УДК 512.544

Л. А. Курдаченко, О. О. Пипка, М. М. Семко

Періодичні групи, циклічні підгрупи яких є зростаючими або майже самонормалізованими

(Представлено академіком НАН України А. М. Самойленком)

Вивчаються структури локально скінченних груп, всі циклічні підгрупи яких є або зростаючими (відповідно субнормальними), або мають скінченний індекс у своєму нормалізаторі. Наведено їх опис і властивості.

Ключові слова: періодичні групи, локально скінченні групи.

З кожною підгрупою групи G пов'язані деякі природні системи підгруп. Розглянемо одну з таких систем. Нехай H — підгрупа групи G. Побудуємо зростаючий ряд

$$\langle 1\rangle = H_0 \leqslant H_1 \leqslant \ldots H_\alpha \leqslant H_{\alpha+1} \leqslant \ldots H_\gamma \leqslant H_{\gamma+1} = G,$$

де $H_1 = H$, $H_2 = \mathbf{N}_G(H)$, $H_{\alpha+1} = \mathbf{N}_G(H_\alpha)$, $H_\lambda = \bigcup\limits_{\mu<\lambda} H_\mu$ у випадку, коли λ є граничним порядковим числом, $\alpha < \gamma$, та $\mathbf{N}_G(H_\gamma) = H_\gamma$. Цей ряд називається *верхнім нормалізаторним рядом.* Тут зразу виникають два природних типи підгруп. Якщо $H_\gamma = G$, то підгрупа H називається *зростаючою.* Якщо $H_\gamma = H$ (тобто зразу $H = \mathbf{N}_G(H)$), то підгрупа H називається *самонормалізованою.* Інакше кажучи, ми можемо бачити, що кожна підгрупа групи природним чином пов'язана з двома типами підгруп: зі зростаючими та самонормалізованими підгрупами. Наявність досить великої системи зростаючих підгруп справляє сильний вплив на будову групи. Наприклад, якщо кожна підгрупа групи G є зростаючою, то вся група G локально нільпотентна [1]. Більш того, якщо кожна циклічна підгрупа групи G буде зростаючою, то група G також буде локально нільпотентною [2, теорема 2]. Навіть точніше, підгрупа $\mathrm{Gru}(G)$ довільної групи G, породжена всіма циклічними підгрупами, що є зростаючими в групі G, є локально нільпотентною. Ця підгрупа є очевидно характеристичною і називається *радикалом Грюнберга* групи G. Кожна скінченно породжена підгрупа $\mathrm{Gru}(G)$ є нільпотентною і зростаючою в G [2, теорема 2]. Група G називається *групою Грюнберга*, якщо $G = \mathrm{Gru}(G)$.

Важливим частинним випадком зростаючих підгруп є субнормальні підгрупи, тобто зростаючі підгрупи, для яких верхній нормалізаторний ряд є скінченним. Підгрупа $\mathbf{B}(G)$, породжена усіма циклічними субнормальними підгрупами групи G, називається *радикалом Бера* групи G. Кожна скінченно породжена підгрупа $\mathbf{B}(G)$ нільпотентна і субнормальна в G (див., наприклад, [3, теорема 2.5.1]), так що підгрупа $\mathbf{B}(G)$ є локально нільпотентною. Слід зазначити, що у загальному випадку радикали Бера і Грюнберга можуть не збігатися між собою. Група G називається *групою Бера*, якщо $G = \mathbf{B}(G)$. Також зазначимо, що будова груп Грюнберга і Бера може бути досить складною.

Досить часто виявляється, що ситуація, коли множина всіх підгруп (всіх циклічних підгруп або всіх скінченно породжених підгруп) розпадається на дві частини, а підгрупи з цих двох частин мають протилежні, чи навіть антагоністично протилежні, властивості, є значно простішою і такі групи мають досить прозору структуру. Якщо H — нормальна підгрупа групи G, то $H^G = H$. Таким чином, підгрупа H, для якої $H^G = G$, є природним антиподом нормальної підгрупи. Такі підгрупи називають *контранормальними*. Природними антиподами для зростаючих та субнормальних підгруп є самонормалізовані підгрупи. Групи, кожна підгрупа яких є субнормальною або самонормалізованою, вивчались у роботі Л. А. Курдаченка та Х. Сміта [4]. Л. А. Курдаченко, Х. Отал, А. Руссо та Дж. Вінчензі у роботі [5] розглянули групи, кожна скінченно породжена підгрупа яких є або зростаючою, або самонормалізованою. Скориставшись результатами цієї роботи, неважко побачити, що локально скінченні групи, кожна циклічна підгрупа яких є або зростаючою, або самонормалізованою, має таку ж саму будову. Ми розглянемо більш загальну ситуацію.

Нехай H — підгрупа групи G. Підгрупу H будемо називати *майже самонормалізованою*, якщо H має скінченний індекс у своєму нормалізаторі.

У даній роботі розглядаються групи, кожна циклічна підгрупа яких є або зростаючою, або майже самонормалізованою. Основним її результатом є така теорема.

Теорема А. *Нехай G — нескінченна локально скінченна група, кожна циклічна підгрупа якої є або зростаючою, або майже самонормалізованою. Припустимо також, що G не є групою Грюнберга. Тоді вона має такі властивості:*

(i) фактор-група $F = G/\mathrm{Gru}(G)$ є скінченною;

(ii) $G = Q \rtimes R$, де Q — нормальна силовська σ'-підгрупа G, R — силовська σ-підгрупа G, де $\sigma = \mathbf{\Pi}(G/\mathrm{Gru}(G))$;

(iii) R — черніковська підгрупа;

(iv) $\mathrm{Gru}(G) = C_R(Q) \times Q$;

(v) якщо $g \notin \mathrm{Gru}(G)$, то $C_G(g)$ є скінченним;

(vi) радикал Грюнберга $\mathrm{Gru}(G)$ є майже нільпотентною підгрупою.

Відносно структури фактор-групи $G/\mathrm{Gru}(G)$ також можна отримати додаткову інформацію.

Наслідок А1. *Нехай G — нескінченна локально скінченна група, кожна циклічна підгрупа якої є або зростаючою, або майже самонормалізованою, та нехай $F = G/\mathrm{Gru}(G)$, $\sigma = \mathbf{\Pi}(F)$. Припустимо, що силовська σ'-підгрупа G є нескінченною. Тоді*

(i) якщо $r \in \sigma$ та $r \neq 2$, то силовська r-підгрупа F є циклічною;

(ii) силовська 2-підгрупа F є циклічною або узагальненою групою кватерніонів;

(iii) кожна підгрупа F, що має порядок rq, $r, q \in \sigma$, є циклічною.

Нехай G — черніковська група та D — її подільна частина. Покладемо $\mathrm{Sp}(G) = \mathbf{\Pi}(D)$.

Наслідок А2. *Нехай G — нескінченна локально скінченна група, кожна циклічна підгрупа якої є або зростаючою, або майже самонормалізованою, та нехай $F = G/\mathrm{Gru}(G)$, $\sigma = \mathbf{\Pi}(F)$. Припустимо, що силовська σ'-підгрупа G є скінченною та $\mathrm{Sp}(G) = \{p\}$ для деякого $p \in \sigma$. Тоді*

(i) якщо q — просте число і $q \notin \{2, p\}$, то силовська q-підгрупа F є циклічною;

(ii) якщо $p \neq 2$, то силовська 2-підгрупа F є циклічною або узагальненою групою кватерніонів.

Наслідок А3. *Нехай G — нескінченна локально скінченна група, кожна циклічна підгрупа якої є або зростаючою, або майже самонормалізованою, та нехай $F = G/\mathrm{Gru}(G)$, $\sigma = \mathbf{\Pi}(F)$. Припустимо, що силовська σ'-підгрупа G є скінченною та $|\mathrm{Sp}(G)| \geqslant 2$. Тоді*

(i) якщо $q \in \sigma$ і $q \neq 2$, то силовська q-підгрупа F є циклічною;

(ii) якщо $2 \in \sigma$, то силовська 2-підгрупа F є циклічною або узагальненою групою кватерніонів.

Використовуючи теорему А, ми маємо можливість отримати опис локально скінченних груп, кожна циклічна підгрупа яких є або субнормальною, або майже самонормалізованою.

Нехай G — група та A — її нормальна абелева підгрупа. Будемо говорити, що A є G-*квазіскінченною*, якщо A нескінченна, але кожна її власна G-інваріантна підгрупа скінченна.

Теорема В. *Нехай G — нескінченна локально скінченна група, кожна циклічна підгрупа якої є або субнормальною, або майже самонормалізованою. Припустимо також, що G не є групою Бера. Тоді вона має такі властивості:*

(i) фактор-група $F = G/\mathbf{B}(G)$ є скінченною;

(ii) $G = Q \rtimes R$, де Q — нормальна силовська σ'-підгрупа G, R — силовська σ-підгрупа G, де $\sigma = \mathbf{\Pi}(G/\mathbf{B}(G))$;

(iii) R — черніковська підгрупа;

(iv) $\mathbf{B}(G) = C_R(Q) \times Q$;

(v) якщо $g \notin \mathbf{B}(G)$, то $C_G(g)$ є скінченним;

(vi) $\mathbf{B}(G)$ містить у собі таку скінченну G-інваріантну σ-підгрупу K, що

$$\mathbf{B}(G)/K = QK/K \times U_1/K \times \ldots \times U_k/K,$$

де U_j/K — G-квазіскінченна подільна черніковська p_j-підгрупа, $p_j \in \sigma$, $1 \leqslant j \leqslant k$;

(vii) радикал Бера $\mathbf{B}(G)$ є нільпотентною підгрупою.

Оскільки кожна нормальна підгрупа є частинним випадком субнормальних підгруп, то неважко отримати такий наслідок.

Наслідок В1. *Нехай G — нескінченна локально скінченна група, кожна циклічна підгрупа якої є або нормальною, або майже самонормалізованою. Припустимо, що група G не є дедекіндовою. Тоді*

(i) якщо $g \notin \mathbf{B}(G)$, то $C_G(g)$ є скінченним;

(ii) фактор-група $F = G/\mathbf{B}(G)$ є скінченною та циклічною;

(iii) кожна підгрупа $\mathbf{B}(G)$ є G-інваріантною, зокрема, $\mathbf{B}(G)$ є дедекіндовою групою;

(iv) силовська 2-підгрупа $\mathbf{B}(G)$ є черніковською, більш того, якщо вона нескінченна, то $\mathbf{B}(G)$ є абелевою та фактор-група $G/\mathbf{B}(G)$ має порядок 2.

Цитована література

1. *Плоткин Б. И.* К теории локально нильпотентных групп // Докл. АН СССР. – 1951. – **76**. – С. 639–641.
2. *Gruenberg K. W.* The Engel elements of a soluble groups // Illinois J. Math. – 1959. – **3**. – P. 151–168.
3. *Lennox J. C., Stonehewer S. E.* Subnormal subgroups of groups. – Oxford: Clarendon Press, 1987. – 253 p.
4. *Kurdachenko L. A., Smith H.* Groups with all subgroups either subnormal or self-normalizing // J. Pure Appl. Algebra. – 2005. – **196**, No 2–3. – P. 271–278.
5. *Kurdachenko L. A., Otal J., Russo A., Vincenzi G.* Groups whose all subgroups are ascendant or self-normalizing // Centr. Europ. J. Math. – 2011. – **9**. – P. 420–432.

References

1. *Plotkin B. I.* Dokl. AN USSR, 1951, **76:** 639–641 (in Russian).
2. *Gruenberg K. W.* Illinois J. Math., 1959, **3**: 151–168.
3. *Lennox J. C., Stonehewer S. E.* Subnormal subgroups of groups, Oxford: Clarendon Press, 1987.
4. *Kurdachenko L. A., Smith H.* J. Pure Appl. Algebra, 2005, **196**, No 2–3: 271–278.
5. *Kurdachenko L. A., Otal J., Russo A., Vincenzi G.* Centr. Europ. J. Math., 2011, **9**: 420–432.

Дніпропетровський національний університет
ім. Олеся Гончара
Національний університет державної податкової
служби України, Ірпінь

Надійшло до редакції 06.05.2015

Л. А. Курдаченко, А. А. Пыпка, Н. Н. Семко

Периодические группы, циклические подгруппы которых являются возрастающими или почти самонормализованными

Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара
Национальный университет государственной налоговой службы Украины, Ирпень

Изучаются структуры локально конечных групп, все циклические подгруппы которых являются возрастающими (соответственно субнормальными) или имеют конечный индекс в своем нормализаторе. Приведены их описание и свойства.

Ключевые слова: периодические группы, локально конечные группы.

L. A. Kurdachenko, A. A. Pypka, N. N. Semko

Periodic groups, whose cyclic subgroups either are ascendant or almost self-normalized

Oles Honchar Dnipropetrovs'k National University
State Tax Service National University of Ukraine, Irpin

The structure of locale finite groups, whose cyclic subgroups either are ascendant (respectively, subnormal) or have finite index in their normalizers, is studied. Their description and properties are presented.

Keywords: periodic groups, locale finite groups.