УДК 514.764.274

Член-корреспондент НАН Украины **А. А. Борисенко, К. Д. Драч**

Теорема сравнения для опорных функций гиперповерхностей

Для выпуклой области D, границей которой является гиперповерхность ∂D ограниченной нормальной кривизны, доказаны теоремы сравнения углов между ∂D и геодезическими из фиксированной точки в D с соответствующими углами для поверхностей постоянной нормальной кривизны, а также теоремы сравнения для опорных функций таких гиперповерхностей. Как следствие, получена теорема прокатывания Бляшке.

Известна следующая теорема В. Бляшке:

Теорема прокатывания Бляшке. *Пусть $\mathbb{M}^m(c)$ — m-мерное пространство постоянной кривизны, равной c, $D \subset \mathbb{M}^m(c)$ — выпуклое тело с C^r-гладкой границей, $r \geqslant 2$, и $P \in \partial D$ — произвольная точка.*

A. Если нормальные кривизны k_{n} гиперповерхности ∂D во всех точках и по всем направлениям удовлетворяют неравенству $k_{\mathrm{n}} \geqslant \lambda > 0$ для некоторой константы λ, то гиперповерхность ∂D целиком лежит в замкнутой выпуклой области, ограниченной полной гиперповерхностью ∂D_λ постоянной нормальной кривизны, равной λ, касающейся ∂D в P.

B. Если нормальные кривизны гиперповерхности ∂D во всех точках и по всем направлениям удовлетворяют неравенству $\lambda \geqslant k_{\mathrm{n}}$, то гиперповерхность ∂D_λ, касающаяся ∂D в точке P, целиком лежит в D.

При этом гиперповерхности ∂D и ∂D_λ могут пересекаться только по области, содержащей точку P.

Для евклидова пространства эта теорема была впервые доказана в [1]; в общем случае пространств постоянной кривизны см. [2–4].

Оказывается, что теорема прокатывания Бляшке является следствием следующих теорем сравнения углов между радиус-вектором гиперповерхности и нормалями к ней. Для их формулировки введем необходимые обозначения.

Везде далее $\mathbb{M}^m$ — это полное односвязное m-мерное риманово многообразие, секционные кривизны K_σ которого по каждой двумерной площадке $\sigma \subset T\mathbb{M}^m$ удовлетворяют неравенству $c_2 \geqslant K_\sigma \geqslant c_1$ для некоторых констант c_1 и c_2. Обозначим через $D \subset \mathbb{M}^m$ замкнутую область, граница ∂D которой — C^r-гладкая гиперповерхность, $r \geqslant 2$. При этом в случае $c_2 > 0$ будем считать, что область D лежит внутри геодезической сферы радиуса $\pi/(2\sqrt{c_2})$.

Также обозначим через $t_Q(\cdot) = \mathrm{dist}(Q, \cdot)$ функцию расстояния от некоторой точки $Q \in D$, заданную на $\mathbb{M}^m \backslash \{Q\}$, а через ∂_{t_Q} — градиент функции t_Q, и пусть ρ_Q — ограничение t_Q на ∂D: $\rho_Q(\cdot) = t_Q(\cdot)|_{\partial D}$.

С учетом введенных обозначений справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $D \subset \mathbb{M}^m$ и $D_{k_1} \subset \mathbb{M}^m(c_1)$ — замкнутые области такие, что нормальные кривизны k_{n} гиперповерхности ∂D в каждой точке и в каждом направлении относительно единичного внутреннего поля нормалей N удовлетворяют неравенству*

$$k_{\mathrm{n}} \geqslant k_1 > 0,$$

а нормальные кривизны ∂D_{k_1} постоянны и равны k_1 относительно внутреннего поля нормалей N_1. И пусть точки $O \in D$, $O_1 \in D_{k_1}$ такие, что $\operatorname{dist}(O, \partial D) = \operatorname{dist}(O_1, \partial D_{k_1})$. *Тогда в тех точках $P \in \partial D$ и $P_1 \in \partial D_{k_1}$, для которых*

$$\rho_O(P) = \rho_{O_1}(P_1),$$

выполняется неравенство

$$|\langle N, \partial_{t_O}\rangle|(P) \geqslant |\langle N_1, \partial_{t_{O_1}}\rangle|(P_1). \tag{1}$$

Напомним, что *опорной функцией* гиперповерхности $\partial D \subset \mathbb{M}^m$ относительно некоторой точки $Q \in D$ называется функция

$$h_Q = \rho_Q \cdot |\langle N, \partial_{t_Q}\rangle|,$$

заданная на ∂D (см. [5, гл. 6, §5]).

Из теоремы 1 следует теорема сравнения для опорных функций.

Теорема 2. *Пусть $D \subset \mathbb{M}^m$ и $D_{k_1} \subset \mathbb{M}^m(c_1)$ — замкнутые области такие, что нормальные кривизны k_{n} гиперповерхности ∂D удовлетворяют неравенству*

$$k_{\mathrm{n}} \geqslant k_1 > 0,$$

а нормальные кривизны ∂D_{k_1} постоянны и равны k_1. И пусть точки $O \in D$, $O_1 \in D_{k_1}$ такие, что $\operatorname{dist}(O, \partial D) = \operatorname{dist}(O_1, \partial D_{k_1})$. *Тогда в точках $P \in \partial D$ и $P_1 \in \partial D_{k_1}$, для которых $\rho_O(P) = \rho_{O_1}(P_1)$, выполняется неравенство*

$$h_O(P) \geqslant h_{O_1}(P_1).$$

Для теорем 1 и 2 справедлива двойственная к ним следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть $D \subset \mathbb{M}^m$ и $D_{k_2} \subset \mathbb{M}^m(c_2)$ — замкнутые области такие, что нормальные кривизны k_{n} гиперповерхности ∂D относительно единичного внутреннего поля нормалей N удовлетворяют неравенству*

$$k_2 \geqslant k_{\mathrm{n}} > 0,$$

а нормальные кривизны ∂D_{k_2} постоянны и равны k_2 относительно внутреннего поля нормалей N_2. И пусть точки $O \in D$ и $O_2 \in D_{k_2}$ такие, что $\operatorname{dist}(O, \partial D) = \operatorname{dist}(O_2, \partial D_{k_2})$. *Тогда в точках $P \in \partial D$ и $P_2 \in \partial D_{k_2}$, для которых расстояния $\rho_O(P)$ и $\rho_{O_2}(P_2)$ равны, выполняются неравенства*

$$|\langle N_2, \partial_{t_{O_2}}\rangle| \geqslant |\langle N, \partial_t\rangle|,$$

$$h_{O_2} \geqslant h_O.$$

Замечание 1. Для справедливости теоремы 3 достаточно ограничения $c_2 \geqslant K_\sigma$ на секционные кривизны многообразия $\mathbb{M}^m$.

Замечание 2. Теоремы 1–3 останутся в силе, если заменить выпуклую область D на звездную относительно точки O область, нормальные кривизны границы которой ограничены сверху или снизу произвольным числом λ.

Доказательство теоремы 1. Мы изложим здесь доказательство, в котором используется та же техника, что и в [6], но более простое.

Пусть $Q \in \partial D$ и $Q_1 \in \partial D_{k_1}$ — такие точки, что $\mathrm{dist}(O, \partial D) = t_O(Q)$ и $\mathrm{dist}(O_1, \partial D_{k_1}) = t_{O_1}(Q_1)$. Обозначим $d = t_O(Q) = t_{O_1}(Q_1)$. Заметим, что в этих точках неравенство (1) выполнено.

На многообразиях $\mathbb{M}^m$ и $\mathbb{M}^m(c_1)$ введем полярные системы координат с началами в точках O и O_1 соответственно. По условию теоремы обе гиперповерхности лежат в области регулярности таких систем координат. Более того, в силу положительной определенности вторых фундаментальных форм, гиперповерхности ∂D и ∂D_{k_1} ограничивают выпуклые области. А значит, обе они могут быть заданы в полярной системе координат явно. Рассмотрим интегральные траектории $\gamma(t)$ и $\gamma_1(t)$ векторных полей градиентов функций ρ_O и ρ_{O_1}, проходящие через точки P и P_1 и параметризованные расстоянием t от начала координат. При этом $\gamma(d) = Q$ и $\gamma_1(d) = Q_1$. Вдоль этих интегральных траекторий в силу сказанного выше справедливы равенства (см. [7])

$$k_{\mathrm{n}}(t) = |\langle N, \partial_{t_O}\rangle|(t) \cdot \mu_{\mathrm{n}}(t) + \frac{d}{dt}|\langle N, \partial_{t_O}\rangle|, \tag{2}$$

$$k_1 = |\langle N_1, \partial_{t_{O_1}}\rangle|(t) \cdot \mu_{\mathrm{n}}^{c_1}(t) + \frac{d}{dt}|\langle N_1, \partial_{t_{O_1}}\rangle|, \tag{3}$$

где $\mu_{\mathrm{n}}^{c_1}(t)$ — нормальная кривизна сферы радиуса t в $\mathbb{M}^m(c_1)$, взятая относительно внутренних нормалей, а нормальные кривизны k_{n} и μ_{n} взяты в точке $\gamma(t)$ в направлениях соответственно вектора $\dot\gamma(t)$ и его проекции на касательное пространство $T_{\gamma(t)}S^{m-1}$ к геодезической сфере $S^{m-1} \subset \mathbb{M}^m$ радиуса t с центром в точке O.

Как известно, $\mu_{\mathrm{n}}^{c_1}(t) = \mathrm{sn}'_{c_1}(t)/\mathrm{sn}_{c_1}(t)$, где

$$\mathrm{sn}_{c_1}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{c_1}} \sin \sqrt{c_1} t, & \text{если} \quad c_1 > 0, \\ t, & \text{если} \quad c_1 = 0, \\ \dfrac{1}{\sqrt{-c_1}} \sinh \sqrt{-c_1} t, & \text{если} \quad c_1 < 0. \end{cases}$$

По теореме сравнения для нормальных кривизн сфер (см. [8, гл. 6, § 5]) имеем

$$\mu_{\mathrm{n}}^{c_1}(t) \geqslant \mu_{\mathrm{n}}(t). \tag{4}$$

Вычтем равенство (3) из равенства (2). Учитывая (4) и неравенство $k_{\mathrm{n}} \geqslant k_1$ между нормальными кривизнами из условия теоремы, получим

$$0 \leqslant k_{\mathrm{n}}(t) - k_1 \leqslant \frac{d}{dt}(|\langle N, \partial_{t_O}\rangle| - |\langle N_1, \partial_{t_{O_1}}\rangle|) + \mu_{\mathrm{n}}^{c_1}(t)(|\langle N, \partial_{t_O}\rangle| - |\langle N_1, \partial_{t_{O_1}}\rangle|). \tag{5}$$

Обозначим $f(t) = |\langle N, \partial_{t_O}\rangle|(t) - |\langle N_1, \partial_{t_{O_1}}\rangle|(t)$. В силу (5) функция f удовлетворяет следующему дифференциальному неравенству:

$$f'(t) + \frac{\mathrm{sn}'_{c_1}(t)}{\mathrm{sn}_{c_1}(t)} f(t) \geqslant 0. \tag{6}$$

И так как $\mathrm{sn}_{c_1}(t) > 0$ для всех положительных значений t, то (6) эквивалентно условию

$$(f(t) \cdot \mathrm{sn}_{c_1}(t))' \geqslant 0. \tag{7}$$

Таким образом, функция $f \cdot \mathrm{sn}_{c_1}$ является монотонно возрастающей. При этом $f(d) \cdot \mathrm{sn}_{c_1}(d) = 0$. А значит, для всех значений t, больших d, мы имеем $f(t) \geqslant 0$. И если значение $t = l > d$ соответствует точкам P и P_1, то $f(l) = |\langle N, \partial_{t_O}\rangle|(P) - |\langle N_1, \partial_{t_{O_1}}\rangle|(P_1) \geqslant 0$, что и требовалось показать.

Замечание 3. Теорема 1 справедлива также в случае, когда $\mathbb{M}^m$ — пространство де Ситтера $\mathbb{S}_1^m(c)$ постоянной положительной секционной кривизны, равной c, а $\partial D \subset \mathbb{S}_1^m(c)$ — связная пространственно подобная гиперповерхность, являющаяся графиком над стандартной единичной сферой S^{m-1}. Такие поверхности называются ахроническими (см. [9]). Справедливость теоремы следует из того, что формула (2) в таком же виде переносится на случай пространства де Ситтера и, более того, связного лоренцева глобально гиперболического многообразия с компактной гиперповерхностью Коши, практически дословно следуя выкладкам из [7]. После чего можно повторить все выкладки из приведенного доказательства.

Покажем теперь, что теорема Бляшке является следствием теорем 1 и 3. Начнем с пункта A. Введем на $\mathbb{M}^m(c)$ полярную систему координат с центром в точке $O \in D$ такой, что длина геодезического отрезка OP равна $\mathrm{dist}(O, \partial D)$. Пусть $(t, \theta^1, \ldots, \theta^{m-1})$ — соответствующие координаты. Можем также считать, что в этой системе координат точка P имеет координаты $(\mathrm{dist}(O, \partial D), 0, \ldots, 0)$.

Во введенной системе координат, в силу выпуклости областей D и D_λ, гиперповерхности ∂D и ∂D_λ, ограничивающие эти области, могут быть заданы явно

$$\partial D: \quad t = p(\theta^1, \ldots, \theta^{m-1}), \qquad \partial D_\lambda: \quad t = q(\theta^1, \ldots, \theta^{m-1}), \tag{8}$$

причем $p(0, \ldots, 0) = q(0, \ldots, 0)$.

Используя задание (8), получаем

$$|\langle N, \partial_t\rangle| = \frac{1}{\sqrt{1 + |\operatorname{grad}_{\mathbb{M}} p|^2}}, \qquad |\langle N_1, \partial_t\rangle| = \frac{1}{\sqrt{1 + |\operatorname{grad}_{\mathbb{M}} q|^2}}, \tag{9}$$

где N и N_1 — единичные внешние нормали к ∂D и ∂D_λ соответственно; ∂_t — координатное векторное поле, касательное к геодезическим из O; $\operatorname{grad}_{\mathbb{M}}$ — оператор градиента на многообразии $\mathbb{M}^m(c)$.

Если точки $Q \in \partial D$, $Q_1 \in \partial D_\lambda$ таковы, что $\mathrm{dist}(O, Q) = \mathrm{dist}(O, Q_1)$, то, в силу (9) и теоремы 1, в них выполняется неравенство

$$|\operatorname{grad}_{\mathbb{M}} p|(Q) \leqslant |\operatorname{grad}_{\mathbb{M}} q|(Q_1).$$

Дальнейшие рассуждения совпадают с таковыми в [6]. Из них следует, что $q \geqslant p$ для всех значений угловых параметров θ^i. Это и доказывает пункт A.

Рассмотрим теперь случай B теоремы Бляшке. Легко проследить, что для плоского случая $m = 2$ справедливы выкладки, аналогичные выкладкам из [6] для случая кривых. В то же время при $m > 2$ аргументы из [6] напрямую не проходят, поэтому будем действовать иначе.

Если $\mathbb{M}^m(c) = \mathbb{E}^m$, то пункт B теоремы Бляшке следует из двумерного случая при помощи проектирования. Действительно, если $\pi \subset \mathbb{E}^m$ — произвольная двумерная плоскость, параллельная вектору нормали к ∂D в точке P, то ортогональная проекция $Pr_\pi(\partial D)$ гиперповерхности ∂D на эту плоскость будет кривой, кривизна которой не превосходит λ (см. [1]).

Если $c \neq 0$, рассмотрим полярное преобразование (см. [10, теорема 2.4] и [11, теорема 4.9]) гиперповерхности ∂D, образом которого будет C^r-гладкая гиперповерхность ∂D^*, лежащая в случае $c > 0$ в сфере, а в случае $c < 0$ — в пространстве де Ситтера. При этом нормальные кривизны ∂D^* во всех точках и по всем направлениям будут удовлетворять неравенству $k_{\mathrm{n}} \geqslant 1/\lambda$. Для гиперповерхности ∂D^* справедлив пункт A теоремы Бляшке (при этом стоит отметить, что для пространства де Ситтера выкладки из доказательства пункта A, с учетом замечания 3, переносятся практически дословно). Значит, ∂D^* будет лежать в замкнутой выпуклой области, ограниченной гиперповерхностью $\partial D_{1/\lambda}$ постоянной нормальной кривизны, равной $1/\lambda$, касающейся ∂D^* в любой заданной точке. Делая еще раз полярное преобразование для ∂D^* и $\partial D_{1/\lambda}$, мы получим, что полная гиперповерхность $\partial D_\lambda = (\partial D_{1/\lambda})^*$ постоянной нормальной кривизны, равной λ, касающаяся ∂D в точке P, будет лежать в D, что и требовалось.

Замечание 4. Теорема Бляшке справедлива и в негладком случае, в частности, когда ∂D — λ-выпуклая или λ-вогнутая гиперповерхность (для определений см., например, [6]). Такая обобщенная теорема Бляшке получается из гладкого случая и теории усреднения (см. [12, утверждение 6]).

1. Бляшке *В.* Круг и шар. – Москва: Наука, 1967. – 232 с.
2. Karcher *H.* Umkreise und Inkreise konvexer Kurven in der spharischen und der hyperbolischen Geometrie // Math. Ann. – 1968. – **177**. – P. 122–132.
3. *Милка А. Д.* Об одной теореме Шура–Шмидта // Укр. геом. сб. – 1970. – **8**. – С. 95–102.
4. *Howard R.* Blaschke's rolling theorem for manifolds with boundary // Manuscripta Math. – 1999. – **99**, No 4. – P. 471–483.
5. *Бураго Ю. Д., Залгаллер В. А.* Геометрические неравенства. – Ленинград: Наука, 1980. – 288 с.
6. *Борисенко А. А., Драч К. Д.* О сферичности гиперповерхностей с ограниченной снизу нормальной кривизной // Мат. сб. – 2013. – **204**, No 11. – С. 21–40.
7. *Borisenko A. A.* Convex sets in Hadamard manifolds // Different. Geom. and its Appl. – 2002. – **17**. – P. 111–121.
8. *Petersen P.* Riemannian geometry (Graduate texts in mathematics; Vol. 171). – New York: Springer, 1998. – 432 p.
9. *Gerhardt C.* Hypersurfaces of prescribed curvature in Lorentzian manifolds // Indiana Univ. Math. J. – 2000. – **49**, No 3. – P. 1125–1153.
10. *Gerhardt C.* Minkowski type problems for convex hypersurfaces in the sphere // Pure and Appl. Math. Quart. Leon Simon spec. iss. pt. I. – 2007. – **3**, No 2. – P. 417–449.
11. *Gerhardt C.* Minkowski type problems for convex hypersurfaces in hyperbolic space // arXiv: math. DG/0602597. – 2006. – 32 p.
12. *Parkkonen J., Paulin F.* On strictly convex subsets in negatively curved manifolds // J. Geom. Anal. – 2012. – **22**, No 3. – P. 621–632.

Сумской государственный университет
Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина

Поступило в редакцию 08.10.2014

Член-кореспондент НАН України **О. А. Борисенко, К. Д. Драч**

Теорема порівняння для опорних функцій гіперповерхонь

Для опуклої області D, межею якої є гіперповерхня ∂D обмеженої нормальної кривини, доведено теореми порівняння кутів між ∂D та геодезичними з фіксованої точки в D і відповідними кутами для поверхонь сталої нормальної кривини, а також теореми порівняння для опорних функцій таких гіперповерхонь. Як наслідок, отримано теорему прокачування Бляшке.

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **A. A. Borisenko, K. D. Drach**

Comparison theorem for the support functions of hypersurfaces

For a convex domain D that is enclosed by the hypersurface ∂D of bounded normal curvature, we prove an angle comparison theorem for the angles between ∂D and geodesic rays starting from some fixed point in D, and the corresponding angles for hypersurfaces of constant normal curvature. We obtain a comparison theorem for the support functions of such surfaces. As a corollary, we present a proof of Blaschke's rolling theorem.