Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

3 • 2015

МАТЕМАТИКА

УДК 514.7

В. И. Бабенко

К оценке снизу гауссовой кривизны строго выпуклой, замкнутой поверхности

(Представлено академиком НАН Украины Е. Я. Хрусловым)

Получена оценка снизу гауссовой кривизны замкнутой, строго выпуклой поверхности по двум ее интегральным параметрам: ширине и радиусу описанного шара.

В геометрической теории устойчивости оболочек вопрос об определении критического давления для строго выпуклой, замкнутой (или жестко закрепленной вдоль края) оболочки сводится к отысканию минимума гауссовой кривизны ее срединной поверхности [1, 2]. При проектировании тонкостенных конструкций, когда заданы лишь некоторые ограничения на размеры оболочки (неканонической формы), могут оказаться полезными априорные оценки для критических нагрузок — в нашем случае для гауссовой кривизны срединной поверхности оболочки. В [3] автором получен ряд таких оценок сверху, которые можно представить в следующем виде.

Пусть K — гауссова кривизна строго выпуклой поверхности F с непрерывной кривизной и с заданными ограничениями на ее интегральные параметры, а F_0 — соответствующая веретенообразная выпуклая поверхность вращения с постоянной гауссовой кривизной $K_0 \equiv \mathrm{const}$. Тогда имеет место оценка

$$\min_{(F)} K \leqslant K_0, \tag{1}$$

где минимум берется по всем точкам поверхности F.

В [3] рассмотрены три возможных варианта ограничений на интегральные параметры поверхности F: 1) на ее диаметр и объем; 2) на диаметр и площадь "поперечного" сечения тела, ограниченного поверхностью F; 3) на высоту и площадь плоского края незамкнутой поверхности F.

Дополним полученные в [3] результаты следующим утверждением, которое доказывается аналогично тому, как была доказана теорема 1 в [3]:

1. Если F — замкнутая поверхность, диаметр которой не меньше D, содержит шар радиуса не меньше R $(0 < R \leqslant D/2)$, то F_0 имеет диаметр D и радиус экваториального круга R.

В данной работе предлагается следующая оценка:

Теорема 1. *Пусть K — гауссова кривизна строго выпуклой, замкнутой поверхности F, которая имеет непрерывную кривизну, ширину не больше Δ и лежит в шаре радиуса не большем R, где $R \geqslant \Delta/2$. Пусть выпуклая поверхность вращения F_{00} с постоянной гауссовой кривизной $K_{00} \equiv \mathrm{const}$ имеет ширину Δ и радиус экватора R, тогда имеет место оценка:*

$$\max_{(F)} K \geqslant K_{00}, \tag{2}$$

где максимум берется по всем точкам поверхности F. Если $R = \Delta/2$, то F_{00} — сфера и в (2) получим равенство, полагая, что F совпадает с F_{00}. При $R > \Delta/2$ (в этом случае $R > 1/\sqrt{K_{00}}$ [4]) поверхность F_{00} не будет замкнутой. Дополним ее до замкнутой, добавив два круга радиуса $\sqrt{R^2 - 1/K_{00}}$ на расстоянии $\Delta/2$ от экваториальной плоскости. Полученная замкнутая поверхность вращения по виду напоминает головку сыра, поэтому, следуя [5, с. 171], будем называть поверхность F_{00} "сырообразной". При $R > \Delta/2$ в (2) имеем строгое неравенство, где K_{00} — точная нижняя граница.

Доказательство теоремы. Допустим, что теорема неверна. То есть существует поверхность $\widetilde{F}$, для которой выполняются условия теоремы, но для ее гауссовой кривизны $\widetilde{K}$ вместо (2) имеет место ограничение

$$\max_{(F)} \widetilde{K} \leqslant K_{00}, \tag{3}$$

где равенство возможно только при $R > \Delta/2$.

Переведем поверхность $\widetilde{F}$ в центрально-симметричную поверхность вращения $\overline{F}$, удовлетворяющую условиям теоремы. Для этого, сначала осредняя опорную функцию $\widetilde{H}(\varphi, \psi)$ поверхности $\widetilde{F}$, переводим $\widetilde{F}$ в поверхность вращения $\widetilde{\widetilde{F}}$ с опорной функцией [5, с. 164]

$$\widetilde{\widetilde{H}}(\psi) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \widetilde{H}(\varphi, \psi)\, d\varphi, \tag{4}$$

где φ — долгота, ψ — широта географической системы координат на единичной сфере с центром внутри $\widetilde{F}$ и с полярной осью α, перпендикулярной одной из пар (если она не одна) касательных плоскостей, расстояние между которыми равно ширине $\widetilde{\Delta} \leqslant \Delta$ поверхности $\widetilde{F}$. Далее переводим поверхность $\widetilde{\widetilde{F}}$ в искомую центрально-симметричную, строго выпуклую, замкнутую поверхность вращения $\overline{F}$ с опорной функцией [5, с. 171]

$$\overline{H}(\psi) = \frac{1}{2}\widetilde{\widetilde{H}}(\psi) + \frac{1}{2}\widetilde{\widetilde{H}}(-\psi). \tag{5}$$

Поверхность $\overline{F}$ имеет плоскость симметрии, перпендикулярную оси α и лежит в шаре радиуса R. Она имеет ширину $\overline{\Delta} = \widetilde{\Delta} \leqslant \Delta$, радиус экваториального круга $\overline{R} \leqslant R$ и непрерывную гауссову кривизну $\overline{K}$, для которой

$$\max \overline{K} \leqslant \max \widetilde{K} \leqslant K_{00}, \tag{6}$$

поэтому $\overline{R} \geqslant 1/\sqrt{K_{00}}$ [5]. Тогда существует "сырообразная" поверхность вращения $\overline{F}_{00}$ с постоянной гауссовой кривизной K_{00}, которая имеет с поверхностью $\overline{F}$ общие ось вращения и экваториальный круг радиуса $\overline{R}$. Так как $\overline{K} \leqslant K_{00}$ (6), то согласно утверждению из [5, с. 172] $\overline{F}$ содержит "сырообразную" поверхность $\overline{F}_{00}$. Поэтому ширина $\overline{\Delta}$ поверхности $\overline{F}$ не меньше ширины $\overline{\Delta}_{00}(K_{00}, \overline{R})$ поверхности $\overline{F}_{00}$, т. е.

$$\overline{\Delta} \geqslant \overline{\Delta}_{00}(K_{00}, \overline{R}), \tag{7}$$

где равенство возможно лишь тогда, когда $\overline{F}_{00}$ — замкнутая, т. е. сфера, и $\overline{F}$ совпадает с $\overline{F}_{00}$. Но тогда $\overline{K} = K_{00}$ и $\overline{R} = (1/2)\overline{\Delta}_{00}(K_{00}, \overline{R}) = 1/\sqrt{K_{00}}$. В этом случае $R > \overline{R}$, так как при $R = \overline{R}$ поверхность $\overline{F}_{00}$ совпадает с F_{00}, т. е. F_{00} — сфера и $R = \Delta/2$, при этом неравенство (6) примет вид

$$\overline{K} = \max \widetilde{K} = K_{00},$$

что противоречит неравенству (3), которое при $R = \Delta/2$ является строгим.

Ширина "сырообразной" поверхности монотонно убывает с увеличением радиуса ее экваториального круга [5, с. 172]. Поэтому в случае, когда в (7) имеет место равенство, получаем

$$\overline{\Delta}_{00}(K_{00}, \overline{R}) > \overline{\Delta}_{00}(K_{00}, R) = \Delta, \tag{8}$$

так как $\overline{R} < R$. В итоге из (7), (8) находим, что ширина поверхности $\overline{F}$

$$\overline{\Delta} > \overline{\Delta}_{00}(K_{00}, R) = \Delta. \tag{9}$$

Поверхности $\widetilde{F}$ и $\overline{F}$ имеют одну и ту же ширину, поэтому ширина поверхностей $\widetilde{F}$

$$\widetilde{\Delta} = \overline{\Delta} > \Delta.$$

А это означает, что поверхность $\widetilde{F}$ не удовлетворяет всем условиям теоремы, поэтому предположение (3) неверно. Теорема доказана.

Замечание. Ширина $\Delta(K_{00}, R)$ "сырообразной" поверхности F_{00} имеет следующий вид [5, с. 172]:

$$\Delta(K_{00}, R) = 2/\sqrt{K_{00}}\left(\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{K_{00}R^2 - \sin^2\psi}\,d\psi - (K_{00}R^2 - 1)\int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{K_{00}R^2 - \sin^2\psi}}\right).$$

Она монотонно убывает с увеличением гауссовой кривизны K_{00}.

Действительно, пусть K'_{00} — гауссова кривизна "сырообразной" поверхности F'_{00}, имеющей с F_{00} одни и те же ось вращения и экваториальный круг. Тогда согласно утверждению из [5, с. 172] поверхность вращения F_{00} содержит "сырообразную" поверхность F'_{00}, если $K'_{00} > K_{00}$; поэтому

$$\Delta(K'_{00}, R) < \Delta(K_{00}, R).$$

Воспользовавшись сведениями об эллиптических интегралах [6], можно показать, что $\Delta \leqslant 2/\sqrt{K_{00}}$. Таким образом, для K_{00} получаем оценки $1/R \leqslant \sqrt{K_{00}} \leqslant 2/\Delta$, где равенство возможно только для сферы.

1. *Погорелов А. В.* Изгибания поверхностей и устойчивость оболочек. – Москва: Наука, 1986. – 93 с.
2. *Бабенко В. И.* К геометрической теории потери устойчивости жестко закрепленных строго выпуклых оболочек при внешнем давлении // Докл. АН Украины. – 1993. – № 7. – С. 46–49.
3. *Бабенко В. И.* К оценке гауссовой кривизны строго выпуклых поверхностей // Доп. НАН України. – 2009. – № 3. – С. 7–11.
4. *Рашевский П. К.* Курс дифференциальной геометрии. – Москва: Гостехиздат, 1956. – 420 с.
5. *Бляшке В.* Круг и шар. – Москва: Наука, 1967. – 232 с.
6. *Янке Е., Эмде Ф.* Таблицы функций с формулами и кривыми. – Москва: Физматгиз, 1959. – 420 с.

Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию 03.10.2014

В. І. Бабенко

До оцінки знизу гауссової кривизни строго випуклої, замкненої поверхні

Одержано оцінку знизу гауссової кривизни замкненої, строго випуклої поверхні за двома інтегральними параметрами: шириною та радіусом описаного шару.

V. I. Babenko

On the lower bound of the Gauss curvature of a strictly convex closed surface

The lower bound for the Gauss curvature on a strictly convex closed surface by its two integral parameters (width and radius of the circumscribed ball) are obtained.