УДК 519

Т. І. Сергієнко

Про існування парето-оптимальних розв'язків задачі векторної оптимізації з необмеженою допустимою областю

(Представлено членом-кореспондентом НАН України А. М. Гупалом)

Доведена достатня умова існування парето-оптимальних розв'язків векторної задачі з лінійними частковими критеріями оптимізації на необмеженій опуклій замкненій множині. Ця умова накладається на всі точки перетину рецесивного конусу множини допустимих розв'язків задачі та конусу, який частково впорядковує цю множину.

Ключові слова: векторна задача оптимізації, необмежена допустима множина, парето-оптимальні розв'язки.

Питання існування розв'язків є одним з основних, що виникає при дослідженні проблеми коректності оптимізаційних задач, у тому числі задач з векторним критерієм оптимізації. Немає сенсу розмірковувати про оптимальність розв'язків, поки не розглянуто питання їх існування. Метою даної роботи є встановлення умов існування парето-оптимальних розв'язків векторної оптимізаційної задачі з необмеженою множиною допустимих розв'язків на основі використання властивостей рецесивного конусу такої множини та конусу, що частково її впорядковує відносно критеріїв оптимізації.

Розглянемо задачу векторної оптимізації

$$Z(P(C,X))\colon\ \max\{Cx \mid x \in X\},$$

яка полягає в пошуку елементів множини $P(C,X)$ парето-оптимальних розв'язків. Тут X — необмежена опукла замкнена множина в $\mathbb{R}^n$; C –лінійне відображення з $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^\ell$ та відповідна йому матриця $C = [c_{ij}] \in \mathbb{R}^{\ell\times n}$, рядки $c_i = (c_{i1},\ldots,c_{in})$, $i \in \{1,\ldots,\ell\}$ якої являють собою набори коефіцієнтів лінійних цільових функцій $\langle c_i, x\rangle$, що складають векторний критерій $Cx = (\langle c_1, x\rangle,\ldots,\langle c_\ell, x\rangle)$ задачі $Z(P(C,X))$. Нагадаємо [1], що множина $P(C,X)$ складається з усіх точок x допустимої множини X, для яких виконується умова $\overline{\exists} y \in X : Cy \geqslant Cx$, $Cy \neq Cx$. Такі точки називаються розв'язками задачі $Z(P(C,X))$, оптимальними за Парето.

Образ допустимої множини X при відображенні C позначимо $Y = CX = \{z = Cx \in \in \mathbb{R}^\ell \mid x \in X\} \neq \varnothing$, $Y \neq \varnothing$. Відзначимо, що за теоремою 3.4 [2] з опуклості множини X в $\mathbb{R}^n$ випливає опуклість її образу Y в $\mathbb{R}^\ell$.

Необмеженість множини X допустимих розв'язків означає, що її рецесивний конус 0^+X обов'язково містить в собі точки, відмінні від початку координат, тобто $0^+X \setminus \{0\} \neq \varnothing$, де, згідно з [2], $0^+X = \{y \in \mathbb{R}^n \mid x + \lambda y \in X\,\forall x \in X, \lambda \geqslant 0\}$. Позначимо також $L_X = = (-0^+X)\bigcap 0^+X$ лінійну підмножину множини X.

Дослідження умов існування парето-оптимальних розв'язків векторної оптимізаційної задачі $Z(P(C,X))$ проводитимемо з урахуванням властивостей рецесивного конуса 0^+X і багатогранного конуса

$$K = K(C) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Cx \geqslant 0\},$$

який упорядковує (частково) множину X допустимих розв'язків задачі відносно векторного критерія оптимізації $(\langle c_1, x\rangle, \ldots, \langle c_\ell, x\rangle)$ таким чином, що перехід з будь-якої точки $x \in X$ у деяку точку $x + y \in X$ за умови, що $y \in K$, приводить до нерівності $C(x+y) \geqslant Cx$, тобто до можливого зростання, проте не до зменшення значень усіх часткових критеріїв задачі в точці $x + y$ порівняно з точкою x.

Упорядковуючий конус K можна подати у вигляді об'єднання трьох його підмножин, що не перетинаються:

$$K = K_0 \bigcup K_1 \bigcup K_2,$$

де $K_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Cx = 0\}$ — ядро лінійного відображення C [3], $K_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Cx > 0\}$ — внутрішність конуса K; $K_2 = K \setminus (K_0 \bigcup K_1)$. Очевидно, для довільної точки $x \in X$ істинним є висловлювання

$$x \in P(C, X) \Leftrightarrow (x + (K_1 \bigcup K_2)) \bigcap X = \varnothing.$$

Продовжуючи дослідження з коректності векторних оптимізаційних задач, наведені, зокрема, в роботах [4–14], доведемо таку умову існування парето-оптимальних розв'язків задачі $Z(P(C, X))$.

Теорема. *Достатньою умовою існування парето-оптимальних розв'язків задачі $Z(P(C, X))$ є збіг множини всіх спільних точок упорядковуючого конуса K і рецесивного конуса O^+X з перетином ядра K_0 лінійного відображення C і лінійної підмножини L_X допустимої множини X, тобто*

$$K \bigcap O^+X = K_0 \bigcap L_X. \tag{1}$$

Зауваження 1. Включення

$$K \bigcap O^+X \subset K_0, \tag{2}$$

яке випливає з умови (1), є необхідною умовою існування парето-оптимальних розв'язків задачі $Z(P(C, X))$, що доведено, зокрема, в роботі [6].

Доведення теореми. Застосуємо до задачі $Z(P(C, X))$ теорему 1 [1, §3.2], де стверджується, що з умови компактності кожної множини вигляду $R(y) = \{z \in Y \mid z \geqslant y\}$, де $y \in Y$, випливає непорожність оптимальної множини задачі: $P(C, X) \neq \varnothing$. Доведемо, що $\forall y \in Y$ множина $R(y)$є компактною, тобто замкненою і обмеженою одночасно. Для цього подамо множину$R(y)$ як перетин опуклої множини Y та поліедральної (отже, опуклої і замкненої) множини $\overline{R}(y) = \{z \in \mathbb{R}^\ell \mid z \geqslant y\}$:

$$R(y) = Y \bigcap \overline{R}(y). \tag{3}$$

Висновок щодо замкненості множини Y можна зробити, виходячи з теореми 3.7 [15], якщо врахувати, по-перше, що допустима множина X є непорожньою, опуклою та замкненою, а по-друге, що справедливим є включення

$$K_0 \bigcap O^+X \subset -O^+X,$$

яке випливає з умови (1). Отже, множина $Y = CX$ є замкненою і, крім того, згідно з теоремою 3.7 [15], справджуються співвідношення

$$0^+Y = 0^+(CX) = C(0^+X), \tag{4}$$

якими скористаємося далі. З формули (3) стає очевидним, що замкненість та опуклість множини $R(y)$ випливають відповідно з замкненості та опуклості множин Y і $\overline{R}(y)$.

Щодо обмеженості непорожньої замкненої опуклої множини $R(y)$, то, згідно з теоремою 8.4 [2], вона має місце тоді і тільки тоді, коли рецесивний конус множини $R(y)$ складається лише з нульового вектора. Отже, лишилося впевнитися, що $0^+R(y) = \{0\}$.

Прийнявши до уваги замкненість та опуклість множин Y і $\overline{R}(y)$, а також непорожність їхнього перетину, у відповідності до наслідку 8.3.3 [2] маємо $0^+R(y) = 0^+\overline{R}(y) \bigcap 0^+Y$. Використовуючи цю рівність і залучаючи формули (2) і (4), одержуємо низку співвідношень

$$0^+R(y) = \{z \in R^\ell \mid z \geqslant 0\} \bigcap C(0^+X) = \{z = Cx \mid Cx \geqslant 0, x \in 0^+X\} =$$
$$= \{z = Cx \mid x \in K \bigcap 0^+X\} = C(K \bigcap 0^+X) \subset C(K_0) = \{0\}.$$

З урахуванням зауваження 1 з доведеної теореми випливає такий наслідок.

Наслідок. *Якщо X — необмежена поліедральна множина вигляду $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\}$, де $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, то включення* (2) *є необхідною і достатньою умовою існування парето-оптимальних розв'язків задачі $Z(P(C, X))$.*

Справедливість цього твердження пов'язана з тим, що рецесивний конус поліедральної множини $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\}$ збігається з її лінійною підмножиною, тобто $0^+X = L_X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$.

Таким чином, доведено, що для векторної задачі з лінійними частковими критеріями оптимізації, визначеними на необмеженій опуклій замкненій множині, існують парето-оптимальні розв'язки, якщо всі спільні точки упорядковуючого и рецесивного конусів множини допустимих розв'язків задачі є точками перетину ядра лінійного відображення, яке визначає векторний критерій, з лінійною підмножиною допустимої множини.

Цитована література

1. *Подиновский В. В., Ногин В. Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – Москва: Наука, 1982. – 256 с.
2. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. – Москва: Мир, 1973. – 470 с.
3. *Чарин В. С.* Линейные преобразования и выпуклые множества. – Киев: Вища шк., 1978. – 191 с.
4. *Козерацкая Л. Н., Лебедева Т. Т., Сергиенко Т. И.* Задача частично целочисленной векторной оптимизации: вопросы устойчивости // Кибернетика. – 1991. – № 1. – С. 58–61.
5. *Сергиенко И. В., Козерацкая Л. Н., Кононова А. А.* Устойчивость и неограниченность задач векторной оптимизации // Кибернетика и систем. анализ. – 1997. – № 1. – С. 3–10.
6. *Сергиенко И. В., Лебедева Т. Т., Семенова Н. В.* О существовании решений в задачах векторной оптимизации // Кибернетика и систем. анализ. – 2000. – № 6. – С. 39–46.
7. *Лебедєва Т. Т., Семенова Н. В., Сергієнко Т. І.* До питання про розв'язуваність задач векторної оптимізації з необмеженою допустимою областю // Компьютерная математика. – 2001. – **2**. – С. 221–227.
8. *Лебедєва Т. Т., Семенова Н. В., Сергієнко Т. І.* Деякі умови оптимальності та розв'язуваності в задачах векторної оптимізації з опуклою допустимою множиною // Теорія оптимальних рішень. – 2002. – № 1. – С. 142–148.

9. *Лебедева Т. Т., Семенова Н. В., Сергієнко Т. І.* Умови оптимальності та розв'язуваності в задачах лінійної векторної оптимізації з опуклою допустимою множиною // Доп. НАН України. – 2003. – № 10. – С. 80–85.
10. *Kozeratska L., Forbes J. F., Goebel R. J., Kresta J. V.* Pertubred cones for analysis of uncertain multicriteria optimization problems // Linear algebra and its applications. – 2004. – No 378. – P. 203–229.
11. *Лебедева Т. Т., Семенова Н. В., Сергиенко Т. И.* Устойчивость векторных задач целочисленной оптимизации: взаимосвязь с устойчивостью множеств оптимальных и неоптимальних решений // Кибернетика и систем. анализ. – 2005. – № 4. – С. 90–100.
12. *Сергиенко Т. И.* Устойчивость по векторному критерию и ограничениям целочисленных задач поиска решений, оптимальных по Слейтеру и Смейлу // Компьютерная математика. – 2008. – № 1. – С. 145–151.
13. *Лебедева Т. Т., Сергиенко Т. И.* Разные типы устойчивости векторной задачи целочисленной оптимизации: общий подход // Кибернетика и сист. анализ. – 2008. – № 3. – С. 142–148.
14. *Лебедева Т. Т., Семенова Н. В., Сергиенко Т. И.* Свойства специальным образом возмущенных конусов, упорядочивающих множество допустимых решений векторной оптимизационной задачи относительно векторного критерия // Кибернетика и сист. анализ. – 2014. – **50**, № 5. – С. 71–77.
15. *Ржевский С. В.* Монотонные методы выпуклого прогаммирования. – Киев: Наук. думка, 1993. – 319 с.

References

1. *Podinovskyi V. V., Nogin V. D.* Pareto-optimal solutions of multicriteria problems, Moskva: Nauka, 1982 (in Russian).
2. *Rockafellar R.* Convex analysis, Moskva: Mir, 1973 (in Russian).
3. *Charin V. S.* Linear transformations and convex sets, Kiev: Vischa schkola, 1978 (in Russian).
4. *Kozeratskaya L. N, Lebedeva T. T., Sergienko T. I.* Kibernetika, 1991, No 1: 58–61 (in Russian).
5. *Sergienko I. V., Kozeratskaya L. N., Kononova A. A.* Kibernetika i sistemny analiz, 1997, No 1: 3–10 (in Russian).
6. *Sergienko I. V., Lebedeva T. T., Semenova N. V.* Kibernetika i sistemny analiz, 2000, No 6: 39–46 (in Russian).
7. *Lebedeva T. T., Semenova N. V., Sergienko T. I.* Komputernaya matematika, 2001, **2**: 221–227 (in Ukrainian).
8. *Lebedeva T. T., Semenova N. V., Sergienko T. I.* Teoriya optimalnih rishen, 2002, No 1: 142–148 (in Ukrainian).
9. *Lebedeva T. T., Semenova N. V., Sergienko T. I.* Dopov. NAN Ukraini, 2003, No 10: 80–85 (in Ukrainian).
10. *Kozeratska L., Forbes J. F., Goebel R. J., Kresta J. V.* Linear algebra and its applications, 2004, No 378: 203–229.
11. *Lebedeva T. T., Semenova N. V., Sergienko T. I.* Kibernetika i sistemny analiz, 2005, No 4: 90–100 (in Russian).
12. *Sergienko T. I.* Komputernaya matematika, 2008, No 1: 145–151(in Russian).
13. *Lebedeva T. T., Sergienko T. I.* Kibernetika i sistemny analiz, 2008, No 3: 142–148 (in Russian).
14. *Lebedeva T. T., Semenova N. V., Sergienko T. I.* Kibernetika i sistemny analiz, 2014, **50**, No 5: 71–77 (in Russian).
15. *Rzhevskyi S. V.* Monotone methods of convex programming, Kiev: Nauk. dumka, 1993 (in Russian).

Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова
НАН України, Київ

Надійшло до редакції 27.04.2015

Т. И. Сергиенко

О существовании парето-оптимальных решений задачи векторной оптимизации с неограниченной допустимой областью

Институт кибернетики им. В. М. Глушкова НАН Украины, Киев

Доказано достаточное условие существования парето-оптимальных решений векторной задачи с линейными частными критериями оптимизации на неограниченном выпуклом замкнутом множестве. Это условие накладывается на все точки пересечения рецессивного конуса множества допустимых решений задачи и конуса, частично упорядочивающего это множество.

Ключевые слова: векторная задача оптимизации, неограниченное допустимое множество, парето-оптимальные решения.

T. I. Sergienko

Existence of Pareto-optimal solutions to the vector optimization problem with an unbounded feasible set

V. M. Glushkov Institute of Cybernetics of the NAS of Ukraine, Kiev

The sufficient condition of existence of Pareto-optimal solutions to the vector optimization problem with partial linear optimization criteria and unbounded convex closed set of feasible solutions is proved. This condition is imposed on the intersection of the recessive cone of a feasible set and a cone which partially orders this set.

Keywords: vector optimization problem, unbounded feasible set, Pareto-optimal solutions.