ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

4 • 2015

ІНФОРМАТИКА ТА КІБЕРНЕТИКА

УДК 004.655

А. С. Сенченко

О сохранении ключей в табличных алгебрах

(Представлено академиком НАН Украины В. Н. Редько)

Исследована задача сохранения ключей, в том числе и простых ключей, сигнатурными операциями табличных алгебр. Показано, что операции пересечения, разности, селекции, соединения и деления таблиц сохраняют ключи и не сохраняют простые ключи, а операции проекции и переименования сохраняют как ключи, так и простые ключи. Найдены необходимые и достаточные условия, при которых операция активного дополнения сохраняет ключ.

В современном мире информационные системы широко используются практически во всех областях деятельности человека. Базы данных (БД) являются ядром для подавляющего большинства информационных систем. При всем разнообразии различных типов БД (объектно-ориентированные, графовые, иерархические, объектно-реляционные, облачные, сетевые) наиболее распространенными остаются реляционные БД, математическая модель которых была впервые предложена Э. Коддом в 1970 г. [1]. С математической точки зрения реляционная БД является конечным множеством конечных отношений различной арности между заранее определенными множествами элементарных данных, т. е. реляционная база данных — конечная модель.

Табличные алгебры, введенные В. Н. Редько и Д. Б. Буем [2], построены на основе реляционных алгебр Э. Кодда и существенно их развивают. Они составляют теоретический фундамент языков запросов современных табличных БД. Элементы носителя табличной алгебры уточняют реляционные структуры данных, а сигнатурные операции построены на базе основных табличных манипуляций в реляционных алгебрах и SQL-подобных языках.

В реляционных БД важную роль играют ключи таблицы — один или несколько ее атрибутов, на значениях которых записи таблицы однозначно идентифицируются. С помощью ключей (первичных и внешних) устанавливаются бинарные связи типа “один-ко-многим”. Эти связи служат для поддержания целостности БД. Как правило, ключи определяются таким образом, чтобы они были инвариантными к любым изменениям записей в БД.

В настоящей работе рассматривается вопрос сохранения ключей таблиц, полученных в результате применения к ним сигнатурных операций табличных алгебр. Полученные результаты представляют интерес для выбора оптимальных ключей при проектировании реляционных БД [3, 4].

Основные определения. Зафиксируем некоторое непустое множество атрибутов $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$. Произвольное конечное подмножество множества A назовем схемой, причем схема может быть пустым множеством. Строкой s схемы R называется множество пар $s = \{(A'_1, d_1), \ldots, (A'_k, d_k)\}$, проекция которого по первой компоненте равна R, причем атрибуты $A'_1, \ldots, A'_k$ попарно различны, т. е. строка является функциональным бинарным отношением. Таблицей схемы R называется конечное множество строк схемы R, количество строк в таблице T обозначаем $|T|$. Далее в работе рассматриваем таблицы схемы R с количеством атрибутов k. На множестве всех таких таблиц введены следующие операции:

1) объединение $\bigcup\limits_R$ двух таблиц схемы R — таблица, состоящая из тех и только тех строк, которые принадлежат хотя бы одной из исходных таблиц;

2) пересечение $\bigcap\limits_R$ двух таблиц схемы R — таблица, состоящая из тех и только тех строк, которые принадлежат одновременно обеим исходным таблицам;

3) разность $T_1 \underset{R}{-} T_2$ двух таблиц схемы R — таблица, состоящая из тех и только тех строк, которые принадлежат таблице T_1 и не принадлежат таблице T_2.

Для введения операции насыщения необходимо одно вспомогательное понятие. Активным доменом атрибута A относительно таблицы T называется множество $D_{A,T} = \{d \mid \exists s \in T \wedge (A, d) \in s\}$, состоящее, говоря содержательно, из всевозможных значений атрибута A в таблице T (если же атрибут не входит в схему таблицы, то его активный домен пуст). Атрибуты таблицы, мощность активных доменов которых больше единицы, назовем многозначными, в противном случае атрибуты называем однозначными. Насыщением $C(T)$ называется таблица $\prod\limits_{A \in R} D_{A,T}$, где R — схема таблицы T, а $\prod$ — оператор прямого (декартового) произведения, отвечающий индексированию $A \mapsto D_{A,T}$, $A \in R$ [5]. Активным дополнением таблицы T называется таблица $\widetilde{T} = C(T) \underset{R}{-} T$.

Введем определение операции проекции. Проекцией по множеству атрибутов $X \subseteq R$ называется унарная параметрическая операция π_X, значением которой является таблица, состоящая из ограничений по X всех строк исходной таблицы: $\pi_X(T) = \{s \mid X \mid s \in T\}$. Здесь ограничение понимается стандартно: $s \mid X = s \bigcap X \times pr_2 s$, где $pr_2 s$ — проекция строки s по второй компоненте. Любое ограничение s' строки s будем называть ее подстрокой и очевидно, что $s' \subseteq s$.

Введем определение операции селекции. Селекцией по предикату $P\colon S \to \{true, false\}$, где S — множество всех строк, называется унарная параметрическая операция σ_P, которая таблице сопоставляет ее подтаблицу, содержащую строки, на которых предикат P принимает истинные значения.

Для введения операции соединения необходимо одно вспомогательное понятие. Бинарные отношения ρ и τ называются совместными (обозначается $\rho \approx \tau$), если $\rho \mid X = \tau \mid X$, где $X = pr_1\rho \bigcap pr_1\tau$ [6]. Соединением называется бинарная операция $\otimes$, значением которой является таблица, состоящая из всевозможных объединений совместных строк исходных таблиц, т. е. $T_1 \otimes T_2 = \left\{s_1 \bigcup s_2 \mid s_1 \in T_1 \wedge s_2 \in T_2 \wedge s_1 \approx s_2\right\}$. Для таблицы T со всеми однозначными атрибутами из множества $O = \{O_1, \ldots, O_z\}$ и значениями их активных доменов $D_{O_1,T} = \{o_1\}, \ldots, D_{O_z,T} = \{o_z\}$ из определения операции соединения очевидно следует равенство $T = \pi_Y(T) \otimes T'$, где $Y = R - O$ и $T' = \begin{array}{ccc} O_1 & \ldots & O_z \\ o_1 & \ldots & o_z, \end{array}$ т. е. $T' = \{\{(O_i, o_i)\},\ i = \overline{1, z}\}$.

Введем определение операции деления таблиц. Пусть R_1 — схема таблицы T_1, R_2 — схема таблицы T_2 и $R_2 \subseteq R_1$. Делением таблицы T_1 на таблицу T_2 называется таблица схемы $R_1 - R_2$: $T_1 \div^{R_1}_{R_2} T_2 = \{s \in \pi_{R_1 - R_2}(T_1) \mid \{s\} \otimes T_2 \subseteq T_1\}$. Если таких строк s в таблице $\pi_{R_1-R_2}(T_1)$ не существует, считаем, что в этом случае $T_1 \div^{R_1}_{R_2} T_2 = T_{\varnothing}$.

Введем определение операции переименования атрибутов. Переименованием называется унарная, в общем случае частичная операция RT_{ξ}, где ξ — инъективное отображение на множестве атрибутов. Эта операция осуществляет только переименование атрибутов таблиц в соответствии с отображением-параметром ξ. Содержательно говоря, переименование таблицы сводится к переименованию первых компонент пар — элементов строк.

Табличной алгеброй называют частичную алгебру с носителем — множеством всех таблиц произвольной схемы — и приведенными выше девятью операциями (насыщение рассматривается как вспомогательная операция). В табличной алгебре выделяют две особые таблицы: таблицу $T_{\varepsilon} = \{\varepsilon\}$, где ε — пустая строка, при этом схема таблицы T_{ε} является пустым множеством, и таблицу $T_{\varnothing} = \varnothing$ — пустое множество строк произвольной (в том числе и непустой) схемы. Таблица T, не являющаяся особой, называется ненасыщенной, если выполняется неравенство $\widetilde{T} \neq T_{\varnothing}$ (очевидно, что в этом случае $T \neq C(T)$).

Множество атрибутов $K \subseteq R$ называется ключом таблицы T, если для любых строк s_1, $s_2 \in T$ выполняется импликация $s_1 \mid K = s_2 \mid K \to s_1 = s_2$; другими словами, ограничения по атрибутам ключа всех строк таблицы T попарно различны. Ключ K называется простым ключом таблицы T, если никакое его собственное подмножество не является ключом T. Несложно заметить, что схема таблицы будет являться ее ключом, поэтому наибольший интерес представляют так называемые нетривиальные ключи, которые являются собственным подмножеством схемы таблицы. Из определения ключа следует, что ключом таблицы $T_{\varnothing}$ будет любое подмножество атрибутов ее схемы, а простым ключом — пустое множество. Для таблицы T_{ε} ключом (в том числе и простым) будет являться пустое множество. На практике в реальных БД особые таблицы используются чрезвычайно редко (особенно таблица T_{ε}), поэтому для удобства изложения результатов в работе рассматриваются исключительно таблицы, не являющиеся особыми, при этом большинство результатов справедливо и для таблицы $T_{\varnothing}$. Также из определения ключа очевидно следует, что пустое множество может быть ключом только для особых таблиц или для таблиц, состоящих из одной строки.

Основные результаты. Поскольку ключи играют важную роль в реляционных БД, естественным становится вопрос о сохранении нетривиальных ключей (в том числе и простых ключей) сигнатурными операциями табличных алгебр.

Доказано, что операция пересечения таблиц сохраняет ключи, но не сохраняет простые ключи. Справедливо утверждение.

Предложение 1 (сохранение ключей операцией пересечения). *Пусть T_1, T_2 — таблицы схемы R и K — ключ таблиц T_1 и (или) T_2. Тогда K является ключом таблицы $T_1 \bigcup\limits_R T_2$. Если K является простым ключом таблиц T_1 и T_2, то K, вообще говоря, не является простым ключом таблицы $T_1 \bigcup\limits_R T_2$.*

Операция объединения таблиц не сохраняет ключи, т. е. в случае, когда K — ключ таблиц T_1 и T_2 (схемы R), то K может не являться ключом таблицы $T_1 \bigcap\limits_R T_2$.

Доказано, что операция разности таблиц сохраняет ключи, но не сохраняет простые ключи. Справедливо утверждение.

Предложение 2 (сохранение ключей операцией разности таблиц). *Пусть T_1, T_2 — таблицы схемы R и K — ключ таблицы T_1. Тогда K является ключом таблицы $T_1 \underset{R}{-} T_2$. Если K является простым ключом таблицы T_1, то K, вообще говоря, не является простым ключом таблицы $T_1 \underset{R}{-} T_2$.*

Доказано, что операция селекции сохраняет ключи, но не сохраняет простые ключи. Справедливо утверждение.

Предложение 3 (сохранение ключей операцией селекции). *Пусть K — ключ таблицы T. Тогда K является ключом таблицы $\sigma_P(T)$. Если K является простым ключом таблицы T, то K, вообще говоря, не является простым ключом таблицы $\sigma_P(T)$.*

Найдем (в терминах активных доменов атрибутов таблиц) необходимые и достаточные условия, при которых нетривиальные ключи для ненасыщенных таблиц T и $\widetilde{T}$ совпадают. Требование ненасыщенности необходимо для избежания случая $\widetilde{T} = T_{\varnothing}$, ввиду того, что, как уже сказано выше, ключом таблицы $T_{\varnothing}$ является любое подмножество атрибутов схемы этой таблицы. Сначала сформулируем этот критерий для таблиц, у которых все атрибуты многозначные. Справедливо утверждение.

Теорема 1 (сохранение ключей операцией активного дополнения для таблиц без однозначных атрибутов). *Пусть $R = \{A_1, \ldots, A_n\}$ — схема ненасыщенной таблицы T с многозначными атрибутами и $K = \{K_1, \ldots, K_q\}$ — нетривиальный ключ для T. K является ключом таблицы $\widetilde{T}$ тогда и только тогда, когда одновременно выполняются три условия:*

а) $|R - K| = 1$;

б) для атрибута B, принадлежащего множеству $R - K$, выполняется равенство $|D_{B,T}| = 2$;

в) для всех значений $d_1 \in D_{K_1,T}, \ldots, d_q \in D_{K_q,T}$ строка $s' = \{(K_1, d_1), \ldots, (K_q, d_q)\} \in \pi_K(T)$, причем существует только одна такая строка $s \in T$, что $s' = s \mid \{K_1, \ldots, K_q\}$.

Распространим критерий сохранения ключей для таблиц с однозначными атрибутами. Пусть $O = \{O_1, \ldots, O_z\}$ — множество всех однозначных атрибутов таблицы T и пусть $D_{O_1,T} = \{o_1\}, \ldots, D_{O_z,T} = \{o_z\}$. Обозначим $Y = R - O$ и $T' = \begin{matrix} O_1 & \ldots & O_z \\ o_1 & \ldots & o_z \end{matrix}$. Тогда из определения операций соединения и активного дополнения очевидно вытекает равенство $\widetilde{T} = (\widetilde{\pi_Y(T)}) \otimes T'$. Вследствие этого равенства однозначные атрибуты не влияют на условие *а* критерия сохранения ключа операцией активного дополнения, описанное в теореме 2. Таким образом, теорему 2 можно распространить на случай таблиц с однозначными атрибутами.

Следствие 1 (сохранение ключей операцией активного дополнения для таблиц с однозначными атрибутами). *Пусть $R = \{A_1, \ldots, A_n\}$ — схема ненасыщенной таблицы T и $K = \{K_1, \ldots, K_q\}$ — нетривиальный ключ для T. K является ключом таблицы $\widetilde{T}$ тогда и только тогда, когда одновременно выполняются три условия:*

а) множество $R - K$ содержит в точности один многозначный атрибут;

б) для многозначного атрибута B, принадлежащего множеству $R - K$, выполняется равенство $|D_{B,T}| = 2$;

в) для всех значений $d_1 \in D_{K_1,T}, \ldots, d_q \in D_{K_q,T}$ строка $s' = \{(K_1, d_1), \ldots, (K_q, d_q)\} \in \pi_K(T)$, причем существует только одна такая строка $s \in T$, что $s' = s \mid \{K_1, \ldots, K_q\}$.

Пусть K — ключ таблицы T и $X \subset R$. Определим, является ли K ключом таблицы $\pi_X(T)$. После рассмотрения всех возможных случаев относительно включения множеств X

и K получили, что в случае $K \subseteq X$ операция проекции сохраняет и ключи, и простые ключи. Справедливо утверждение.

Теорема 2 (сохранение ключей операцией проекции). *Пусть K — ключ (простой ключ) таблицы T и $K \subseteq X$. Тогда K является ключом (простым ключом) таблицы $\pi_X(T)$.*

Для исследования сохранения ключей операцией соединения были рассмотрены такие два случая:

1) таблицы, к которым применяется операция соединения, имеют одинаковый ключ.

2) таблицы, к которым применяется операция соединения, имеют разные ключи.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 3 (сохранение ключей операцией соединения). *Пусть K — ключ таблиц T_1 и T_2. Тогда K является ключом таблицы $T_1 \otimes T_2$. Если K является простым ключом таблиц T_1 и T_2, то K, вообще говоря, не является простым ключом таблицы $T_1 \otimes T_2$.*

Теорема 4 (сохранение объединения ключей операцией соединения). *Пусть K_1 — ключ таблицы T_1 и K_2 — ключ таблицы T_2. Тогда $K_1 \bigcup K_2$ является ключом таблицы $T_1 \otimes \otimes T_2$. Если K_1 является простым ключом таблицы T_1 и K_2 является простым ключом таблицы T_2, то $K_1 \bigcup K_2$, вообще говоря, не является простым ключом таблицы $T_1 \otimes T_2$.*

Будем рассматривать сохранение ключей операцией деления таблиц только в том случае, когда значение $T_1 \div {}^{R_1}_{R_2} T_2$ не пусто. Поскольку схема результата (частичного) есть множество $R_1 - R_2$, где R_1 — схема таблицы T_1, R_2 — схема таблицы T_2, то были рассмотрены такие ситуации взаимного включения ключа таблицы T_1 и схемы R_2:

1) ключ таблицы T_1 не пересекается со схемой таблицы T_2;

2) ключ таблицы T_1 пересекается со схемой таблицы T_2, но при этом этот ключ полностью не входит в схему таблицы T_2.

Доказано, что в первом случае операция деления таблиц сохраняет ключ, но не сохраняет простой ключ, а во втором случае часть ключа, не входящая в схему таблицы T_2, будет являться ключом таблицы $T_1 \div {}^{R_1}_{R_2} T_2$. Справедливы следующие утверждения.

Теорема 5 (сохранение ключей операцией деления таблиц). *Пусть R_1 — схема таблицы T_1, R_2 — схема таблицы T_2, $T_1 \div {}^{R_1}_{R_2} T_2 \neq T_\varnothing$, $K = \{K_1, \ldots, K_q\}$ — ключ таблицы T_1 и $K \bigcap R_2 = \varnothing$. Тогда K — ключ таблицы $T_1 \div {}^{R_1}_{R_2} T_2$. Если при этом K является простым ключом таблицы T_1, то K, вообще говоря, не является простым ключом таблицы $T_1 \div {}^{R_1}_{R_2} T_2$.*

Теорема 6 (сохранение части ключа операцией деления таблиц). *Пусть R_1 — схема таблицы T_1, R_2 — схема таблицы T_2, $T_1 \div {}^{R_1}_{R_2} T_2 \neq T_\varnothing$, $K = \{K_1, \ldots, K_q\}$ — ключ таблицы T_1 и $K \bigcap R_2 \neq \varnothing$ и $K' = K - (K \bigcap R_2) \neq \varnothing$. Тогда K' — ключ таблицы $T_1 \div {}^{R_1}_{R_2} T_2$. Если при этом K является простым ключом таблицы T_1, то K', вообще говоря, не является простым ключом таблицы $T_1 \div {}^{R_1}_{R_2} T_2$.*

Поскольку операция переименования атрибутов не изменяет значения вторых компонентов пар — элементов строк, то эта операция сохраняет ключи и простые ключи. Справедливо следующее утверждение.

Предложение 4 (сохранение ключей операцией переименования). *Пусть $K = \{K_1, \ldots, K_q\}$ — (простой) ключ таблицы T и пусть $\xi[K] = \{\xi(K_1), \ldots, \xi(K_q)\}$. Тогда $\xi[K]$ является (простым) ключом таблицы RT_ξ.*

Таким образом, в работе исследовано сохранение ключей, в частности, и простых ключей сигнатурными операциями табличных алгебр. Показано, что операции пересечения, разности и селекции сохраняют ключи, но не сохраняют простые ключи (предложения *1–3*), а операция переименования атрибутов сохраняет как ключи, так и простые ключи (предложение *4*); найдены необходимые и достаточные условия, при которых операция дополнения сохраняет ключи (теорема 1, следствие 1). Также найден критерий, при котором операция проекции сохраняет ключи, в том числе и простые ключи (теорема 2). Показано, что если две таблицы имеют одинаковые ключи, то их соединение сохраняет ключ и не сохраняет простой ключ (теорема 3), а если две таблицы имеют разные ключи, то объединение ключей будет ключом соединения исходных таблиц (теорема 4). Доказано, что операция деления сохраняет ключи и не сохраняет простые ключи (теоремы 5, 6). Результаты работы представляют теоретический и практический интерес и могут быть использованы для выбора оптимальных ключей при проектировании реляционных баз данных.

1. *Codd E. F.* A Relational model of data for large shared data banks // Communications of the ACM. – 1970. – **13**, No 6. – P. 377–387.
2. *Редько В. Н., Буй Д. Б.* К основаниям теории реляционных моделей баз данных // Кибернетика и систем. анализ. – 1996. – № 4. – С. 3–12.
3. *Конноли Т., Бегг К.* Базы данных. Проектирование, реализация и сопровождение. Теория и практика. – Москва: ИД “Вильямс”, 2003. – 1440 с.
4. *Дейт К. Дж.* Введение в системы баз данных, 8-е изд.: Пер. с англ. – Москва: ИД “Вильямс”, 2005. – 1328 с.
5. *Куратовский К.* Топология. Т. 1. – Москва: Мир, 1966. – 594 с.
6. *Редько В. Н., Брона Ю. И., Буй Д. Б., Поляков С. А.* Реляційні бази даних: табличні алгебри та SQL-подібні мови. – Київ: ВД “Академперіодика”, 2001. – 198 с.

Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко

Поступило в редакцию 22.12.2014

О. С. Сенченко

Про збереження ключів у табличних алгебрах

Досліджено задачу збереження ключів, в тому числі і простих ключів, сигнатурними операціями табличних алгебр. Показано, що операції перетину, різниці, селекції, з’єднання і ділення таблиць зберігають ключі і не зберігають прості ключі, а операції проекції і перейменування зберігають як ключі, так і прості ключі. Знайдено необхідні і достатні умови, за яких операція активного доповнення зберігає ключ.

A. S. Senchenko

On the preservation of keys in the table algebras

The problem of preservation of keys, including simple keys, by the signature operations of table algebras is investigated. It is shown that the operations of intersection, difference, selection, join, and division of tables preserve the keys and do not preserve the simple keys, whereas the operations of projection and renaming preserve both. The necessary and sufficient conditions, under which the operation of active supplement preserves the key, are found.