УДК 530.145

О. О. Єремко

Спінові стани квазідвовимірних електронів

(Представлено академіком НАН України В. М. Локтевим)

На прикладі квазідвовимірних електронів показано, що для повного опису спінового ступеня вільності необхідно враховувати релятивістські закони збереження, які в нерелятивістській теорії виконуються лише наближено.

У недавній роботі [1] на основі розв'язків рівняння Дірака (РД) для моделі пласкої квантової ями (КЯ) досліджувалися спінові стани квазідвовимірних (2D) електронів і було зроблено висновок, що рівняння Шредінгера (РШ), в якому врахована спін-орбітальна взаємодія (СОВ), не повною мірою охоплює можливі спінові стани 2D електронів. У даній роботі з'ясовується причина втрати певних спінових станів та показано, що відповідні розв'язки присутні в РШ з тією ж точністю наближення, з якою саме РШ є наближенням до РД.

Дослідження спінових станів 2D електронного газу останнім часом набули значного розвитку, що пов'язано з перспективами спінтроніки, яка має за мету використати нарівні з зарядом носія його спін [2]. В теоретичних роботах при дослідженні властивостей 2D електронів, наприклад в шаруватих напівпровідникових гетероструктурах, спираються на розв'язки рівняння Шредінгера, в якому враховується СОВ:

$$H\Psi(\mathbf{r}) = E\Psi(\mathbf{r}), \qquad H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(z) + \frac{\hbar V'}{4m^2c^2}(\widehat{\sigma}_y p_x - \widehat{\sigma}_x p_y). \tag{1}$$

Тут m — маса частинки; $\mathbf{p} = -i\hbar\boldsymbol{\nabla}$ — оператор імпульсу; $V(z)$ — потенціал зовнішнього поля, що має вигляд одновимірної КЯ; c — швидкість світла; $\widehat{\sigma}_j$ — матриці Паулі. В гамільтоніані останній доданок відомий як поправка Томаса і має назву СОВ. В (1) враховано, що потенціал залежить лише від однієї змінної z і тому $\boldsymbol{\nabla} V = V'\mathbf{e}_z$, $V' = dV(z)/dz$.

Але РШ є нерелятивістським *наближенням* до рівняння Дірака, а сама СОВ в гамільтоніані є релятивістською поправкою [3, 4]. Тому розв'язок РШ є, по суті, наближеним розв'язком, особливо по відношенню до спінового ступеня вільності. Адже наявність у електрона спіна випливає саме з РД. З цієї точки зору доцільно порівняти результати, одержані з наближених рівнянь, з тими, які дає більш точна теорія з подальшим розкладом одержаних розв'язків за малим параметром, що і було мотивацією роботи [1].

Розглянемо спочатку перехід РД

$$H_D\Psi = E\Psi, \qquad H_D = c\widehat{\boldsymbol{\alpha}}\mathbf{p} + V(\mathbf{r}) + \widehat{\rho}_3 mc^2 \tag{2}$$

до нерелятивістського наближення. В (2) Ψ — чотирикомпонентна (біспінор) хвильова функція координат, H_{D} — гамільтоніан Дірака, в якому $\widehat{\boldsymbol{\alpha}} = \sum\limits_j \mathbf{e}_j \widehat{\alpha}_j$, де $\widehat{\alpha}_j$ $(j = x, y, z)$ та $\widehat{\rho}_3$ — 4×4 матриці Дірака (в позначеннях Дірака $\widehat{\rho}_3 = \widehat{\beta}$).

Шістнадцять матриць Дірака (включаючи одиничну $\widehat{I}$) утворюють групу в тому сенсі, що добуток будь-яких двох матриць з цієї множини дає з точністю до постійного коефіцієнта, що дорівнює ± 1 або $\pm i$, одну із цих матриць. Довільна чотиривимірна матриця може бути однозначно подана у вигляді лінійної комбінації матриць Дірака. Для подальшого наведемо усі ермітові матриці Дірака в блочному (2×2 блоки) запису:

$$\widehat{\rho}_1 = \begin{pmatrix} 0 & \widehat{I}_2 \\ \widehat{I}_2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \widehat{\rho}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i\widehat{I}_2 \\ i\widehat{I}_2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \widehat{\rho}_3 = \begin{pmatrix} \widehat{I}_2 & 0 \\ 0 & -\widehat{I}_2 \end{pmatrix},$$
$$\widehat{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} 0 & \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \\ \widehat{\boldsymbol{\sigma}} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \widehat{\boldsymbol{\Sigma}} = \begin{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{\sigma}} & 0 \\ 0 & \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \end{pmatrix}, \qquad \widehat{\boldsymbol{\Gamma}} = \begin{pmatrix} 0 & -i\widehat{\boldsymbol{\sigma}} \\ i\widehat{\boldsymbol{\sigma}} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \widehat{\boldsymbol{\Omega}} = \begin{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{\sigma}} & 0 \\ 0 & -\widehat{\boldsymbol{\sigma}} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Тут $\widehat{I}_2$ — одинична 2×2 матриця; $\widehat{\boldsymbol{\sigma}} = \sum\limits_j \mathbf{e}_j \widehat{\sigma}_j$ $(j = x, y, z)$ і використано стандартне представлення матриць Дірака.

Перехід в РД до нерелятивістського наближення, залишаючись в рамках задачі на власні значення, спирається на перетворення Фолді–Вотхойзена (ФВ), мета якого навести гамільтоніан Дірака в блочно-діагональному вигляді

$$\widetilde{H}_D = U_{\mathrm{FW}} H_D U_{\mathrm{FW}}^{\dagger} = \begin{pmatrix} H_{\mathrm{prtcl}} & 0 \\ 0 & -H_{\mathrm{anti}} \end{pmatrix},$$

де U_{FW} — унітарний оператор ФВ перетворення. В ФВ представленні рівняння (2) для біспінорної хвильової функції розділяється на окремі рівняння для спінорних хвильових функцій частинки $H_{\mathrm{prtcl}}\psi = E\psi$ (верхній спінор біспінора) і античастики $H_{\mathrm{anti}}\varphi = E\varphi$ (нижній спінор).

У випадку вільної частинки ФВ перетворення можна провести точно. В присутності ж зовнішнього поля, взагалі кажучи, не існує представлення, в якому гамільтоніан був би точно блочно-діагональним. Але можна одержати наближене "представлення" з точністтю до деякого степеня $(1/c)^n$, в якому недіагональна частина має більш високий ступінь малості [4]. Для цього запишемо гамільтоніан Дірака (2) у вигляді $H_{\mathrm{D}} = mc^2\mathcal{H}$, де

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \varepsilon\mathcal{H}_1, \qquad \mathcal{H}_0 = \widehat{\rho}_3, \qquad \mathcal{H}_1 = \frac{\widehat{\boldsymbol{\alpha}}\mathbf{p}}{mc} + \frac{V}{mc^2}. \tag{4}$$

Тут множник ε визначає ступінь малості (величини з ε^n пропорційні $(mc)^{-n}$), який в кінці буде покладений одиниці.

Зображуючи оператор ФВ перетворення у вигляді $U_{\mathrm{FW}} = \exp(i\varepsilon S)$, маємо $\widetilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} + i\varepsilon[S, \mathcal{H}] + (i^2/2)\varepsilon^2[S, [S, \mathcal{H}]] + (i^3/3!)\varepsilon^3[S, [S, [S, \mathcal{H}]] + \cdots$. Сам оператор S шукається також у вигляді розкладу за малим параметром $S = S_1 + \varepsilon S_2 + \varepsilon^2 S_3 + \varepsilon^3 S_4 + \cdots$. Кожен оператор S_n знаходиться з умови блочно-діагонального вигляду $\widetilde{\mathcal{H}}$, який повинен бути лінійною комбінацією лише блочно-діагональних матриць Дірака $\widehat{I}$, $\widehat{\rho}_3$, $\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}$ та $\widehat{\boldsymbol{\Omega}}$. Послідовно визначаючи S_n, можна зобразити $\widetilde{\mathcal{H}}$ в блочно-діагональному вигляді з точністю до бажаного порядку за ε $(1/mc)$. Якщо обмежитися порядком ε^4, то достатньо визначити S_1, S_2 і S_3:

$$S_1 = \frac{1}{2mc}\widehat{\boldsymbol{\Gamma}} \cdot \mathbf{p}; \qquad S_2 = -\frac{\hbar}{4m^2c^3}\widehat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \boldsymbol{\nabla} V; \qquad S_3 = -\frac{1}{6m^3c^3}\widehat{\boldsymbol{\Gamma}} \cdot \mathbf{p}\mathbf{p}^2. \tag{5}$$

Використавши алгебру матриць Дірака, одержуємо

$$\widetilde{\mathcal{H}} = \widehat{\rho}_3 + \varepsilon\frac{V}{mc^2}\widehat{I} + \varepsilon^2\frac{1}{2m^2c^2}\widehat{\rho}_3\mathbf{p}^2 + \varepsilon^3\frac{1}{m^3c^3}\left[\frac{\hbar}{4c}\widehat{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot (\boldsymbol{\nabla} V \times \mathbf{p}) + \frac{\hbar^2}{8c}\widehat{I} \bigtriangleup V\right] - \\ - \varepsilon^4\frac{1}{8m^4c^4}\widehat{\rho}_3\mathbf{p}^4 + \mathcal{O}(\varepsilon^5). \tag{6}$$

Тут збережено множник $\varepsilon = 1$ щоб підкреслити ступінь наближення кожного з доданків. З цього виразу випливає, що в даному наближенні з точністю до ε^4 ФВ перетворення зводить гамільтоніан $\widetilde{\mathcal{H}}$ до блочно-діагонального вигляду, в якому гамільтоніан для спінорної хвильової функції частинки має добре відомий вигляд [3–5]

$$H = mc^2 + V(\mathbf{r}) + \frac{p^2}{2m} + \frac{\hbar}{4m^2c^2}\widehat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot (\boldsymbol{\nabla} V \times \mathbf{p}) + \frac{\hbar^2}{8m^2c^2}\triangle V - \frac{\mathbf{p}^4}{8m^3c^2} + \mathcal{O}(\varepsilon^5). \tag{7}$$

Якщо знехтувати поправкою ε^4 і відрахувати енергію від енергії спокою частинки, $E_{\mathtt{prtcl}} = mc^2 + \varepsilon E$, прийдемо до РШ з гамільтоніаном, в якому СОВ має відносний порядок малості ε^2. У випадку, коли потенціал залежить лише від однієї змінної, $V(\mathbf{r}) = V(z)$, гамільтоніан набуває вигляду (1). При цьому стан електрона з певним значенням 2D імпульсу $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ в площині КЯ описується хвильовою функцією $\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \exp[i(k_x x + k_y y)]\Psi(z)$, де $\Psi(z)$ — біспінор для РД (2), або спінор для РШ (1). Тобто, РД є системою чотирьох рівнянь для компонент біспінора, а РШ — системою двох рівнянь для компонент спінора.

Зображуючи спінор у вигляді $\Psi(z) = (\psi_1 \psi_2)^T$, після підстановки $\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ в РШ (1) одержуємо систему рівнянь

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_1}{dz^2} + \left(V + \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - E\right)\psi_1 - i\frac{\hbar^2 V'}{4m^2c^2}(k_x - ik_y)\psi_2 = 0, \\ -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_2}{dz^2} + \left(V + \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - E\right)\psi_2 + i\frac{\hbar^2 V'}{4m^2c^2}(k_x + ik_y)\psi_1 = 0, \end{aligned} \tag{8}$$

де $k^2 = k_x^2 + k_y^2$. Підкреслимо, що останні доданки в лівих частинах рівнянь (8) обумовлені СОВ і мають порядок малості ε^2, а більш високими релятивістськими поправками знехтувано.

У роботі [1] враховано той факт, що в присутності зовнішнього поля $V(\mathbf{r}) = V(z)$ із всіх спінових операторів, які комутують з гамільтоніаном у вільному просторі [6], інваріантами залишаються z-компоненти операторів електричної спінової

$$\widehat{\epsilon}_z = \widehat{\Omega}_x p_y - \widehat{\Omega}_y p_x \tag{9}$$

і магнітної спінової

$$\widehat{\mu}_z = \widehat{\Sigma}_z + \frac{1}{mc}(\widehat{\Gamma}_x p_y - \widehat{\Gamma}_y p_x) \tag{10}$$

поляризацій та x- і y-компоненти просторової частини чотиривимірного псевдовектора спінової поляризації

$$\widehat{\mathcal{S}}_x = \widehat{\Omega}_x + \widehat{\rho}_1\frac{p_x}{mc}, \qquad \widehat{\mathcal{S}}_y = \widehat{\Omega}_y + \widehat{\rho}_1\frac{p_y}{mc}. \tag{11}$$

Кожен з цих операторів, комутуючи з гамільтоніаном, має з ним спільну систему власних функцій. Але всі вони не комутують один з одним і мають різні власні функції. Тому РД має три типи власних функцій, що відповідають трьом різним спіновим станам залежно від того, який з операторів (9)–(11) має певне значення.

Запишемо оператори (9)–(11) в ФВ зображенні, беручи до уваги конфігурацію зовнішнього поля, $V(\mathbf{r}) = V(z)$. Оператор $\widehat{\epsilon}_z$, комутуючи з оператором ФВ перетворення, $[S, \widehat{\epsilon}_z] = 0$, не змінює свій блочно-діагональний вигляд (9), а для інших знаходимо

$$
\begin{aligned}
&U_{\mathrm{FW}}\widehat{\mu}_z U_{\mathrm{FW}}^{\dagger} = \widehat{\Sigma}_z + \varepsilon^2 \frac{1}{2m^2c^2}(\widehat{\mathbf{\Sigma}}_z \mathbf{p}^2 - \widehat{\mathbf{\Sigma}} \cdot \mathbf{p} p_z) + \mathcal{O}(\varepsilon^4), \\
&U_{\mathrm{FW}}\widehat{\mathcal{S}}_j U_{\mathrm{FW}}^{\dagger} = \widehat{\Omega}_j + \varepsilon^2 \frac{1}{2m^2c^2}\widehat{\mathbf{\Omega}} \cdot \mathbf{p} p_j + \mathcal{O}(\varepsilon^4), \qquad j = x, y.
\end{aligned} \tag{12}
$$

Таким чином, відповідні електронному спінору блоки цих операторів матимуть вигляд

$$
\widehat{\epsilon}_{2z} = \widehat{\sigma}_y p_x - \widehat{\sigma}_x p_y, \tag{13}
$$

$$
\widehat{\mu}_{2z} = \widehat{\sigma}_z + \frac{1}{2m^2c^2}(\widehat{\sigma}_z \mathbf{p}^2 - \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{p} p_z), \tag{14}
$$

$$
\widehat{\mathcal{S}}_{2x} = \widehat{\sigma}_x + \frac{1}{2m^2c^2}\widehat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{p} p_x, \qquad \widehat{\mathcal{S}}_{2y} = \widehat{\sigma}_y + \frac{1}{2m^2c^2}\widehat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{p} p_y. \tag{15}
$$

Тут, як і в гамільтоніані (1), знехтувано поправками ε^4.

Оператор (13) комутує з гамільтоніаном, оскільки в (1) СОВ визначається саме цим оператором. Для операторів (14) і (15) матимемо

$$
[\widehat{\mu}_{2z}, H] = \mathcal{O}(\varepsilon^4), \qquad [\widehat{\mathcal{S}}_{2x}, H] = \mathcal{O}(\varepsilon^4).
$$

Оскільки вони, як і сам гамільтоніан, визначені з точністю до ε^2, то комутація виконується наближено. Зрозуміло, що врахування подальших поправок буде зсувати некомутативність до більш високого степеня за ε.

Розглянемо рівняння (8), зображуючи компоненти 2D хвильового вектора $\mathbf{k}$ у вигляді $k_x = k\cos\phi$, $k_y = k\sin\phi$, де $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ і $\tan\phi = k_y/k_x$.

1. Розв'язок системи рівнянь (8) шукаємо у вигляді $\psi_1 = e^{-i(\phi+\pi/2)/2} f(z)$, $\psi_2 = \sigma e^{i(\phi+\pi/2)/2} f(z)$, де $\sigma = \pm 1$ відповідає двом варіантам розв'язання. Тоді система рівнянь (8) зводиться до одного рівняння на власні значення

$$
-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2 f}{dz^2} + \left(V + \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - E\right) f + \sigma \frac{\hbar^2 V'}{4m^2c^2} k f = 0, \tag{16}
$$

яке у випадку прямокутної КЯ допускає точний розв'язок з законом дисперсії Рашби [6, 7] для 2D електронів

$$
E_{n\sigma}(\mathbf{k}) = E_n + \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m_n^*} + \sigma\alpha_n k. \tag{17}
$$

Тут E_n ($n = 1, \ldots, n_{\max}$) — енергія зв'язаних станів в одновимірній КЯ [3, 4], а параметр α_n, відомий як параметр Бичкова–Рашби [2], відмінний від нуля для інверсно асиметричної КЯ. Якщо розглядати СОВ як збурення, то в першому порядку теорії збурень маємо $\alpha_n = \hbar^2 \langle f_n | V' | f_n \rangle / (4m^2c^2)$, де f_n — розв'язки незбуреного рівняння, що визначає енергії зв'язаних станів.

Саме цей розв'язок широко застосовується при аналізі спінових станів 2D електронного газу [2]. Він одразу напрошується як пропорційний власному спінору матриці $\hbar(\widehat{\sigma}_y k_x - \widehat{\sigma}_x k_y)$, яка, по суті, і є оператором (13) з власними значеннями $\epsilon = -\sigma\hbar k$. Але це не єдиний розв'язок системи (8).

2. Кожне рівняння в (8) можна записати як неоднорідне рівняння, де права частина $\sim \varepsilon^2$ і визначається іншою функцією. Розв'язок неоднорідного рівняння при заданій правій частині має порядок ε^2. Маємо два варіанти розв'язків, поклавши $\psi_1 = f(z)$, $\psi_2 = \varepsilon^2\varphi$, або $\psi_1 = \varepsilon^2\varphi$, $\psi_2 = f(z)$. Шукаючи розв'язки в такому вигляді і нехтуючи величинами $\sim \varepsilon^4$ як перевищенням точності самих рівнянь, знаходимо, що $f(z)$ задовольняє рівняння на власні значення

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2 f}{dz^2} + \left(V + \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - E\right) f = 0. \tag{18}$$

З іншого рівняння з тією ж точністтю можна одержати

$$\varphi = \pm i \frac{\hbar^2 k}{4m^2c^2} e^{\pm i\phi} f',$$

де $f' = df/dz$, а знаки "+" і "−" відповідають розв'язкам $\psi_2 \sim \varepsilon^2$ і $\psi_1 \sim \varepsilon^2$ відповідно. Ці два розв'язки дають два спінори, які, як легко переконатись, є наближено, з точністю до ε^2 включно, власними спінорами оператора (14) з власними значеннями $\mu = \pm(1 + +\hbar^2k^2/(2m^2c^2))$. Таким чином, розв'язкам можна приписати спінове квантове число $\sigma = \pm 1$, зміст якого відрізняється від попереднього. Із рівняння (18) випливає, що в цьому спіновому стані 2D електронні зони вироджені по спіну, маючи закони дисперсії (17) з $\alpha_n \equiv 0$.

3. В системі (8) два рівняння можна, наприклад, скласти та відняти одне із одного. Тоді прийдемо до нової системи рівнянь, в якій, поклавши $\psi_1 + \psi_2 = \widetilde{\psi}_1$ та $\psi_1 - \psi_2 = \widetilde{\psi}_2$, будемо мати

$$\begin{aligned}
&-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dz^2}\widetilde{\psi}_1 + \left(V + \frac{\hbar^2k^2}{2m} - E\right)\widetilde{\psi}_1 - \frac{\hbar^2 k_y}{4m^2c^2}V'\widetilde{\psi}_1 = -i\frac{\hbar^2 k_x}{4m^2c^2}V'\widetilde{\psi}_2,\\
&-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dz^2}\widetilde{\psi}_2 + \left(V + \frac{\hbar^2k^2}{2m} - E\right)\widetilde{\psi}_2 + \frac{\hbar^2 k_y}{4m^2c^2}V'\widetilde{\psi}_2 = i\frac{\hbar^2 k_x}{4m^2c^2}V'\widetilde{\psi}_1.
\end{aligned} \tag{19}$$

Тут знову кожна функція визначається неоднорідним рівнянням з правою частиною $\sim \varepsilon^2$, в якій присутня інша функція. Тоді, відповідно до умов $\widetilde{\psi}_1 = f(z)$, $\widetilde{\psi}_2 = \varepsilon^2\varphi$ або $\widetilde{\psi}_1 = \varepsilon^2\varphi$, $\widetilde{\psi}_2 = f(z)$, знехтувавши величинами $\sim \varepsilon^4$, одержуємо два розв'язки. При цьому функція $f(z)$ задовольняє рівняння, подібне рівнянню (16), в якому СОВ пропорційна не модулю хвильового вектора, а лише одній його компоненті k_y, що призводить до спін-розщепленого закону дисперсії 2D електронних зон

$$E_{n\sigma}(\mathbf{k}) = E_n + \frac{\hbar^2\mathbf{k}^2}{2m} + \sigma\alpha_n k_y \tag{20}$$

з анізотропним в $\mathbf{k}$-просторі характером дисперсії, на відміну від ізотропного в спіновому стані (17). Для малої функції $\varphi(z)$ знаходимо

$$\varphi = -i\sigma\frac{\hbar^2 k_x}{2m^2c^2}(f' + \sigma k_y f).$$

Тут $\sigma = 1$ для розв'язку, в якому $\widetilde{\psi}_2 \sim \varepsilon^2$, і $\sigma = -1$, коли $\widetilde{\psi}_1 \sim \varepsilon^2$.

Двом розв'язкам відповідають два спінори, в яких $\psi_1 = (\widetilde{\psi}_1 + \widetilde{\psi}_2)/2$ і $\psi_2 = (\widetilde{\psi}_1 - \widetilde{\psi}_2)/2$. Можна пересвідчитися, що, з точністю до ε^2, ці два спінори будуть власними спінорами оператора $\widehat{\mathcal{S}}_{2x}$ з власними значеннями $s_x = \sigma(1 + \hbar^2 k_x^2/(2m^2c^2))$.

Три типи вказаних розв'язків відповідають трьом різним спіновим станам 2D електронів, захоплених КЯ. Ці розв'язки повністю збігаються з одержаними в [1] точними розв'язками РД. Таким чином, вивчаючи в нерелятивістському наближенні спіновий ступінь вільності 2D електронів, необхідно мати на увазі релятивістські закони збереження.

Автор вдячний Е. І. Рашбі, В. М. Локтеву та Л. С. Брижик за корисні обговорення.

Дана робота виконана за підтримки цільової програми фундаментальних досліджень Відділення фізики і астрономії НАН України.

1. *Eremko A. A., Brizhik L. S., Loktev V. M.* Spin states of Dirac equation and Rashba spin-orbit interaction // Preprint arXiv – 2014. – 1408.6078v1. – 25 p.
2. *Fabian J., Matos-Abiague A., Ertler C., Stano P., Žutić I.* Semiconductor spintronics // Acta Physica Slovaca. – 2007. – **57**. – P. 565–907.
3. *Давидов О. С.* Квантова механіка. – Київ: ВД "Академперіодика", 2012. – 707 с.
4. *Мессиа А.* Квантовая механика. Т. 2. – Москва: Наука, 1979. – 583 с.
5. *Соколов А. А., Тернов И. М.* Релятивистский электрон. – Москва: Наука, 1974. – 391 с.
6. *Рашба Э. И.* Свойства полупроводников с петлей экстремумов. I. Циклотронный и комбинированный резонанс в магнитном поле, перпендикулярном плоскости петли // Физика тв. тела. – 1960. – **2**, вып. 6. – С. 1224–1238.
7. *Бычков Ю. А., Рашба Э. И.* Свойства двумерного электронного газа со снятым вырождением спектра // Письма ЖЭТФ. – 1984. – **39**, вып. 2. – С. 66–69.

Інститут теоретичної фізики ім. М. М. Боголюбова НАН України, Київ

Надійшло до редакції 30.10.2014

А. А. Еремко

Спиновые состояния квазидвумерных электронов

На примере квазидвумерных электронов показано, что для полного описания их спиновой степени свободы необходимо принимать во внимание релятивистские законы сохранения, которые в нерелятивистской теории выполняются лишь приближенно.

A. A. Eremko

Spin states of quasi-two-dimensional electrons

Using the example of quasi-two-dimensional electrons, it is shown that the full description of the electron spin degree of freedom requires one to consider relativistic conservation laws, which are fulfilled only approximately in a non-relativistic theory.