УДК 517.5

А. С. Сердюк, Т. А. Степанюк

Оцінки найкращих m-членних тригонометричних наближень класів аналітичних функцій

(Представлено членом-кореспондентом НАН України М. Л. Горбачуком)

В метриках просторів L_s, $1 \leqslant s \leqslant \infty$, одержано точні за порядком оцінки знизу найкращих m-членних тригонометричних наближень класів згорток періодичних функцій, що належать одиничній кулі простору L_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, з твірним ядром $\Psi_\beta(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi(k) \times \times \cos(kt - \beta\pi/2)$, $\beta \in \mathbb{R}$, коефіцієнти $\psi(k)$ якого прямують до нуля не повільніше за геометричну прогресію. Знайдені оцінки збіглися за порядком із наближеннями частинними сумами Фур'є вказаних класів функцій в L_s-метриці, що дозволило також записати точні порядкові оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближень та тригонометричних поперечників зазначених класів.

Нехай L_p, $1 \leqslant p < \infty$, — простір 2π-періодичних сумовних у p-му степені на $[0, 2\pi)$ функцій $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ з нормою

$$\|f\|_p := \left(\int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt\right)^{1/p},$$

L_∞ — простір 2π-періодичних вимірних і суттєво обмежених функцій $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ з нормою

$$\|f\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_t |f(t)|.$$

Нехай $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — функція із L_1, ряд Фур'є якої має вигляд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) e^{ikx},$$

де $\widehat{f}(k) := \dfrac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt$, $\psi(k)$ — довільна фіксована послідовність дійсних чисел і β — фіксоване дійсне число. Тоді якщо ряд

$$\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{\widehat{f}(k)}{\psi(|k|)} e^{i\left(kx + \frac{\beta\pi}{2} \operatorname{sign} k\right)}$$

є рядом Фур'є деякої функції φ з L_1, то цю функцію називають (ψ, β)-похідною функції f і позначають через f_β^ψ (див., наприклад, [1, с. 132]). Множину функцій f, у яких існує (ψ, β)-похідна, позначають через L_β^ψ.

Розглянемо одиничну кулю B_p у просторі дійснозначних функцій з L_p, тобто множину функцій $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ таких, що $\|\varphi\|_p \leqslant 1$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Якщо $f \in L_\beta^\psi$ і, крім того, $f_\beta^\psi \in B_p$, то кажуть, що функція f належить класу $L_{\beta,p}^\psi$.

Підмножини неперервних функцій із L^{ψ}_{β} та $L^{\psi}_{\beta,p}$ будемо позначати через C^{ψ}_{β} та $C^{\psi}_{\beta,p}$ відповідно.

У випадку коли $\psi(k) = k^{-r}$, $r > 0$, класи $L^{\psi}_{\beta,p}$ є відомими класами Вейля–Надя $W^{r}_{\beta,p}$.

Послідовності $\psi(k)$, $k \in \mathbb{N}$, що визначають класи $L^{\psi}_{\beta,p}$, зручно розглядати як звуження на множину натуральних чисел $\mathbb{N}$ деяких додатних, неперервних, опуклих донизу функцій $\psi(t)$, $t \geqslant 1$, таких, що $\lim\limits_{t\to\infty} \psi(t) = 0$. Множину всіх таких функцій $\psi(t)$ будемо позначати через $\mathfrak{M}$.

Наслідуючи О. І. Степанця (див., наприклад, [1, с. 160]), кожній функції $\psi \in \mathfrak{M}$ поставимо у відповідність характеристики

$$\eta(t) = \eta(\psi; t) = \psi^{-1}\left(\frac{\psi(t)}{2}\right), \qquad \mu(t) = \mu(\psi; t) = \frac{t}{\eta(t) - t},$$

де ψ^{-1} — обернена до ψ функція, і покладемо

$$\mathfrak{M}^{+}_{\infty} = \{\psi \in \mathfrak{M}\colon \mu(\psi; t) \uparrow \infty, t \to \infty\}.$$

Через $\mathfrak{M}'_{\infty}$ позначимо підмножину функцій $\psi \in \mathfrak{M}^{+}_{\infty}$, для яких величина $\eta(\psi;t) - t$ обмежена зверху, тобто існує стала $K > 0$ така, що $\eta(\psi; t) - t \leqslant K$, $t \geqslant 1$.

Як випливає з [2, с. 1698], функції з множини C^{ψ}_{β}, де $\psi \in \mathfrak{M}'_{\infty}$, складаються із тих і тільки тих 2π-періодичних функцій $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, які допускають аналітичне продовження в смугу $|\mathrm{Im} z| \leqslant c$, $c > 0$ комплексної площини. Отже, класи $C^{\psi}_{\beta,p}$ є класами аналітичних функцій.

Природними представниками функцій з множини $\mathfrak{M}'_{\infty}$ є функції $\psi(t) = \exp(-\alpha t^{r})$, $\alpha > 0$, $r \geqslant 1$.

Нехай $f \in L_s$ і γ_m, $m \in \mathbb{N}$, — довільний набір із m цілих чисел. Величину

$$e_m(f)_s = \inf_{\gamma_m} \inf_{c_k \in \mathbb{C}} \left\| f(x) - \sum_{k \in \gamma_m} c_k e^{ikx} \right\|_s, \qquad 1 \leqslant s \leqslant \infty, \tag{1}$$

називають найкращим m-членним тригонометричним наближенням функції f в метриці простору L_s. В більш загальній ситуації величини виду (1) при $s = 2$ були введені С. Б. Стєчкіним [3] з метою встановлення критерію абсолютної збіжності ортогональних рядів.

Для довільного класу F із L_s покладемо

$$e_m(F)_s := \sup_{f \in F} e_m(f)_s, \qquad 1 \leqslant s \leqslant \infty. \tag{2}$$

Порядки спадання до нуля при $n \to \infty$ величин (2) при $F = L^{\psi}_{\beta,p}$ для різних співвідношень між параметрами p і s за умови $\psi \in B$, де B — множина незростаючих додатних функцій $\psi(t)$, $t \geqslant 1$, для кожної з яких існує додатна стала K така, що $\psi(t)/\psi(2t) \leqslant K$, $t \geqslant 1$, та при деяких додаткових умовах на функцію ψ досліджувались у роботах [4–6].

В даній роботі розглядається задача про знаходження точних порядкових оцінок величин $e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_s$, $1 \leqslant p$, $s \leqslant \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$ у випадку, коли $\psi \in \mathfrak{M}'_{\infty}$.

Крім величин $e_m(F)_s$ в роботі для класів $F = L^{\psi}_{\beta,p}$ розглядаються величини вигляду

$$e^{\perp}_m(F)_s = \sup_{f \in F} \inf_{\gamma_m} \left\| f(x) - \sum_{k \in \gamma_m} \widehat{f}(k) e^{ikx} \right\|_s, \qquad 1 \leqslant s \leqslant \infty, \qquad m \in \mathbb{N},$$

які називають найкращими ортогональними тригонометричними наближеннями класу $F = L^{\psi}_{\beta,p} \subset L_s$ в метриці простору L_s, а також величини

$$d^{\top}_m(F)_s := \inf_{\gamma_m} \sup_{f\in F} \inf_{c_k\in\mathbb{C}} \left\| f(x) - \sum_{k\in\gamma_m} c_k e^{ikx} \right\|_s, \qquad 1 \leqslant s \leqslant \infty,$$

які називають тригонометричними поперечниками класу F в метриці простору L_s.

Позначимо через $\mathcal{E}_n(F)_s$ наближення сумами Фур'є класу $F \subset L_s$ в метриці простору L_s, тобто величини вигляду

$$\mathcal{E}_n(F)_s = \sup_{f\in F} \|f(x) - \sum_{k=-n+1}^{n-1} \widehat{f}(k) e^{ikx}\|_s, \qquad 1 \leqslant s \leqslant \infty.$$

З означень величин $e_m(F)_s$, $e^{\perp}_m(F)_s$, $d^{\top}_m(F)_s$ і $\mathcal{E}_n(F)_s$ випливає, що при $m = 2n$, $2n-1$, $n \in \mathbb{N}$ мають місце нерівності

$$e_m(F)_s \leqslant \begin{matrix} e^{\perp}_m(F)_s \\ d^{\top}_m(F)_s \end{matrix} \leqslant \mathcal{E}_n(F)_s. \tag{3}$$

Зазначимо, що величини $e_m(F)_s$, $e^{\perp}_m(F)_s$, $d^{\top}_m(F)_s$ і $\mathcal{E}_n(F)_s$ для різноманітних класів функцій F як однієї, так і багатьох змінних вивчались багатьма авторами. З детальною історією досліджень цих величин та відповідною бібліографією можна ознайомитись, наприклад, в роботах [7–12].

Теорема 1. *Нехай $\psi \in \mathfrak{M}'_{\infty}$, $1 \leqslant p$, $s \leqslant \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді мають місце порядкові оцінки*

$$e_{2n}(L^{\psi}_{\beta,p})_s \asymp e_{2n-1}(L^{\psi}_{\beta,p})_s \asymp \psi(n). \tag{4}$$

Доведення теореми. Внаслідок теореми 6.8.2 роботи [10, с. 48], якщо $\psi \in \mathfrak{M}'_{\infty}$, то

$$\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,p})_s \asymp \psi(n), \qquad 1 \leqslant p, s \leqslant \infty, \qquad \beta \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Згідно зі співвідношеннями (3) і (5) одержуємо

$$e_{2n}(L^{\psi}_{\beta,p})_s \leqslant e_{2n-1}(L^{\psi}_{\beta,p})_s \leqslant C_0\psi(n), \qquad 1 \leqslant p, s \leqslant \infty,$$

де C_0 — деяка додатна стала. Знайдемо відповідну оцінку знизу для величини $e_{2n}(L^{\psi}_{\beta,p})_s$. Доозначимо послідовність $\psi(k)$ у точці $k = 0$ за допомогою рівності $\psi(0) = \psi(1)$. Розглянемо функцію

$$f^*(t) = f^*(\psi; n; t) := C_1 \left(\frac{\psi(1)}{2(n+A)^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\psi(k)}{(n-k+A)^2} \cos kt \right),$$

де C_1 та A — деякі додатні сталі, які будуть визначені пізніше.

Оскільки

$$\|(f^*)^{\psi}_{\beta}(t)\|_p = C_1 \left\| \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n-k+A)^2} \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right) \right\|_p \leqslant 2\pi C_1 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n-k+A)^2},$$

то очевидно, що вибравши сталу C_1 так, щоб $2\pi C_1 \sum\limits_{k=1}^{n} 1/(n-k+A)^2 \leqslant 1$, отримаємо включення $f^* \in L^{\psi}_{\beta,p}$. Покажемо, що

$$e_{2n}(f^*)_s \geqslant C_2 \psi(n), \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{6}$$

де C_2 — деяка додатна стала.

З цією метою скористаємося співвідношенням двоїстості (див., наприклад, [13, с. 42])

$$e_m(f)_s = \inf_{\gamma_m} \sup_{\substack{h \in L^{\perp}(\gamma_m), \\ \|h\|_{s'} \leqslant 1}} \left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) h(t)\, dt \right|, \qquad m \in \mathbb{N}, \tag{7}$$

де $1/s + 1/s' = 1$, а запис $h \in L^{\perp}(\gamma_m)$ означає, що

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} h(t) e^{ikt} dt = 0, \qquad k \in \gamma_m.$$

Для довільного набору γ_{2n} із $2n$ цілих чисел візьмемо довільне ціле число k^* таке, що $k^* \in [-n, n]$ і $k^* \notin \gamma_{2n}$. Покладемо

$$T(t) := \frac{1}{2\pi} e^{-ik^* t}.$$

Очевидно, що $T \in L^{\perp}(\gamma_{2n})$ і $\|T\|_{s'} \leqslant 1$, $1 \leqslant s \leqslant \infty$, $1/s + 1/s' = 1$, а отже, згідно зі співвідношенням (7) та рівністю

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} e^{imt} dt = \begin{cases} 0, & k+m \neq 0, \\ 2\pi, & k+m = 0, \end{cases} \qquad k, m \in \mathbb{Z},$$

отримуємо оцінку

$$e_{2n}(f^*)_s = \inf_{\gamma_{2n}} \sup_{\substack{h \in L^{\perp}(\gamma_{2n}), \\ \|h\|_{s'} \leqslant 1}} \left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^*(t) h(t)\, dt \right| \geqslant \inf_{\gamma_{2n}} \left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^*(t) T(t)\, dt \right| =$$

$$= \frac{C_1}{4\pi} \inf_{\gamma_{2n}} \left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sum_{|k| \leqslant n} \frac{\psi(|k|)}{(n-|k|+A)^2} e^{-ikt} e^{-ik^* t} dt \right| = \frac{C_1}{2} \inf_{\gamma_{2n}} \frac{\psi(|k^*|)}{(n-|k^*|+A)^2} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{C_1}{2} \min_{0 \leqslant k \leqslant n} \frac{\psi(k)}{(n-k+A)^2} = \frac{C_1}{2} \min_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{\psi(k)}{(n-k+A)^2}. \tag{8}$$

Покажемо, що функція $\psi_n(t) = \psi(t)/(n-t+A)^2$ при певному виборі сталої A не зростає на проміжку $[1, n]$. Легко бачити, що

$$\psi_n'(t) = \left(\frac{\psi(t)}{(n-t+A)^2} \right)' = \frac{2\psi(t)}{(n-t+A)^3} + \frac{\psi'(t)}{(n-t+A)^2} =$$

$$= \frac{\psi(t)}{(n-t+A)^3} \left(2 - \frac{|\psi'(t)|}{\psi(t)} (n-t+A) \right), \qquad \psi'(t) := \psi'(t+0). \tag{9}$$

Далі скористаємось тим, що для $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$ за умови $\mu(t) \geqslant b > 0$ має місце нерівність (див. [14, с. 1251])

$$\frac{\psi(t)}{|\psi'(t)|} \leqslant 4\left(1+\frac{1}{b}\right)(\eta(t)-t), \qquad t \geqslant 1. \tag{10}$$

Оскільки $\psi \in \mathfrak{M}'_\infty$, то існує стала $K_0 > 0$ така, що $\eta(t) - t \leqslant K_0$, а отже,

$$\mu(t) = \frac{t}{\eta(t)-t} \geqslant \frac{1}{\eta(t)-t} \geqslant \frac{1}{K_0}, \tag{11}$$

і застосовуючи (10) при $b = 1/K_0$, маємо

$$\frac{|\psi'(t)|}{\psi(t)} \geqslant \frac{1}{4(K_0+1)(\eta(t)-t)} \geqslant \frac{1}{4(K_0+1)K_0}. \tag{12}$$

Враховуючи (12), отримуємо

$$2 - \frac{|\psi'(t)|}{\psi(t)}(n-t+A) \leqslant 2 - \frac{1}{4(K_0+1)K_0}(n-t+A) \leqslant 2 - \frac{A}{4(K_0+1)K_0}. \tag{13}$$

З (9) і (13) випливає, що при $A \geqslant 8K_0(K_0+1)$ справедлива нерівність $\psi'_n(t) \leqslant 0$, $t \geqslant 1$, тобто функція $\psi_n(t)$ не зростає. Тому

$$\min_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{\psi(k)}{(n-k+A)^2} = \frac{\psi(n)}{A^2}. \tag{14}$$

З (8) та (14) отримуємо (6). Теорему доведено.

Згідно з теоремою 1 і співвідношеннями (3) та (5) можна записати таке твердження.

Теорема 2. *Нехай* $\psi \in \mathfrak{M}'_\infty$, $1 \leqslant p,\ s \leqslant \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$ *і* $m \in \mathbb{N}$. *Тоді*

$$e_m(L^\psi_{\beta,p})_s \asymp e^\perp_m(L^\psi_{\beta,p})_s \asymp d^\top_m(L^\psi_{\beta,p})_s \asymp \psi\left(\left[\frac{m+1}{2}\right]\right),$$

де запис $[a]$ *означає цілу частину дійсного числа* a.

1. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч. Ч. I. – Київ, 2002. – 427 с. – (Праці Ін-ту математики НАН України; Т. 40).
2. *Степанец А. И., Сердюк А. С., Шидлич А. Л.* Классификация бесконечно дифференцируемых функций // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, № 12. – С. 1686–1708.
3. *Стечкин С. Б.* Об абсолютной сходимости ортогональных рядов // Докл. АН СССР. – 1955. – **102**, № 1. – С. 37–40.
4. *Федоренко О. С.* Наближення (ψ, β)-диференційовних функцій тригонометричними поліномами: Автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук / Ін-т математики НАН України. – Київ, 2001. – 16 с.
5. *Федоренко А. С., Федоренко О. С.* Найкращі m-членні тригонометричні наближення класів $L^\psi_{\beta,p}$ в рівномірній метриці // Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання: Праці Ін-ту математики НАН України. – Київ, 2003. – Т. 46. – С. 276–282.
6. *Федоренко А. С., Федоренко О. С.* Найкращі m-членні тригонометричні наближення класів $L^\psi_{\beta,p}$ у рівномірній метриці // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 1. – С. 129–132.
7. *Романюк А. С.* Наилучшие M-членные тригонометрические приближения классов Бесова периодических функций многих переменных // Изв. РАН. Сер. мат. – 2003. – **67**, № 2. – С. 61–100.
8. *Романюк А. С.* Наилучшие тригонометрические приближения классов периодических функций многих переменных в равномерной метрике // Мат. заметки. – 2007. – **81**, № 2. – С. 247–261.

9. *Романюк А. С.* Аппроксимативные характеристики классов периодических функций многих переменных. – Київ, 2012. – 352 с. – (Праці Ін-ту математики НАН України; Т. 93).
10. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч. Ч. II. – Київ, 2002. – 468 с. – (Праці Ін-ту математики НАН України; Т. 40).
11. *Романюк В. С.* Дополнения к оценкам приближения суммами Фурье классов бесконечно дифференцируемых функций // Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання: Праці Ін-ту математики НАН України. – Київ, 2003. – Т. 46. – С. 131–135.
12. *Грабова У. З., Сердюк А. С.* Порядкові оцінки найкращих наближень і наближень сумами Фур'є класів (ψ, β)-диференційовних функцій // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 9. – С. 1186–1197.
13. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – Москва: Наука, 1987. – 424 с.
14. *Сердюк А. С., Степанюк Т. А.* Оцінки найкращих наближень класів нескінченно диференційовних функцій в рівномірній та інтегральних метриках // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 9. – С. 1244–1256.

Інститут математики НАН України, Київ
Східноєвропейський національний університет ім. Лесі Українки, Луцьк

Надійшло до редакції 10.10.2014

А. С. Сердюк, Т. А. Степанюк

Оценки наилучших m-членных тригонометрических приближений классов аналитических функций

В метриках пространств L_s, $1 \leqslant s \leqslant \infty$, получены точные по порядку оценки наилучших m-членных тригонометрических приближений классов сверток периодических функций, которые принадлежат единичному шару пространства L_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, с производящим ядром $\Psi_\beta(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos(kt - \beta\pi/2)$, $\beta \in \mathbb{R}$, коэффициенты $\psi(k)$ которого стремятся к нулю не медленее геометрической прогрессии. Полученные оценки совпали по порядку с приближением частичными суммами Фурье указанных классов функций в L_s-метрике, что позволило также записать точные порядковые оценки наилучших ортогональных тригонометрических приближений и тригонометрических поперечников указанных классов.

A. S. Serdyuk, T. A. Stepanyuk

Estimates of the best m-term trigonometric approximations of classes of analytic functions

In the metrics of spaces L_s, $1 \leqslant s \leqslant \infty$, we obtain exact in order estimates of the best m-term trigonometric approximations of classes of the convolutions of periodic functions that belong to a unit ball of the space L_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, with the generating kernel $\Psi_\beta(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos(kt - \beta\pi/2)$, $\beta \in \mathbb{R}$, whose coefficients $\psi(k)$ tend to zero not slower than a geometric progression. The obtained estimates coincide in order with the approximation by Fourier sums of the given classes of functions in the L_s-metric. This fact allows us to write down exact order estimates of the best orthogonal trigonometric approximations and the trigonometric widths of the given classes.