УДК 517.912

А. А. Лунев, Е. В. Олейник

Об одном классе систем уравнений типа Лакса

(Представлено академиком НАН Украины Е. Я. Хрусловым)

Исследована нелинейная система уравнений типа Лакса, которая лежит в основе построения треугольных моделей для коммутативных систем линейных несамосопряженных ограниченных операторов. Описаны некоторые ее решения при $n = 3, 4$. Приводятся примеры представления общего решения в терминах специальных функций (эллиптических).

В работе изучаются все пары матриц-функций $\{a(x), \gamma(x)\}$ — $n \times n$ решений системы уравнений типа Лакса в случае $n = 4$ вида

$$\begin{cases} [a(x), \gamma(x)] = 0, \qquad x \in [0, l], \\ \gamma'(x) = i[a(x), \sigma_2], \qquad x \in [0, l], \\ \gamma(0) = \gamma^+, \end{cases} \tag{1}$$

где $a(x)$ — спектральная матричная мера, σ_2, γ^+ — самосопряженные $n \times n$ матрицы, и

$$a(x) \geqslant 0, \qquad \operatorname{tr} a(x) \equiv 1, \qquad x \in [0, l]. \tag{2}$$

Система (1) возникает в результате продолжения условия сплетаемости [1] для характеристической функции коммутативных систем линейных несамосопряженных операторов вдоль общей цепочки инвариантных подпространств, на котором основано построение треугольных моделей для коммутативных систем операторов.

Описание решений системы (1).

Предложение 1. *Пусть*

$$\sigma_2 = \operatorname{diag}(b_1, \ldots, b_n), \qquad \gamma^+ = \alpha_1\sigma_2 + \alpha_0 I + iC, \tag{3}$$

где α_1, $\alpha_0 \in \mathbb{R}$, матрица $C = (c_{jk})_{j,k=1}^n = -C^*$ и $c_{jj} = 0$, при $j \in \{1, \ldots, n\}$. Пусть далее κ_0, $\kappa_1, \kappa_2 \in L^1[0, l]$ — вещественные функции. Тогда пара $\{a(\cdot), \gamma(\cdot)\}$, где $a(x) = \kappa_2(x)\gamma(x)^2 + \kappa_1(x)\gamma(x) + \kappa_0(x)$, $x \in [0, l]$, и $\gamma(\cdot) = (\gamma_{jk}(\cdot))_{j,k=1}^n$, является решением системы (1) *тогда и только тогда, когда при $x \in [0, l]$ выполнены равенства*

$$\gamma_{jj}(x) = \gamma_{jj}^+, \qquad j \in \{1, \ldots, n\}, \tag{4}$$

$$\gamma_{jk}(x) = ie^{i(b_j - b_k)(K_1(x) + (\gamma_{jj}^+ + \gamma_{kk}^+)K_2(x))} y_{jk}(x), \qquad j \neq k, \tag{5}$$

где

$$K_j(x) := \int\limits_0^x \kappa_j(t)\, dt, \qquad j \in \{1, 2\}, \tag{6}$$

а функции $y_{jk}(\cdot)$, $j \neq k$, удовлетворяют системе

$$\begin{cases} y'_{jk}(x) &= (b_k - b_j)\kappa_2(x) \sum\limits_{s=1, s\neq j,k}^{n} y_{js}(x) y_{sk}(x), \qquad x \in [0,l], \qquad j \neq k, \\ y_{kj}(x) &= \overline{-y_{jk}(x)}, \qquad x \in [0,l], \qquad j \neq k, \\ y_{jk}(0) &= c_{jk}, \qquad j \neq k. \end{cases} \tag{7}$$

При этом если $c_{jk} \in \mathbb{R}$, $j \neq k$, то любое решение системы (7) является вещественным.

Теорема 1. *Пусть $n = 3$, $\sigma_2 = \mathrm{diag}(b_1, b_2, b_3)$, где b_1, b_2, b_3 — различные действительные числа, и $\gamma^+ = (\gamma^+_{jk})^3_{j,k=1}$, причем*

$$\gamma^+_{jk} = ic_{jk}, \qquad c_{jk} \in \mathbb{R}, \qquad j \neq k, \tag{8}$$

$$c_{13} > 0, \qquad c_{23} > 0, \tag{9}$$

$$(b_2 - b_3)\gamma^+_{11} + (b_3 - b_1)\gamma^+_{22} + (b_1 - b_2)\gamma^+_{33} = 0. \tag{10}$$

Положим

$$\alpha_1 := \frac{b_3 - b_1}{b_1 - b_2}, \qquad \alpha_2 := \frac{b_2 - b_3}{b_1 - b_2}, \tag{11}$$

$$\psi_j(y) := \sqrt{c^2_{j3} + \alpha_j(y^2 - c^2_{12})}, \qquad j \in \{1, 2\}, \tag{12}$$

$$F(y) := \int\limits_{c_{12}}^{y} \frac{du}{\psi_1(u)\psi_2(u)}. \tag{13}$$

Пусть $(y^-_0, y^+_0) \subset \mathbb{R}$ — наибольший по включению интервал, который содержит число c_{12} и на котором корректно определены функции $\psi_1(\cdot)$, $\psi_2(\cdot)$, $F(\cdot)$, т. е. выполнено неравенство

$$c^2_{j3} + \alpha_j(y^2 - c^2_{12}) > 0, \qquad y^-_0 < y < y^+_0, \qquad j \in \{1, 2\}. \tag{14}$$

В силу (9) и $\alpha_1 + \alpha_2 = -1$ такой интервал непустой и конечный.

Пусть далее $\kappa_0, \kappa_1, \kappa_2 \in L^1[0, l]$ — вещественные функции и функции $K_1(\cdot)$, $K_2(\cdot)$ определены равенством (6), причем

$$F(y^-_0) < (b_1 - b_2)K_2(x) < F(y^+_0), \qquad x \in [0, l). \tag{15}$$

Тогда пара $\{a(\cdot), \gamma(\cdot)\}$, где $a(x) = \kappa_2(x)\gamma(x)^2 + \kappa_1(x)\gamma(x) + \kappa_0(x)$, $x \in [0, l]$, и $\gamma(\cdot) = (\gamma_{jk}(\cdot))^3_{j,k=1}$, является решением задачи (1) тогда и только тогда, когда при $x \in [0, l]$ выполнены равенства

$$\gamma_{jj}(x) = \gamma^+_{jj}, \qquad j \in \{1, 2, 3\}, \tag{16}$$

$$\gamma_{jk}(x) = ie^{i(b_j - b_k)(K_1(x) + (\gamma^+_{jj} + \gamma^+_{kk})K_2(x))} y_{jk}(x), \qquad j \neq k, \tag{17}$$

где функции $y_{jk}(\cdot)$, $j \neq k$, определены равенствами

$$y_{12}(x) = F^{-1}((b_1 - b_2)K_2(x)), \tag{18}$$

$$y_{j3}(x) = \psi_j(y_{12}(x)), \qquad j \in \{1, 2\}, \tag{19}$$

$$y_{kj}(x) = -y_{jk}(x), \qquad 1 \leqslant j < k \leqslant 3. \tag{20}$$

Здесь $F^{-1}(\cdot)$ — функция, обратная к функции $F(\cdot)$ (если $F(y_0^{\pm}) = \pm\infty$, то $F^{-1}(\pm\infty) := y_0^{\pm}$).

Следствие 1. *Пусть в условиях теоремы 1* $c_{12} = 0$ *и* $b_1 < b_3 < b_2$. *Тогда для функций* $y_{12}(\cdot)$, $y_{13}(\cdot)$, $y_{23}(\cdot)$ *справедливы следующие формулы:*

$$y_{12}(x) = c_{13}\sqrt{\frac{b_2 - b_1}{b_3 - b_1}}\,\mathrm{sn}(z(x); k), \tag{21}$$

$$y_{13}(x) = c_{13}\,\mathrm{cn}(z(x); k), \tag{22}$$

$$y_{23}(x) = c_{23}\,\mathrm{dn}(z(x); k), \tag{23}$$

где

$$z(x) = c_{23}\sqrt{(b_2 - b_1)(b_3 - b_1)}K_2(x), \qquad k = \frac{c_{13}}{c_{23}}\sqrt{\frac{b_2 - b_3}{b_3 - b_1}}, \tag{24}$$

$$K_2(x) = \int\limits_0^x \kappa_2(t)\,dt, \qquad a(\cdot) = \kappa_2(\cdot)\gamma(\cdot)^2 + \kappa_1(x)\gamma(\cdot) + \kappa_0(\cdot). \tag{25}$$

Пример 1. Пусть

$$\gamma^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i \\ -i & -i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1/b \end{pmatrix}, \qquad b > 1. \tag{26}$$

Тогда пара $\{a(x), \gamma(x)\}$, где $a(x) = \gamma(x)^2$, является решением системы (1) тогда и только тогда, когда

$$\gamma(x) = \begin{pmatrix} 0 & ib\,\mathrm{sn}\,x & i\,\mathrm{cn}\,x \\ -ib\,\mathrm{sn}\,x & 0 & i\,\mathrm{dn}\,x \\ -i\,\mathrm{cn}\,x & -i\,\mathrm{dn}\,x & 0 \end{pmatrix}, \tag{27}$$

где $\mathrm{sn}\,x = \mathrm{sn}(x; k)$, $\mathrm{cn}\,x = \mathrm{cn}(x; k)$, $\mathrm{dn}\,x = \mathrm{dn}(x; k)$ и $k = \sqrt{b^2 - 1}$.

Теорема 2. *Пусть* $n = 4$,

$$b_4 < b_1 < b_2 < b_3, \qquad b_1 + b_2 = b_3 + b_4, \tag{28}$$

$$\alpha_3 := \frac{b_3 - b_2}{b_3 - b_1}, \qquad \alpha_4 := \frac{b_4 - b_2}{b_4 - b_1}. \tag{29}$$

Пусть далее

$$c_{jk} \in \mathbb{R}, \qquad c_{jk} = -c_{kj}, \qquad j, k \in \{1, 2, 3, 4\}, \tag{30}$$

$$c_{1k} > 0, \qquad k \in \{2, 3, 4\}, \tag{31}$$

$$c_{23} = \sqrt{\alpha_3}c_{13}, \qquad c_{24} = -\sqrt{\alpha_4}c_{14}, \qquad c_{34} = 0. \tag{32}$$

Далее, положим

$$\beta_3 := \frac{b_2 - b_1}{b_3 - b_1}, \qquad \beta_4 := \frac{b_2 - b_1}{b_4 - b_1}, \tag{33}$$

$$\alpha := \frac{c_{14}}{c_{13}}, \qquad \beta := \beta_3 + \beta_4\alpha^2, \tag{34}$$

$$F(y) := \int\limits_{c_{13}}^{y} \frac{du}{u\sqrt{c_{12}^2 + \beta(u^2 - c_{13}^2)}}, \tag{35}$$

$$\rho := \sqrt{(b_3 - b_1)(b_3 - b_2)}, \tag{36}$$

$$v(x) := F^{-1}(\rho K_2(x)), \tag{37}$$

где $F^{-1}(\cdot)$ — функция, обратная к функции $F(\cdot)$. Пусть $(y_0^-, y_0^+) \subset \overline{\mathbb{R}}$ — наибольший по включению интервал, который содержит число c_{13}, и выполнено неравенство

$$c_{12}^2 + \beta(y^2 - c_{13}^2) > 0, \qquad y_0^- < y < y_0^+. \tag{38}$$

Пусть далее κ_0, $\kappa_1\kappa_2 \in L^1[0,l]$ — вещественные функции и функции $K_1(x)$, $K_2(x)$ определены равенствами $K_j(x) := \int\limits_0^x \kappa_j(t)\,dt$, $j = 1,2$, и

$$F(y_0^-) < \rho K_2(x) < F(y_0^+), \qquad x \in [0,l). \tag{39}$$

Тогда пара $\{a(\cdot), \gamma(\cdot)\}$, где $a(x) = \kappa_2(x)\gamma(x)^2 + \kappa_1(x)\gamma(x) + \kappa_0(x)$, $x \in [0,l]$, является решением системы (1) тогда и только тогда, когда при $x \in [0,l]$ выполнены равенства

$$\gamma_{jj}(x) = \gamma_{jj}^+, \qquad j \in \{1,\dots,n\}, \tag{40}$$

$$\gamma_{jk}(x) = ie^{i(b_j - b_k)(K_1(x) + (\gamma_{jj}^+ + \gamma_{kk}^+)K_2(x))}y_{jk}(x), \qquad j \neq k, \tag{41}$$

где функции y_{jk}, $j \neq k$ имеют вид

$$y_{12}(x) = \sqrt{c_{12}^2 + \beta(v^2(x) - c_{13}^2)}, \tag{42}$$

$$y_{13}(x) = v(x), \tag{43}$$

$$y_{14}(x) = \alpha v(x), \tag{44}$$

$$y_{23}(x) = \sqrt{\alpha_3}v(x), \tag{45}$$

$$y_{24}(x) = -\sqrt{\alpha_4}\alpha v(x), \tag{46}$$

$$y_{34}(x) = 0, \tag{47}$$

$$y_{kj}(x) = y_{jk}(x), \qquad 1 \leqslant j < k \leqslant 4. \tag{48}$$

Следствие 2. *В условиях теоремы* (3) *положим $c_{12} = 0$, что определяет вид матрицы C в* (3) *таким образом:*

$$iC = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_{13} & c_{14} \\ 0 & 0 & c_{23} & c_{24} \\ \overline{c_{13}} & \overline{c_{23}} & 0 & 0 \\ \overline{c_{14}} & \overline{c_{24}} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда для функций $y_{12}(\cdot)$, $y_{13}(\cdot)$ *справедливы представления*

$$y_{12}(x) = c_{13}\sqrt{\beta}\tan(z(x)), \qquad \beta > 0; \tag{49}$$

$$y_{13}(x) = \frac{c_{13}}{\cos(z(x))}, \qquad \beta > 0; \tag{50}$$

или

$$y_{12}(x) = c_{13}\sqrt{\beta}, \qquad \beta < 0; \tag{51}$$

$$y_{13}(x) = 0; \tag{52}$$

или

$$y_{12}(x) = c_{13}\sqrt{\beta}\mathrm{th}(z(x)), \qquad \beta < 0; \tag{53}$$

$$y_{13}(x) = \frac{c_{13}}{\mathrm{ch}(z(x))}, \qquad \beta < 0; \tag{54}$$

где

$$z(x) = c_{13}\rho\sqrt{\beta}K_2(x). \tag{55}$$

Пример 2. Пусть

$$\gamma^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2i & i \\ 0 & 0 & \sqrt{2}i & -\sqrt{2}i \\ -2i & -\sqrt{2}i & 0 & 0 \\ -i & \sqrt{2}i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b \end{pmatrix}, \qquad b > 0. \tag{56}$$

Тогда пара $\{a(x), \gamma(x)\}$, где $a(x) = \gamma^2(x)$ является решением системы (1) тогда и только тогда, когда

$$\gamma(x) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}\,\mathrm{tg}(2bx) & \dfrac{2}{\cos(2bx)} & \dfrac{1}{\cos(2bx)} \\ -\sqrt{2}\,\mathrm{tg}(2bx) & 0 & \dfrac{\sqrt{2}}{\cos(2bx)} & -\dfrac{\sqrt{2}}{\cos(2bx)} \\ -\dfrac{2}{\cos(2bx)} & -\dfrac{\sqrt{2}}{\cos(2bx)} & 0 & 0 \\ -\dfrac{1}{\cos(2bx)} & \dfrac{\sqrt{2}}{\cos(2bx)} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{57}$$

1. *Золотарев В. А.* Аналитические методы спектральных представлений несамосопряженных и неунитарных операторов. – Харьков: Изд-во ХНУ им. В. Н. Каразина, 2003. – 342 с.
2. *Золотарев В. А.* Спектральный анализ несамосопряженных коммутативных систем операторов и нелинейные дифференциальные уравнения // Теория функций, функцион. анализ и их приложения. Респ. сб. – 1983. – Вып. 40. – Р. 68–71.
3. *Золотарев В. А.* Временные конусы и функциональная модель на римановой поверхности // Мат. сб. – 1990. – **181**, № 7. – С. 965–994.
4. *Лившиц М. С., Янцевич А. А.* Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах. – Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1971. – 160 с.

5. *Лунев А. А., Олейник Е. В.* Об одном классе систем уравнений типа Лакса // Укр. мат. вісн. – 2013. – **10**, № 4. – С. 507–531.

Институт прикладной математики
и механики НАН Украины, Донецк
Харьковский национальный университет
им. В. Н. Каразина

Поступило в редакцию 15.07.2014

А. А. Луньов, О. В. Олійник

Про один клас систем рівнянь типу Лакса

Досліджено нелінійну систему рівнянь типу Лакса, яка знаходиться в основі побудови трикутних моделей для комутативних систем лінійних несамоспряжених обмежених операторів. Описано деякі її розв'язки при $n = 3, 4$. *Наведено приклади подання загального розв'язку в термінах спеціальних функцій (еліптичних).*

A. A. Lunyov, E. V. Oliynyk

On a class of systems of equations of the Lax type

The non-linear system of equations of the Lax type is investigated. It is a basis of the triangular models for commutative systems of linear non-self-adjoint operators. In some cases, the complete description of solutions of this system is found.