УДК 517.548

В. С. Шпаківський

Конструктивний опис моногенних функцій у скінченновимірних комутативних алгебрах

(Представлено членом-кореспондентом НАН України Ю. А. Дроздом)

Отримано конструктивний опис моногенних функцій зі значеннями в довільній скінченновимірній комутативній асоціативній алгебрі з одиницею за допомогою голоморфних функцій комплексної змінної.

У. Гамільтон, побудувавши некомутативну алгебру кватерніонів над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$, започаткував розвиток гіперкомплексного аналізу. В роботі К. Сегре [1] побудовано алгебру комутативних кватерніонів над полем $\mathbb{R}$, яка є ізоморфною алгебрі бікомплексних чисел над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$.

У роботах Ф. Рінглеба [2] і Дж. Райлі [3] отримано конструктивний опис аналітичних функцій бікомплексної змінної, а саме: доведено, що кожну аналітичну функцію бікомплексної змінної можна побудувати за допомогою двох голоморфних функцій комплексної змінної.

П. Кетчум [4] вперше використав аналітичні функції, що набувають значення в комутативній алгебрі, відмінній від алгебри комплексних чисел, для побудови розв'язків тривимірного рівняння Лапласа. Він показав, що кожна аналітична функція $\Phi(\zeta)$ змінної $\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3$ задовольняє тривимірне рівняння Лапласа, якщо лінійно незалежні елементи e_1, e_2, e_3 комутативної алгебри задовольняють умову

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 0, \tag{1}$$

оскільки

$$\Delta_3\Phi := \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \equiv \Phi''(\zeta)(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) = 0, \tag{2}$$

де $\Phi'' := (\Phi')'$ і $\Phi'(\zeta)$ визначається рівністю $d\Phi = \Phi'(\zeta)d\zeta$. П. Кетчум також показав, що в алгебрі кватерніонів Сегре існує така трійка векторів e_1, e_2, e_3, що задовольняє рівність (1).

І. П. Мельниченко [5] запропонував розглядати в рівностях (2) функції Φ, двічі диференційовні за Гато, при цьому описав усі базиси $\{e_1, e_2, e_3\}$ тривимірних комутативних алгебр з одиницею над полем $\mathbb{C}$, які задовольняють рівність (1) (див. [6]).

Для цих тривимірних комутативних алгебр, асоційованих з тривимірним рівнянням Лапласа, в роботах [7–9] отримано конструктивний опис усіх моногенних (тобто неперервних і диференційовних за Гато) розв'язків рівняння $\Delta_3\Phi = 0$ за допомогою трьох відповідних голоморфних функцій комплексної змінної. Отримані у такий спосіб представлення моногенних функцій дали можливість встановити нескіченну диференційовність за Гато цих функцій і довести аналоги класичних інтегральних теорем для них (див., наприклад, [10, 11]).

В роботах [12, 13] встановлено конструктивний опис моногенних функцій (зв'язаних з рівнянням $\Delta_3\Phi = 0$) зі значеннями в деяких n-вимірних комутативних алгебрах за допомогою відповідних n голоморфних функцій комплексної змінної і, спираючись на одержані представлення моногенних функцій, доведено аналоги ряду класичних результатів комплексного аналізу.

У цій роботі встановлено конструктивний опис моногенних функцій зі значеннями в довільній скінченновимірній комутативній асоціативній алгебрі з одиницею за допомогою голоморфних функцій комплексної змінної.

1. Алгебра $\mathbb{A}_n^m$. Нехай $\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел і $m,\, n \in \mathbb{N}$ такі, що $m \leqslant n$. Нехай $\mathbb{A}_n^m$ — довільна комутативна асоціативна алгебра з одиницею над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$. Е. Картан [14, с. 33] довів, що в алгебрі $\mathbb{A}_n^m$ існує базис $\{I_k\}_{k=1}^n$, який задовольняє такі правила множення:

1) $\forall\, r,\ s \in [1, m] \bigcap \mathbb{N}$: $\quad I_r I_s = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad r \neq s, \\ I_r & \text{при} \quad r = s; \end{cases}$

2) $\forall\, r,\ s \in [m+1, n] \bigcap \mathbb{N}$: $\quad I_r I_s = \sum\limits_{k=\max\{r,s\}+1}^{n} \Upsilon_{r,k}^{s} I_k;$

3) $\forall\, s \in [m+1, n] \bigcap \mathbb{N}\ \exists!\, u_s \in [1, m] \bigcap \mathbb{N}\ \forall\, r \in [1, m] \bigcap \mathbb{N}$: $\quad I_r I_s = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad r \neq u_s, \\ I_s & \text{при} \quad r = u_s. \end{cases}$

Крім того, структурні константи $\Upsilon_{r,k}^{s} \in \mathbb{C}$ задовольняють умови асоціативності:

(A1) $(I_r I_s) I_p = I_r (I_s I_p)\ \forall\, r, s, p \in [m+1, n] \bigcap \mathbb{N}$;

(A2) $(I_u I_s) I_p = I_u (I_s I_p)\ \forall\, u \in [1, m] \bigcap \mathbb{N}\ \forall\, s,\ p \in [m+1, n] \bigcap \mathbb{N}$.

Очевидно, що перші m базисних векторів $\{I_u\}_{u=1}^m$ є ідемпотентами і породжують напівпросту підалгебру алгебри $\mathbb{A}_n^m$, а вектори $\{I_r\}_{r=m+1}^n$ породжують нільпотентну підалгебру цієї алгебри. Одиницею алгебри $\mathbb{A}_n^m$ є елемент $1 = \sum\limits_{u=1}^{m} I_u$.

Алгебра $\mathbb{A}_n^m$ містить m максимальних ідеалів

$$\mathcal{I}_u := \left\{ \sum_{k=1, k\neq u}^{n} \lambda_k I_k \colon \lambda_k \in \mathbb{C} \right\}, \qquad u = 1, 2, \ldots, m,$$

перетином яких є радикал

$$\mathcal{R} := \left\{ \sum_{k=m+1}^{n} \lambda_k I_k \colon \lambda_k \in \mathbb{C} \right\}.$$

Визначимо m лінійних функціоналів $f_u \colon \mathbb{A}_n^m \to \mathbb{C}$ рівностями

$$f_u(I_u) = 1, \qquad f_u(\omega) = 0 \qquad \forall\, \omega \in \mathcal{I}_u, \qquad u = 1, 2, \ldots, m.$$

Оскільки ядрами функціоналів f_u є відповідно максимальні ідеали $\mathcal{I}_u$, то ці функціонали є також неперервними і мультиплікативними (див. [15, с. 147]).

2. Моногенні функції. Нехай

$$e_1 = 1, \qquad e_2 = \sum_{r=1}^{n} a_r I_r, \qquad e_3 = \sum_{r=1}^{n} b_r I_r$$

при $a_r, b_r \in \mathbb{C}$ — трійка векторів в алгебрі $\mathbb{A}_n^m$, які лінійно незалежні над полем $\mathbb{R}$. Це означає, що рівність

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = 0, \qquad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R},$$

виконується тоді і тільки тоді, коли $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Нехай $\zeta := xe_1 + ye_2 + ze_3$, де $x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$. Очевидно, що $\xi_u := f_u(\zeta) = x + ya_u + zb_u$, $u = 1, 2, \ldots, m$. Виділимо в алгебрі $\mathbb{A}_n^m$ лінійну оболонку $E_3 := \{\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3 \colon x, y, z \in \in \mathbb{R}\}$, породжену векторами $e_1,\ e_2,\ e_3$.

Далі істотним є припущення: $f_u(E_3) = \mathbb{C}$ при всіх $u = 1, 2, \ldots, m$, де $f_u(E_3)$ — образ множини E_3 при відображенні f_u. Очевидно, що це має місце тоді і тільки тоді, коли при кожному фіксованому $u = 1, 2, \ldots, m$ хоча б одне з чисел a_u чи b_u належить $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Області Ω тривимірного простору $\mathbb{R}^3$ поставимо у відповідність область $\Omega_\zeta := \{\zeta = = xe_1 + ye_2 + ze_3 \colon (x, y, z) \in \Omega\}$ в E_3.

Неперервну функцію $\Phi \colon \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_n^m$ називатимемо *моногенною* в області $\Omega_\zeta \subset E_3$, якщо Φ диференційовна за Гато в кожній точці цієї області, тобто якщо для кожного $\zeta \in \Omega_\zeta$ існує елемент $\Phi'(\zeta)$ алгебри $\mathbb{A}_n^m$ такий, що виконується рівність

$$\lim_{\varepsilon \to 0+0} (\Phi(\zeta + \varepsilon h) - \Phi(\zeta))\varepsilon^{-1} = h\Phi'(\zeta) \qquad \forall\, h \in E_3.$$

$\Phi'(\zeta)$ називається *похідною Гато* функції Φ в точці ζ.

Розглянемо розклад функції $\Phi \colon \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_n^m$ за базисом $\{I_k\}_{k=1}^n$:

$$\Phi(\zeta) = \sum_{k=1}^{n} U_k(x, y, z) I_k. \tag{3}$$

У випадку, коли функції $U_k \colon \Omega \to \mathbb{C}$ є $\mathbb{R}$-диференційовними в області Ω, тобто для довільного $(x, y, z) \in \Omega$

$$U_k(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - U_k(x, y, z) = \frac{\partial U_k}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial U_k}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial U_k}{\partial z}\Delta z + \\ + o\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}\right), \qquad (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \to 0,$$

функція Φ моногенна в області Ω_ζ тоді і тольки тоді, коли в кожній точці області Ω_ζ виконуються умови

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} e_2, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} e_3. \tag{4}$$

3. Розклад резольвенти.

Лема. *Розклад резольвенти має вигляд*

$$(t - \zeta)^{-1} = \sum_{u=1}^{m} \frac{1}{t - \xi_u} I_u + \sum_{s=m+1}^{n} \sum_{k=2}^{s-m+1} \frac{Q_{k,s}}{(t - \xi_{u_s})^k} I_s \tag{5}$$

$$\forall\, t \in \mathbb{C} \colon t \neq \xi_u, \qquad u = 1, 2, \ldots, m,$$

де $Q_{k,s}$ визначаються такими рекурентними співвідношеннями:

$$Q_{2,s} = ya_s + zb_s, \qquad Q_{k,s} = \sum_{p=k+m-2}^{s-1} Q_{k-1,p} B_{p,s}$$

і $B_{p,s} := \sum\limits_{r=m+1}^{s-1} (ya_r + zb_r)\Upsilon_{p,s}^r$, $s = m+2, \ldots, n$, *а натуральні числа* u_s *визначені в правилі 3 таблиці множення алгебри* $\mathbb{A}_n^m$.

З леми випливає, що точки $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, які відповідають необоротним елементам $\zeta \in \in \mathbb{A}_n^m$, лежать на прямих

$$L_u \colon \begin{cases} x + y \operatorname{Re} a_u + z \operatorname{Re} b_u = 0, \\ y \operatorname{Im} a_u + z \operatorname{Im} b_u = 0 \end{cases}$$

в тривимірному просторі $\mathbb{R}^3$.

4. Конструктивний опис моногенних функцій. Нехай область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ є опуклою в напрямку прямих L_u, $u = 1, 2, \ldots, m$. Позначимо через D_u область комплексної площини $\mathbb{C}$, на яку область Ω_ζ відображається функціоналом f_u.

Розглянемо лінійні оператори A_u, $u = 1, 2, \ldots, m$, які моногенній функції $\Phi \colon \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_n^m$ ставлять у відповідність голоморфні функції $F_u \colon D_u \to \mathbb{C}$ за формулою

$$F_u(\xi_u) = f_u(\Phi(\zeta)),$$

де $\xi_u = f_u(\zeta) \equiv x + ya_u + zb_u$ і $\zeta \in \Omega_\zeta$. Так, як і в лемі 1 з роботи [7], доводиться, що значення $F_u(\xi_u)$ не залежить від вибору точки ζ, для якої $f_u(\zeta) = \xi_u$.

Теорема. *Нехай область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ є опуклою в напрямку прямих L_u і $f_u(E_3) = \mathbb{C}$ при всіх $u = 1, 2, \ldots, m$. Тоді кожна моногенна функція $\Phi \colon \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_n^m$ подається у вигляді*

$$\Phi(\zeta) = \sum_{u=1}^{m} I_u \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_u} F_u(t)(t - \zeta)^{-1} dt + \sum_{s=m+1}^{n} I_s \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{u_s}} G_s(t)(t - \zeta)^{-1} dt, \tag{6}$$

де F_u — деяка голоморфна функція в області D_u; G_s — деяка голоморфна функція в області D_{u_s}; Γ_q — замкнена жорданова спрямлювана крива, яка лежить в області D_q, охоплює точку ξ_q і не містить точок ξ_ℓ, $\ell = 1, 2, \ldots, m$, $\ell \neq q$.

Доведення. Покладемо

$$F_u := A_u \Phi, \qquad u = 1, 2, \ldots, m.$$

Легко показати, що значення моногенної функції

$$\Phi_0(\zeta) := \Phi(\zeta) - \sum_{u=1}^{m} I_u \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_u} F_u(t)(t - \zeta)^{-1} dt$$

належать радикалу алгебри, тобто $\Phi_0(\zeta) \in \mathcal{R}$ для всіх $\zeta \in \Omega_\zeta$. Тому функція Φ_0 має вигляд

$$\Phi_0(\zeta) = \sum_{s=m+1}^{n} V_s(x, y, z) I_s, \tag{7}$$

де $V_s \colon \Omega \to \mathbb{C}$, і задовольняє умови Коші–Рімана (4) при $\Phi = \Phi_0$.

Підставляючи в умови (4) рівність (7) і враховуючи при цьому умову $f_{u_{m+1}}(E_3) = \mathbb{C}$, отримуємо $V_{m+1}(x, y, z) \equiv G_{m+1}(\xi_{u_{m+1}})$, де G_{m+1} — довільна голоморфна функція в області $D_{u_{m+1}}$.

Далі показуємо, що значення моногенної функції

$$\Phi_1(\zeta) := \Phi_0(\zeta) - I_{m+1}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{u_{m+1}}} G_{m+1}(t)(t-\zeta)^{-1}dt$$

належать множині $\left\{\sum\limits_{k=m+2}^{n}\alpha_k I_k\colon \alpha_k \in \mathbb{C}\right\}$. Тому функція Φ_1 має вигляд

$$\Phi_0(\zeta) = \sum_{s=m+2}^{n}\widetilde{V}_s(x, y, z)I_s,$$

де $\widetilde{V}_s\colon \Omega \to \mathbb{C}$. Аналогічно до того, як знайдено функцію V_{m+1}, отримуємо $\widetilde{V}_{m+2}(x, y, z) \equiv \equiv G_{m+2}(\xi_{u_{m+2}})$, де G_{m+2} — довільна голоморфна функція в області $D_{u_{m+2}}$.

Продовжуючи цей процес і розглядаючи послідовно моногенні функції

$$\Phi_j(\zeta) := \Phi_{j-1}(\zeta) - I_{m+j}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{u_{m+j}}} G_{m+j}(t)(t-\zeta)^{-1}dt$$

при $j = 2, 3, \ldots, n-m-1$, отримуємо вираз (6) для функції Φ. Теорему доведено.

Внаслідок розкладу (5) рівність (6) записується в такому вигляді:

$$\Phi(\zeta) = \sum_{u=1}^{m}F_u(\xi_u)I_u + \sum_{s=m+1}^{n}\sum_{k=2}^{s-m+1}\frac{1}{(k-1)!}Q_{k,s}F_{u_s}^{(k-1)}(\xi_{u_s})I_s + \sum_{q=m+1}^{n}G_q(\xi_{u_q})I_q +$$

$$+ \sum_{q=m+1}^{n}\sum_{s=m+1}^{n}\sum_{k=2}^{s-m+1}\frac{1}{(k-1)!}Q_{k,s}G_q^{(k-1)}(\xi_{u_q})I_qI_s. \tag{8}$$

Отже, кожна з рівностей (6) або (8) дає спосіб явної побудови будь-якої моногенної функції $\Phi\colon \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_n^m$ за допомогою n відповідних голоморфних функцій комплексної змінної.

Нижченаведене твердження випливає безпосередньо з рівності (8), права частина якої є моногенною функцією в області $\Pi_\zeta := \{\zeta \in E_3\colon f_u(\zeta) = D_u, u = 1, 2, \ldots, m\}$.

Наслідок 1. *Якщо область Ω опукла в напрямку прямих L_u і $f_u(E_3) = \mathbb{C}$ при всіх $u = 1, 2, \ldots, m$, то кожна моногенна функція $\Phi\colon \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_n^m$ продовжується до функції, моногенної в області Π_ζ.*

Принциповим наслідком рівності (6) є таке твердження, яке справедливе для довільної області Ω_ζ.

Наслідок 2. *Нехай $f_u(E_3) = \mathbb{C}$ при всіх $u = 1, 2, \ldots, m$. Тоді для кожної моногенної функції $\Phi\colon \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_n^m$ в довільній області Ω_ζ похідні Гато $\Phi^{(r)}$ є моногенними функціями в Ω_ζ для всіх r.*

Якщо область Ω опукла в напрямку прямих L_u, $u = 1, 2, \ldots, m$, то наслідком виразу (6) є така формула для похідної Гато $\Phi^{(r)}$:

$$\Phi^{(r)}(\zeta) = \sum_{u=1}^{m}I_u\frac{r!}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_u}F_u(t)((t-\zeta)^{-1})^{r+1}dt + \sum_{s=m+1}^{n}I_s\frac{r!}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{u_s}}G_s(t)((t-\zeta)^{-1})^{r+1}dt \quad \forall\, \zeta \in \Omega_\zeta.$$

1. *Segre C.* The real representations of complex elements and extentions to bicomplex systems // Math. Ann. – 1892. – **40**. – P. 413–467.
2. *Ringleb F.* Beiträge zur funktionentheorie in hyperkomplexen systemen. I // Rend. Circ. Mat. Palermo. – 1933. – **57**, No 1. – P. 311–340.
3. *Riley J. D.* Contributions to the theory of functions of a bicomplex variable // Tohoku Math. J. – 1953. – **5**, No 2. – P. 132–165.
4. *Ketchum P. W.* Analytic functions of hypercomplex variables // Trans. Amer. Math. Soc. – 1928. – **30**, No 4. – P. 641–667.
5. *Мельниченко И. П.* О представлении моногенными функциями гармонических отображений // Укр. мат. журн. – 1975. – **27**, № 5. – С. 606–613.
6. *Мельниченко И. П., Плакса С. А.* Коммутативные алгебры и пространственные потенциальные поля. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2008. – 230 с.
7. *Плакса С. А., Шпаковский В. С.* Конструктивное описание моногенных функций в гармонической алгебре третьего ранга // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 8. – С. 1078–1091.
8. *Плакса С. А., Пухтаевич Р. П.* Конструктивное описание моногенных функций в трехмерной гармонической алгебре с одномерным радикалом // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 5. – С. 670–680.
9. *Pukhtaievych R. P.* Monogenic functions in a three-dimensional harmonic semi-simple algebra // Zb. Pr. Inst. Mat. NAN Ukraine. – 2013. – **10**, No 4–5. – P. 352–361.
10. *Shpakivskyi V. S., Plaksa S. A.* Integral theorems and a Cauchy formula in a commutative three-dimensional harmonic algebra // Bull. Soc. Sci. Lett. Łódź. – 2010. – **60**. – P. 47–54.
11. *Plaksa S. A.* Commutative algebras associated with classic equations of mathematical physics // Advances in Applied Analysis, Trends in Mathematics. – Basel: Springer, 2012. – P. 177–223.
12. *Plaksa S. A., Shpakivskyi V. S.* Monogenic functions in a finite-dimensional algebra with unit and radical of maximal dimensionality // J. Algerian Math. Soc. – 2014. – **1**. – P. 1–13.
13. *Plaksa S. A., Pukhtaievych R. P.* Constructive description of monogenic functions in n-dimensional semi-simple algebra // An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa. – 2014. – **22**, No 1. – P. 221–235.
14. *Cartan E.* Les groupes bilinéares et les systèmes de nombres complexes // Ann. fac. sci. Toulouse. – 1898. – **12**, No 1. – P. 1–64.
15. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 829 с.

Інститут математики НАН України, Київ

Надійшло до редакції 04.11.2014

В. С. Шпаковский

Конструктивное описание моногенных функций в конечномерных коммутативных алгебрах

Получено конструктивное описание моногенных функций со значениями в произвольной конечномерной коммутативной ассоциативной алгебре с единицей при помощи голоморфных функций комплексной переменной.

V. S. Shpakivskyi

Constructive description of monogenic functions in finite-dimensional commutative algebras

We obtain a constructive description of monogenic functions taking values in an arbitrary finite-dimensional commutative associative algebra with unity with the help of holomorphic functions of the complex variable.