Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

1 • 2015

МАТЕМАТИКА

УДК 517.927

В. А. Золотарев

Прямая и обратная задачи для конечномерных возмущений операторов

(Представлено академиком НАН Украины Е. Я. Хрусловым)

Проведен спектральный анализ самосопряженного оператора, который является конечномерным возмущением оператора второй производной на конечном отрезке. Описан спектр этого оператора и решена обратная спектральная задача, позволяющая по $n+1$ спектру восстановить возмущение. Приведена характеристика спектральных данных обратной задачи.

В работе изучаются прямая и обратная задачи для оператора $-d^2/dx^2 + K$, где K — произвольный конечномерный самосопряженный оператор.

1. Характеристическая функция. Пусть L_0 — самосопряженный оператор в $L^2_{(0,l)}$, $0 < l < \infty$,

$$(L_0 y)(x) = -y''(x), \tag{1}$$

где $y(x) \in W_2^2(0,l)$ и $y(0) = y(l) = 0$. Рассмотрим самосопряженный оператор L, являющийся конечномерным возмущением L_0 (1),

$$Ly = L_0 y + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \langle y, v_k \rangle v_k = -y''(x) + \int\limits_0^l y(t) \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overline{v_k(t)} v_k(x)\, dt, \tag{2}$$

область определения которого совпадает с областью определения L_0 (1), где $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $\alpha_k \neq 0$, $1 \leqslant k \leqslant n$; $\{v_k(x)\}_1^n$ — набор комплекснозначных линейно независимых функций из $L^2_{(0,l)}$; $n \in \mathbb{N}$.

Решение уравнения $Lu = zu$, где $z = \lambda^2$, для которого справедливо краевое условие $u(0,\lambda) = 0$, удовлетворяет интегральному уравнению

$$u(x,\lambda) = a(\lambda) \frac{\sin \lambda x}{\lambda} + \int\limits_0^x \frac{\sin \lambda (x-t)}{\lambda} \int\limits_0^l u(\xi,\lambda) \sum_k \alpha_k \overline{v_k(\xi)} v_k(t)\, d\xi dt, \tag{3}$$

где $a(\lambda)$ — некоторая функция от λ. Умножив (3) на $\overline{v_k(x)}$ и проинтегрировав от 0 до l, получим систему уравнений

$$b_k(\lambda) - \sum_{s=1}^{n} \alpha_s b_s(\lambda)\varphi_{s,k}(\lambda) = a(\lambda)\frac{\widetilde{v}_k^*(\lambda) - \widetilde{v}_k^*(-\lambda)}{2i\lambda}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n, \tag{4}$$

для функций $a(\lambda)$ и $\{b_k(\lambda)\}_1^n$, где

$$b_k(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^l u(x,\lambda)\overline{v_k(x)}\,dx, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n, \tag{5}$$

а

$$\widetilde{v}_k(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^l e^{-i\lambda x} v_k(x)dx; \qquad \widetilde{v}_k^*(\lambda) = \overline{v_k(\overline{\lambda})}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n. \tag{6}$$

Функции $\varphi_{s,k}(\lambda)$ равны

$$\varphi_{s,k}(\lambda) = \int_0^l v_s(t) \int_0^x \frac{\sin\lambda(x-t)}{\lambda}\overline{v_k(x)}\,dxdt = \frac{1}{2i\lambda}(\phi_{s,k}^*(\lambda) - \phi_{s,k}^*(-\lambda)), \qquad 1 \leqslant s,\, k \leqslant n, \tag{7}$$

где

$$\phi_{s,k}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^l e^{i\lambda t}\overline{v_s(t)} \int_t^l e^{-i\lambda x} v_k(x)\,dxdt, \qquad 1 \leqslant k, s \leqslant n. \tag{8}$$

Интегрируя по частям (8), получаем

$$\phi_{s,k}(\lambda) + \phi_{k,s}^*(\lambda) = \widetilde{v}_k(\lambda)\widetilde{v}_s^*(\lambda), \qquad 1 \leqslant s, k \leqslant n. \tag{9}$$

Соотношения (4) и краевое условие $u(l,\lambda) = 0$ для $u(x,\lambda)$ (3) дают систему линейных уравнений для $a(\lambda)$ и $\{b_k(\lambda)\}_1^n$:

$$\begin{cases} a(\lambda)\dfrac{\sin\lambda l}{\lambda} + \displaystyle\sum_k \alpha_k b_k(\lambda)\frac{1}{2i\lambda}\{e^{i\lambda l}\widetilde{v}_k(\lambda) - e^{-i\lambda l}\widetilde{v}_k(-\lambda)\} = 0; \\ a(\lambda)\dfrac{1}{2i\lambda}(\widetilde{v}_k^*(\lambda) - \widetilde{v}_k^*(-\lambda)) + \displaystyle\sum_s \alpha_s b_s(\lambda)\varphi_{s,k}(\lambda) - b_k(\lambda) = 0, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n. \end{cases} \tag{10}$$

Система уравнений (10) имеет нетривиальное решение $(a(\lambda), \{b_k(\lambda)\}_1^n)$ в том и только в том случае, когда ее определитель $\Delta(\lambda)$ равен нулю. Зададим функции

$$\psi_{s,k}(\lambda) = \widetilde{v}_s(\lambda)\widetilde{v}_k^*(-\lambda) - \phi_{s,k}^*(-\lambda) - \phi_{k,s}(\lambda) - \delta_{s,k}\frac{2i\lambda}{\alpha_k}, \qquad 1 \leqslant s,\, k \leqslant n, \tag{11}$$

при этом очевидно, что $\psi_{s,k}^*(\lambda) = \psi_{k,s}(-\lambda)$, $1 \leqslant s$, $k \leqslant n$ ($\delta_{s,k}$ — символ Кронекера).

Лемма 1. *При всех* $\lambda \in \mathbb{C}$ *для функций* $\psi_{s,k}(\lambda)$ (11) *справедливы равенства*

$$\psi_{s,k}(\lambda) + \psi_{s,k}(-\lambda) = -\omega_s(\lambda)\omega_k^*(\lambda), \qquad 1 \leqslant s,\, k \leqslant n, \tag{12}$$

где

$$\omega_k(\lambda) = \widetilde{v}_k(-\lambda) - \widetilde{v}_k(\lambda), \qquad 1 \leqslant k \leqslant n. \tag{13}$$

После несложных преобразований получим

$$\Delta(\lambda) = \frac{\alpha_1 \cdots \alpha_n}{(2i\lambda)^{n+1}}\{e^{i\lambda l}\det A(\lambda) + (-1)^{n-1}e^{-i\lambda l}\det A(-\lambda)\}, \tag{14}$$

где матрица $A(\lambda)$ имеет вид

$$A(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \psi_{1,1}(\lambda) & \dots & \psi_{1,n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots \\ \psi_{n,1}(\lambda) & \dots & \psi_{n,n}(\lambda) \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Теорема 1. *Определитель* $\Delta(\lambda)$ *системы уравнений* (10) *имеет вид* (14), *где матрица* $A(\lambda)$ *выражается через функции* $\psi_{s,k}(\lambda)$ (11) *формулой* (15), *при этом*

$$\Delta(\lambda) = \Delta(-\lambda), \qquad \Delta^*(\lambda) = \Delta(\lambda), \qquad \forall\, \lambda \in \mathbb{C}.$$

Функцию $\Delta(\lambda)$ будем называть характеристической функцией оператора L (2), так как если λ является нулем $\Delta(\lambda)$, то $z = \lambda^2$ есть собственное значение оператора L.

2. Резольвента оператора L. Обозначим через $R_0(z) = (L_0 - zI)^{-1}$ резольвенту оператора L_0 (1) и пусть

$$F(z,f) \stackrel{\text{def}}{=} [F_1(z,f),\dots,F_n(z,f)]; \qquad B(z) \stackrel{\text{def}}{=} [B_{s,k}(z)]_1^n; \qquad \alpha \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{diag}[\alpha_k], \tag{16}$$

где

$$B_{s,k}(z) = \langle R_0(z)v_s, v_k\rangle; \qquad F_k(z,f) = \langle R_0(z)f, v_k\rangle \tag{17}$$

$1 \leqslant s,\, k \leqslant n$. Тогда справедливо следующие утверждение.

Теорема 2. *Резольвента* $R(z) = (L - zI)^{-1}$ *оператора* L (2) *равна*

$$R(z)f = R_0(z)f - F(z,f)(I + \alpha B(z))^{-1}\alpha V^T(z), \tag{18}$$

где $F(z,f)$ *и* $B(z)$, α *имеют вид* (16), *при этом*

$$V(z) \stackrel{\text{def}}{=} [R_0(z)v_1,\dots,R_0(z)v_n], \tag{19}$$

а $R_0(z) = (L_0 - zI)^{-1}$ — *резольвента оператора* L_0 (1).

Используя известное [1, 2] представление резольвенты $R_0(\lambda^2)$, после несложных преобразований приходим к следующему утверждению.

Теорема 3. *Для характеристической функции* $\Delta(\lambda)$ *справедливо представление*

$$\Delta(\lambda) = (-1)^n\frac{\sin\lambda l}{\lambda}\det(I + \alpha B(\lambda^2)), \tag{20}$$

где матрицы α *и* $B(z)$ *имеют вид* (16).

Чтобы дать описание спектра оператора L (2), сформулируем общие утверждения без относительной реализации L_0 (1) и L (2).

Определение 1. Самосопряженный оператор A, заданный в гильбертовом пространстве H, будем относить к *классу* $DS_{m,d}$, где $m \in \mathbb{N}$, а $0 < d < \infty$, если:

1) спектр $\sigma(A) = \{\lambda_k \colon k \in \mathbb{N}\}$ оператора A состоит из не более чем счетного множества изолированных точек, занумерованных в порядке возрастания. Соответствующие подпространства, отвечающие λ_k, одномерны, за исключением конечного числа λ_k, которым отвечают конечномерные подпространства размерности $n_k \leqslant m$ ($\forall k \in \mathbb{N}$);

2) справедливо соотношение

$$d = \inf_{k \neq s} |\lambda_k - \lambda_s|.$$

Рассмотрим оператор B:

$$Bh \stackrel{\text{def}}{=} Ah + \alpha \langle h, v \rangle v, \qquad \alpha \in \mathbb{R}. \tag{21}$$

Теорема 4. *Пусть* $A \in DS_{m,d}$, *тогда оператор* B (21) *принадлежит классу* DS_{m+1,d_1}, $0 < d_1 \leqslant d$.

Отсюда вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. *Оператор* L (2) *имеет простой дискретный спектр, кроме, быть может, конечного числа точек, которым отвечают конечномерные собственные подпространства размерности не выше* $n+1$.

Зададим функцию

$$d(z) = \det(1 + \alpha B(z)). \tag{22}$$

Учитывая вид $B(z)$ (16), нетрудно установить, что

$$d(z) = 1 + \sum \frac{c_p}{z_p - z}, \tag{23}$$

где z_k — точки спектра L_0 (1), а числа c_p вещественны и сходится ряд

$$\sum_p |c_p| < \infty. \tag{24}$$

Из теоремы 3 следует такое утверждение.

Теорема 5. *Характеристическая функция* $\Delta(\lambda)$ *допускает представление*

$$\Delta(\lambda) = (-1)^n \frac{\sin \lambda l}{\lambda} \left(1 + \sum_p \frac{c_p}{z_p - \lambda^2} \right) \tag{25}$$

и является целой функцией экспоненциального типа.

3. Мультипликативное разложение $d(z)$. Зададим операторы L_k,

$$L_k f \stackrel{\text{def}}{=} L_0 f + \sum_{s=1}^{k} \alpha_s \langle f, v_s \rangle v_s, \qquad 0 \leqslant k \leqslant n, \tag{26}$$

где L_0 имеет вид (1).

Теорема 6. *Для функции $d(z)$ (22) справедливо мультипликативное разложение*

$$d(z) = d_1(z) \cdots d_n(z), \tag{27}$$

где

$$d_k(z) \overset{\text{def}}{=} 1 + \alpha_k \langle R_{k-1}(z) v_k, v_k \rangle, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n, \tag{28}$$

при этом $R_k(z) = (L_k - zI)^{-1}$ — резольвента оператора L_k (26).

Из (27) следует, что точки спектра оператора L (2) обладают частичной перемежаемостью $(n-1)$-го порядка.

Пусть заданы два множества A и B, элементы которых имеют конечную кратность (число повторов). Операцией $+$-*объединение*,

$$C = A \biguplus B,$$

мы будем называть такое объединение множеств A и B, в котором элементы $a \in A \bigcap B$ будут повторяться в C суммарное число раз, которое равно сумме кратностей $a \in A$ и $a \in B$.

Пусть даны два множества

$$A = \{a_k \in \mathbb{R} \colon k \in \mathbb{N}\}, \qquad B = \{b_k \in \mathbb{R} \colon k \in \mathbb{N}\} \tag{29}$$

такие, что каждый элемент $a_k \in A$ ($b_k \in B$) имеет конечную кратность $m_k(a)$ ($m_k(b)$) и $m_k(a) \leqslant m(A) < \infty$ ($m_k(b) \leqslant m(B) < \infty$) для всех $k \in \mathbb{N}$. Будем говорить, что множества A и B *частично перемежаются*, если существуют такие разбиения

$$A = A_0 \bigcup A_1 \qquad (A_0 \bigcap A_1 = \varnothing), \qquad B = B_0 \bigcup B_1 \qquad (B_0 \bigcap B_1 = \varnothing),$$

что подмножества A_1 и B_1 перемежаются, причем $B = A_0 \biguplus B_1$ и количество элементов из $A_0 \bigcap B_1$ не более чем конечно.

Определение 2. Будем говорить, что эти последовательности обладают свойством *частичной перемежаемости n-го порядка*, если существуют такие $n+2$ последовательности $C_p = \{\mu_k(p) \in \mathbb{R} \colon k \in \mathbb{N}\}$, $0 \leqslant p \leqslant n+1$, что:

a) $\mu_k(0) = a_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$; $\mu_k(n+1) = b_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$, с учетом кратностей;

b) для каждого p, $0 \leqslant p \leqslant n$, соседние последовательности C_p и C_{p+1} частично перемежаются.

Теорема 7. *Точки спектра $\sigma(L_n) = \{\mu_k(n) \colon k \in \mathbb{N}\}$ оператора L_n ($= L$ (2)) и точки спектра $\sigma(L_0) = \{z_k \colon k \in \mathbb{N}\}$ оператора L_0 (1) обладают свойством частичной перемежаемости $(n-1)$-го порядка.*

Для каждого p, $0 \leqslant p \leqslant n$, точки спектра $\sigma(L_p) = \{\mu_k(p) \colon k \in \mathbb{N}\}$ оператора L_p (26), которые являются нулями мероморфной функции $d_p(z)$ (28), частично перемежаются с точками спектра $\sigma(L_{p+1}) = \{\mu_k(p+1) \colon k \in \mathbb{N}\}$ оператора L_{p+1}, где $\mu_k(p+1)$ — корни функции $d_{p+1}(z)$.

4. Обратная задача. Из приведенных выше рассмотрений следует справедливость следующего утверждения.

Теорема 8. *Пусть известны $n+1$ последовательности: a) спектр $\sigma(L_0) = \{z_k \colon k \in \mathbb{N}\}$ оператора L_0; b) спектры $\sigma(L_k) = \{\mu_p(k) \colon p \in \mathbb{N}\}$ операторов L_k (26), $1 \leqslant k \leqslant n$. Тогда по $\sigma(L_k)$, $0 \leqslant k \leqslant n$, однозначно определяются числа $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, и квадраты модулей $|v_k^s(s-1)|^2$, $1 \leqslant s \leqslant n$ коэффициентов Фурье $\{v_k^s(s-1)\}_1^\infty$, $1 \leqslant s \leqslant n$, функций $v_s(x)$, $1 \leqslant s \leqslant n$ ($\|v_s(x)\|_{L^2} = 1$, $1 \leqslant s \leqslant n$), взятые в базисах собственных функций операторов L_{s-1}, $1 \leqslant s \leqslant n$.*

1. *Левитан Б. М.* Обратные задачи Штурма–Лиувилля. – Москва: Наука, 1984. – 240 с.
2. *Золотарев В. А.* Обратная задача для оператора Штурма–Лиувилля с нелокальным потенциалом // Доп. НАН України. – 2012. – № 8. – С. 7–12.
3. *Хейне В., Коэн М., Уэйр Д.* Теория псевдопотенциала. – Москва: Мир, 1973. – 557 с.

Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины, Харьков
Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина

Поступило в редакцию 15.07.2014

В. О. Золотарьов

Пряма та обернена задачі для скінченновимірних збурень операторів

Проведено спектральний аналіз самоспряженого оператора, який є скінченновимірним збуренням оператора другої похідної на обмеженому відрізку. Описано спектр цього оператора та розв'язано обернену спектральну задачу, що дає можливість за $n+1$ спектром відновити збурення. Наведено характеристику спектральних даних оберненої задачі.

V. A. Zolotarev

Direct and inverse problems for finite-dimensional perturbations of operators

Spectral analysis of a self-adjoint operator, which is a finite-dimensional perturbation of the second derivative operator on a finite segment, is realized. The spectrum of this operator is described, and the inverse spectral problem is solved allowing us to find the corresponding perturbation from the $n+1$ spectrum. Spectral data of the inverse problem are described.