min\{\varepsilon_0, T/2\})$, $\forall\, x \geqslant \exp\left\{\left(\dfrac{\ln 3}{c\sqrt[\beta]{2}(\ln 3 - 1)}\right)^{2\beta/(\beta+1)}\right\}$, $c = \dfrac{\beta}{\alpha^{1/\beta}}(\beta+1)^{-(\beta+1)/\beta}$, $\beta \in (0,1)$ та $B > 1$ виконується така нерівність:

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{0<\rho(t,s)\leqslant\varepsilon} \frac{|X(t)-X(s)|}{\gamma_{1,B}(\rho(t,s))} > x\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2\varepsilon(2B^2+B)}{T(B^2-1)} \exp\left\{-\frac{\beta}{\alpha^{1/\beta}}\left(\frac{2}{\beta+1}\right)^{(\beta+1)/\beta} (\ln x)^{(\beta+1)/(2\beta)}\right\},$$

де

$$\gamma_{1,B}(\varepsilon) = (6+4\sqrt{2}) \int\limits_0^{\left(\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}+1\right)\right)^{-1}} \exp\left\{\left(\ln\left(\frac{BT(e^{1/t}-1)}{2} + B + 2\right)\right)^{2\beta/(\beta+1)}\right\}dt +$$

$$+ (5+2\sqrt{6}) \int\limits_0^{\left(\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}+1\right)\right)^{-1}} \exp\left\{\left(\ln\left(B^2\left(\frac{T(e^{1/t}-1)}{2}+1\right)^2+2\right)\right)^{2\beta/(\beta+1)}\right\}dt.$$

Більше того, відповідно до теореми 6, з імовірністю 1 має місце

$$\limsup_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{\sup\limits_{0<\rho(t,s)\leqslant\varepsilon}|X(t)-X(s)|}{\gamma_{1,B}(\varepsilon)}\leqslant 1.$$

Таким чином, отримано оцінку розподілу величини $\sup\limits_{0<\rho(t,s)\leqslant\varepsilon}\dfrac{|X(t)-X(s)|}{f(\rho(t,s))}$, де $f(\varepsilon) = \gamma_{1,B}(\varepsilon)$ — модуль неперервності, а також умову Ліпшиця для випадкових процесів з простору $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$, $\psi(u) = e^{\alpha u^\beta}$.

1. *Ермаков С. В., Островский Е. И.* Условия непрерывности, экспоненциальные оценки и центральная предельная теорема для случайных полей // Деп. в ВИНИТИ № 3752-В.86.0. – 1986.
2. *Козаченко Ю. В., Млавець Ю. Ю.* Простори Банаха випадкових величин $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ // Теорія ймовірностей та матем. статистика. – 2012. – № 86. – С. 92–107.
3. *Dudley R. M.* Sample functions of the Gaussian processes // Ann. Probab. – 1973. – **1**, No 1. – P. 3–68.
4. *Kozachenko Yu. V.* Random processes in Orlicz spaces. I // Theory Probab. Math. Stat. – 1985. – No 30. – P. 103–117.
5. *Kozachenko Yu. V.* Random processes in Orlicz spaces. II // Ibid. – 1985. – No 31. – P. 51–58.
6. *Buldygin V. V., Kozachenko Yu. V.* Metric Characterization of Random Variables and Random Processes. – Providence, RI: AMS, 2000. – 256 p.
7. *Zatula D. V.* Modules of continuity of random processes from Orlicz spaces of random variables, defined on the interval // Bull. Taras Shevchenko Nat. Univ. Kyiv. Ser. Phys. & Math. – 2013. – No 2. – P. 23–28.
8. *Kozachenko Yu., Sottinen T., Vasylyk O.* Lipschitz conditions for $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$-processes and applications to weakly self-similar processes with stationary increments // Theor. Probab. and Math. Statist. – 2011. – No 82. – P. 57–73.
9. *Млавець Ю. Ю.* $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ – простори випадкових величин з експоненціальною функцією ψ // Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Сер. фіз.-мат. науки. – 2012. – № 2. – С. 19–22.

Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 25.02.2014

Д. В. Затула, Ю. В. Козаченко

Условия Липшица для случайных процессов из банаховых пространств $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ случайных величин

Исследована липшицева непрерывность случайных процессов из банаховых пространств $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$, найдены оценки распределения норм таких процессов.

D. V. Zatula, Yu. V. Kozachenko

Lipschitz conditions for random processes from Banach spaces $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ of random variables

We study the Lipschitz continuity of random processes from Banach spaces $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ and obtain the estimates for a distribution of the norms of such processes.