УДК 512.544

Л. А. Курдаченко, Х. Отал, О. О. Пипка

Про деякі властивості центральних та узагальнено центральних рядів груп

(Представлено членом-кореспондентом НАН України В. П. Моторним)

Доведено, що клас локально скінченних груп, які мають скінченну експоненту, є класом Бера. Також знайдено клас груп, для яких фактор-група G/L групи G за її локально нільпотентним резидуалом L буде локально нільпотентною. Отримано нові автоморфні аналоги теореми Шура.

Нехай G — група. *Верхнім центральним рядом* групи G називається ряд

$$\langle 1\rangle = \zeta_0(G) \leqslant \zeta_1(G) \leqslant \zeta_2(G) \leqslant \cdots \zeta_\alpha(G) \leqslant \zeta_{\alpha+1}(G) \leqslant \cdots \zeta_\gamma(G),$$

де $\zeta_1(G) = \zeta(G)$ — центр групи G, $\zeta_{\alpha+1}(G)/\zeta_\alpha(G) = \zeta(G/\zeta_\alpha(G))$, для кожного порядкового числа α, а якщо λ — граничне порядкове число, то $\zeta_\lambda(G) = \bigcup\limits_{\mu<\lambda} \zeta_\mu(G)$. Останній член ряду $\zeta_\gamma(G) = \zeta_\infty(G)$ називається *верхнім гіперцентром* групи G.

Нижнім центральним рядом групи G називається ряд

$$G = \gamma_1(G) \geqslant \gamma_2(G) \geqslant \cdots \gamma_\alpha(G) \geqslant \gamma_{\alpha+1}(G) \geqslant \cdots \gamma_\delta(G),$$

де $\gamma_2(G) = [G, G]$ — комутант групи G, $\gamma_{\alpha+1}(G) = [\gamma_\alpha(G), G]$, для кожного порядкового числа α, а якщо λ — граничне порядкове число, то $\gamma_\lambda(G) = \bigcap\limits_{\mu<\lambda} \gamma_\mu(G)$. Останній член ряду $\gamma_\delta(G) = \gamma_\infty(G)$ називається *нижнім гіпоцентром* групи G.

Питання про зв'язки між верхнім та нижнім центральними рядами досить непросте. Наприклад, вільна група, що має вільний ранг не менше 2, має нескінченний нижній центральний ряд, останнім членом якого є одинична підгрупа. Але водночас вона має одиничний центр, а тому її верхній центральний ряд складається лише з однієї одиничної підгрупи. З іншого боку, існують групи (наприклад, черніковські p-групи зі скінченним центром), які мають нескінченний верхній центральний ряд, а їх нижній центральний ряд є скінченним. У випадках, коли верхній центральний ряд є скінченним, ситуація більш визначена. Розглянемо це питання більш детально. Нагадаємо про такий відомий факт: якщо для групи G має місце рівність $G = \zeta_k(G)$ для деякого натурального числа k, то $\gamma_{k+1}(G) = \langle 1\rangle$. Р. Бер у роботі [1] отримав узагальнення цього результату, довівши, що якщо фактор-група $G/\zeta_k(G)$ скінченна, то $\gamma_{k+1}(G)$ також скінченна. З цього результату природно постає таке загальне питання: *для яких класів груп $\mathfrak{X}$ з умови $G/\zeta_k(G) \in \mathfrak{X}$ завжди випливає включення $\gamma_{k+1}(G) \in \mathfrak{X}$?* Клас груп, який задовольняє цю умову, називається *класом Бера* [2]. Наслідком результату Р. Бера є теорема: *якщо центр $\zeta(G)$ групи G має скінченний індекс, то її комутант $[G, G]$ буде скінченним.* Цей результат також наведений в статті [1]. Але пізніше Ф. Холл назвав його *теоремою Шура* [3]. Після Ф. Холла ця назва закріпилася за даним результатом. І. Шур дійсно був першим, хто почав вивчати зв'язок між властивостями фактор-групи $G/\zeta(G)$ та комутанта $[G,G]$ [4]. Але І. Шур мав справу тільки зі скінченними групами. Теорема Шура стала джерелом для багатьох подальших цікавих досліджень зв'язків між властивостями $G/\zeta(G)$ та $[G,G]$. Вона та її численні узагальнення природно приводять до питання: *для яких класів груп* $\mathfrak{X}$ *умова* $G/\zeta(G) \in \mathfrak{X}$ *завжди тягне за собою включення* $[G,G] \in \mathfrak{X}$*?* Клас груп, який задовольняє таку умову, називається *класом Шура* [5]. З теореми Шура випливає, що клас скінченних груп є класом Шура. Зараз знайдено багато інших класів Шура, серед яких клас локально скінченних π-груп (π — довільна множина простих чисел), клас черніковських груп та ін.

Очевидно, що кожен клас Бера є також одночасно і класом Шура. Тому досить природно постає інше питання: *які класи Шура є класами Бера?* Нещодавно А. Манн [6] довів, що клас локально скінченних груп, які мають скінченну експоненту, є класом Шура. Більш того, він довів, що якщо фактор-група $G/\zeta(G)$ має скінченну експоненту e, то існує функція $m(e)$, для якої $\exp([G,G]) \leqslant m(e)$. Питання про те, чи буде клас таких груп класом Бера, до цього залишалося відкритим. Нижченаведена теорема дає позитивну відповідь на це питання.

Теорема 1. *Нехай G — група. Припустимо, що фактор-група $G/\zeta_k(G)$ є локально скінченною групою, яка має скінченну експоненту e. Тоді $\gamma_{k+1}(G)$ також локально скінченна і має скінченну експоненту. Більш того, існує функція $\beta_1(e,k)$, для якої виконується нерівність* $\exp(\gamma_{k+1}(G)) \leqslant \beta_1(e,k)$.

Для груп, які були розглянуті в попередній теоремі, було досліджено також інше питання. Нагадаємо, що *локально нільпотентним резидуалом* L групи G називається перетин всіх нормальних підгруп H, для яких фактор-група G/H локально нільпотентна. У загальному випадку фактор-група G/L вже не обов'язково буде локально нільпотентною. Тому питання про пошук груп, для яких фактор-група G/L буде гарантовано локально нільпотентною, є актуальним. Подана нижче теорема показує нам клас груп, які мають вказану властивість.

Теорема 2. *Нехай G — група. Припустимо, що фактор-група $G/\zeta_k(G)$ є локально скінченною групою, яка має скінченну експоненту e. Тоді локально нільпотентний резидуал L групи G також є локально скінченною групою, яка має скінченну експоненту, а фактор-група G/L локально нільпотентна. Більш того, існує функція $\beta_2(e)$, для якої виконується нерівність* $\exp(L) \leqslant \beta_2(e)$.

Слід відзначити, що експонента локально нільпотентного резидуалу залежить лише від експоненти фактор-групи $G/\zeta_k(G)$ і не залежить від k.

Існують різноманітні підходи щодо узагальнень та аналогів теореми Шура. І серед них виник підхід, який пов'язаний з узагальненнями центра, верхніх та нижніх центральних рядів. Природні їх узагальнення пов'язані з групами автоморфізмів. Нехай G — група. Припустимо, що A — довільна підгрупа групи автоморфізмів $\mathrm{Aut}(G)$. Покладемо

$$C_G(A) = \{g \in G \mid \alpha(g) = g,\ \forall\, \alpha \in A\},$$

$$[G,A] = \langle g^{-1}\alpha(g) \mid g \in G,\ \alpha \in A\rangle.$$

Підгрупу $C_G(A)$ будемо називати *A-центром* групи G, а $[G,A]$ — *A-комутаторною підгрупою* групи G. Відзначимо, що якщо $A = \mathrm{Aut}(G)$, то $C_G(A)$ називається *абсолютним центром* групи G, а $[G,A]$ — *автокомутаторною підгрупою* групи G.

П. Хегарті довів [7], що якщо фактор-група $G/C_G(\mathrm{Aut}(G))$ скінченна, то взаємний комутант $[G,\mathrm{Aut}(G)]$ також скінченний. Проте скінченність фактор-групи $G/C_G(\mathrm{Aut}(G))$ є досить сильною умовою. Зокрема, звідси випливає, що група автоморфізмів $\mathrm{Aut}(G)$ є скінченною. Нескінченні групи зі скінченною групою автоморфізмів вивчались багатьма дослідниками протягом довгого періоду часу. В роботі [8] було розглянуто більш загальну ситуацію: $\operatorname{Inn}(G) \leqslant A$, $A/\operatorname{Inn}(G)$ — скінченна група. Для цього випадку були отримані автоморфні аналоги теорем Шура, Бера та Холла.

Слід зауважити, що для довільної групи автоморфізмів аналог теореми Шура може і не виконуватись. Нижченаведений приклад ілюструє це. Нехай p — просте число і нехай $G = \langle a \rangle \times K$, де $|a| = p$, $K = Dr_{n \in \mathbb{N}} \langle b_n \rangle$ — нескінченна елементарна абелева p-підгрупа. Тоді група G має автоморфізм α_j, який діє таким чином: $\alpha_j(a) = ab_j$, $\alpha_j(x) = x$, для всіх $x \in K$. Неважко перевірити, що кожен автоморфізм α_j має порядок p, а підгрупа A групи автоморфізмів $\operatorname{Aut}(G)$, яка породжена $\{\alpha_j, j \in \mathbb{N}\}$, є елементарною абелевою p-групою. Крім того, $C_G(A) = K = [G, A]$, а тому фактор-група $G/C_G(A)$ скінченна, але підгрупа $[G, A]$ нескінченна.

Таким чином, цілком природним є питання: *для яких груп автоморфізмів автоморфний аналог теореми Шура має місце?* У попередньому прикладі група автоморфізмів A є нескінченною елементарною абелевою групою. А тому вона має нескінченний спеціальний ранг. У зв'язку з цим природно розглянути випадок, коли група автоморфізмів A має скінченний спеціальний ранг.

Нагадаємо, що група G має *скінченний спеціальний ранг* $r(G) = r$, якщо кожна скінченно породжена підгрупа групи G може бути породжена r елементами і r — найменше натуральне число з такою властивістю.

Поняття спеціального рангу та сам термін був введений А. І. Мальцевим [9].

Нижчеподаний результат є одним з автоморфних аналогів теореми Шура.

Теорема 3. *Нехай G — група і нехай A — підгрупа групи автоморфізмів* $\operatorname{Aut}(G)$. *Більш того, нехай* $\operatorname{Inn}(G) \leqslant A$ *та* $|G/C_G(A)| = t$. *Якщо* $A/\operatorname{Inn}(G)$ *має скінченний спеціальний ранг r, то підгрупа $[G, A]$ скінченна. Більш того, існує функція $\beta_3(t, r)$, для якої* $|[G, A]| \leqslant \beta_3(t, r)$.

Якщо $\operatorname{Inn}(G) \leqslant A$, то $C_G(A) \leqslant \zeta(G)$, звідки отримуємо, що група $\operatorname{Inn}(G) \cong G/\zeta(G)$ скінченна. Таким чином, зі скінченності спеціального рангу фактор-групи $A/\operatorname{Inn}(G)$ випливає скінченність спеціального рангу підгрупи A.

Твердження теореми 3 можна сформулювати в більш загальній формі.

Нехай p — просте число. Будемо говорити, що група G має *скінченний секційний p-ранг* $r_p(G) = r$, якщо кожна елементарна абелева p-секція групи G скінченна і має порядок не більше ніж p^r, а також існує елементарна абелева p-секція A/B групи G, для якої $|A/B| = p^r$.

Відзначимо, що якщо група G має скінченний спеціальний ранг r, то G має скінченний секційний p-ранг для всіх простих чисел p. Обернене твердження в загальному випадку не має місця.

Теорема 4. *Нехай G — група і нехай A — підгрупа групи автоморфізмів* $\operatorname{Aut}(G)$. *Більш того, нехай* $\operatorname{Inn}(G) \leqslant A$ *та* $|G/C_G(A)| = t$. *Якщо для кожного* $p \in \Pi(G/C_G(A))$ *фактор-група* $A/\operatorname{Inn}(G)$ *має скінченний секційний p-ранг, то підгрупа $[G, A]$ скінченна. Більш того,* $|[G, A]| \leqslant \beta_3(t, r)$, *де* $r = \max\{r_p(A) | p \in \Pi(G/C_G(A))\}$.

Я. Д. Половицький у роботі [10] отримав таке узагальнення теореми Шура: *якщо центральна фактор-група $G/\zeta(G)$ групи G черніковська, то комутант групи G також є черніковською групою.* Нагадаємо, що група G називається *черніковською*, якщо вона містить нормальну абелеву підгрупу $\operatorname{Div}(G) = Q_1 \times \cdots \times Q_m$ (Q_j — квазіциклічні підгрупи), для якої фактор-група $G/\operatorname{Div}(G)$ скінченна. Підгрупа $\operatorname{Div}(G)$ називається *подільною частиною* групи G. Число m, яке є інваріантом групи G, називається *мінімаксним рангом* групи G, і позначається $\mathrm{mm}(G)$. Іншою характеристикою черніковскої групи G є множина $\Pi(\mathrm{Div}(G))$. Ми будемо використовувати для цієї множини спеціальний символ $\mathrm{Sp}(G)$. Іншим числовим інваріантом черніковської групи G є порядок $o(G) = |G/\mathrm{Div}(G)|$.

Автоморфним аналогом теореми Половицького є така теорема.

Теорема 5. *Нехай G — група і нехай A — підгрупа групи автоморфізмів* $\mathrm{Aut}(G)$, $H = G/C_G(A)$. *Припустимо, що виконуються такі умови:*

(i) $\mathrm{Inn}(G) \leqslant A$;

(ii) H — черніковська група;

(iii) якщо H не є подільною, то ранг $r_q(A)$ скінченний для кожного простого дільника числа $o(H)$;

(iv) якщо H подільна, то існує просте число q, для якого ранг $r_q(A)$ скінченний.

Тоді підгрупа $[G, A]$ черніковська. Більш того, $\mathrm{Sp}([G, A]) \subseteq \mathrm{Sp}(H)$, $\mathrm{mm}([G, A]) \leqslant \beta_4(\mathrm{mm}(H), r, p)$, $o([G, A]) \leqslant \beta_5(o(H), r)$, *для деяких функцій β_4 та β_5, де p — найбільше просте число з множини* $\mathrm{Sp}(H)$, $r = \max\{r_p(A) \mid p$ *— дільник* $o(H)\}$ *або* $r = r_q(A)$, *кожного разу, коли H подільна.*

1. *Baer R.* Endlichkeitskriterien fur Kommutatorgruppen // Math. Ann. – 1952. – **124**. – P. 161–177.
2. *Kurdachenko L. A., Otal J., Pypka A. A.* Relationships between the factors of the upper and the lower central series of a group // Bull. Malaysian Math. Sci. Soc. – 2015, to appear.
3. *Hall P.* Nilpotent groups. – London: Queen Mary College, 1969. – 76 p.
4. *Schur I.* Über die Darstellungen der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare substitutionen // J. Reine Angew. Math. – 1904. – **127**. – P. 20–50.
5. *Franciosi S., de Giovanni F., Kurdachenko L. A.* The Schur property and groups with uniform conjugate classes // J. Algebra. – 1995. – **174**. – P. 823–847.
6. *Mann A.* The exponents of central factor and commutator groups // J. Group Theory. – 2007. – **10**. – P. 435–436.
7. *Hegarty P.* The absolute centre of a group // Proc. J. Algebra. – 1994. – **169**. – P. 929–935.
8. *Dixon M. R., Kurdachenko L. A., Pypka A. A.* On some variant of theorems of Schur and Baer // Milan. J. Math. – 2014. – **82**, No. 2. – P. 233–241.
9. *Мальцев А. И.* О группах конечного ранга // Мат. сб. – 1948. – **22**. – С. 351–352.
10. *Половицкий Я. Д.* Группы с экстремальными классами сопряженных элементов // Сиб. мат. журн. – 1964. – **5**. – С. 891–895.

Дніпропетровський національний університет
ім. Олеся Гончара

Надійшло до редакції 24.03.2014

Л. А. Курдаченко, Х. Отал, А. А. Пыпка

О некоторых свойствах центральных и обобщенно центральных рядов групп

Доказано, что класс локально конечных групп, которые имеют конечную экспоненту, является классом Бэра. Также найден класс групп, для которых фактор-группа G/L группы G по ее локально нильпотентному резидуалу L будет локально нильпотентной. Получены новые автоморфные аналоги теоремы Шура.

L. A. Kurdachenko, J. Otal, A. A. Pypka

On some properties of the central and generalized central series of groups

We prove that the class of locally finite groups having finite exponent is the Baer class. The class of groups, for which the factor-group G/L of the group G on its locally nilpotent residual L is locally nilpotent, is found. New automorphic analogs of the Schur theorem are obtained.