УДК 519.6/517.984.46

Академік НАН України **В. Л. Макаров, Н. М. Романюк**

# FD-метод для задачі на власні значення в гільбертовому просторі у випадку базової задачі з власними значеннями довільної кратності

*Обгрунтовується новий алгоритм FD-методу для задачі на власні значення для суми лінійних самоспряжених операторів $A + B$ з дискретним спектром, що діють у деякому гільбертовому просторі. Алгоритм полягає в апроксимації оператора $B$ таким оператором $\overline{B}$, що задача на власні значення для $A + \overline{B}$ є простішою, ніж для $A + B$. Розглядається випадок, коли оператор $A + \overline{B}$ має власні значення довільної скінченної кратності. Запропонований підхід базується на ідеї гомотопії та має суперекспоненціальну швидкість збіжності, тобто збігається швидше, ніж геометрична прогресія, знаменник якої обернено пропорційний порядковому номеру відповідного власного значення. Власні пари можуть бути обчислені паралельно для всіх заданих індексів. Чисельний приклад підтверджує теорію.*

***Ключові слова:*** задача на власні значення, гільбертів простір, кратні власні значення, функціонально-дискретний метод, суперекспоненціально збіжний алгоритм.

**1. Про постановку задачі.** Задачі на власні значення, тобто задачі знаходження власних пар — власних значень (частот) і власних функцій (форм вібрацій) — відіграють важливу роль у різних застосуваннях, пов'язаних з вібрацією і хвильовими процесами [1, 2]. Такі популярні методи, як метод скінченних різниць (FDM), метод скінченних елементів (FEM) або варіаційні методи, дають можливість обчислювати ефективно тільки деякі власні значення з найменшими індексами (власні значення при цьому впорядковані в неспадному порядку: $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n \leqslant \cdots$). Водночас існують прикладні задачі, які вимагають обчислення великої кількості (сотень тисяч) власних значень і власних функцій (наприклад, див. [2, с. 273] та вступ до розділу 4 цієї роботи). Для того щоб знайти чисельно власні значення з вищими номерами, ми пропонуємо описати інший підхід, який базується на ідеях збурення (див. [3–5]) і гомотопії (див. [6, 7] та посилання в них), названий функціонально-дискретним методом (*FD-методом*) у відповідності з [8], де він був вперше запропонований.

Коротко пояснимо ідеї FD-методу для розглядуваної задачі на власні значення для суми самоспряжених операторів $A$ і $B$ ($A = A^*$, $B = B^*$) з областями визначення $D(A)$ і $D(B)$ відповідно та дискретним спектром у гільбертовому просторі $H$ із скалярним добутком $(\cdot, \cdot)$

$$(A + B)u - \lambda u = \theta, \tag{1}$$

де $\theta$ — нульовий елемент. При цьому $\overline{D(A)} = H$, $D(A) \subset D(B)$ і оператор $B$ *підпорядкований* оператору $A$, тобто для деякої сталої $c > 0$ і $\forall\, v \in D(A)$: $\|Bv\| \leqslant c\|Av\|$. Нехай $\overline{B} = \overline{B}^*$, $D(\overline{B}) = D(B)$ і апроксимуємо оператор $B$ оператором $\overline{B}$ так, щоб *базова задача*

$$(A + \overline{B})u^{(0)} - \lambda^{(0)}u^{(0)} = \theta \tag{2}$$

була “простішою”, ніж задача (1), а власні значення (2) впорядковані таким чином: $0 \leqslant \leqslant \lambda_1^{(0)} \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n^{(0)} \leqslant \cdots$ та кожне власне значення повторюється стільки разів, яка його кратність. Відповідні власні вектори утворюють повну ортонормальну систему $\{u_i\}_{i=\overline{1,\infty}}$.

Згідно з ідеєю FD-методу, “занурюємо” (1), (2) в сімейство параметричних задач

$$(A+W(t))u_n(t)-\lambda_n(t)u_n(t)=\theta, \quad t\in[0,1], \quad W(t)=\overline{B}+t\varphi(B), \quad \varphi(B)=B-\overline{B}. \tag{3}$$

Очевидно, що $u_n(0)=u_n^{(0)}$, $u_n(1)=u_n$. Розв’язок (3) будемо шукати у формі

$$\lambda_n(t)=\sum_{j=0}^{\infty}\lambda_n^{(j)}t^j, \qquad u_n(t)=\sum_{j=0}^{\infty}u_n^{(j)}t^j, \tag{4}$$

де формально $\lambda_n^{(j)}=\dfrac{1}{j!}\dfrac{d^j\lambda_n(t)}{dt^j}\bigg|_{t=0}$, $u_n^{(j)}=\dfrac{1}{j!}\dfrac{d^ju_n(t)}{dt^j}\bigg|_{t=0}$. При $t=1$ отримуємо $\lambda_n=\sum\limits_{j=0}^{\infty}\lambda_n^{(j)}$, $u_n=\sum\limits_{j=0}^{\infty}u_n^{(j)}$ за умови, що ряди $\lambda_n(t)$, $u_n(t)$ збігаються для всіх $t\in[0,1]$.

*Наближеннями рангу $N$* до власних значень і власних векторів задачі (1) є зрізані ряди: $\overset{N}{\lambda}_n=\sum\limits_{j=0}^{N}\lambda_n^{(j)}$, $\overset{N}{u}_n=\sum\limits_{j=0}^{N}u_n^{(j)}$. Підставивши (4) в (3) та прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях $t$, отримаємо рекурентні рівняння для визначення $\lambda_n^{(j+1)}$, $u_n^{(j+1)}$:

$$(A+\overline{B})u_n^{(j+1)}-\lambda_n^{(0)}u_n^{(j+1)}=\sum_{p=0}^{j}\lambda_n^{(j+1-p)}u_n^{(p)}-\varphi(B)u_n^{(j)}\equiv F_n^{(j+1)}, \qquad j=0,1,\ldots, \tag{5}$$

де початковими даними $\lambda_n^{(0)}$, $u_n^{(0)}$ є розв’язок базової задачі (2).

Однією з особливостей, які викликають труднощі при розв’язанні задач на власні значення, є наявність *кратних власних значень*. Так, при застосуванні FD-методу до розв’язання деяких задач вже на етапі базової задачі (2), з якої починається чисельний процес, виникають кратні власні значення. Наведемо короткий огляд робіт по FD-методу, в яких вдалося подолати дані труднощі.

У роботі [9] кожне власне значення базової задачі є двократним, крім $\lambda_0^{(0)}=0$, яке є простим, для скалярної задачі Штурма–Ліувілля з потенціалом $q(x)=q(1-x)$, $x\in \in[0,1]$, як для випадку періодичних, так і для випадку антиперіодичних крайових умов. В п. 2 з [10] розглянута одна із самоспряжених крайових задач на власні значення для звичайного диференціального рівняння 4-го порядку, в якій всі власні значення базової задачі є простими, крім $\lambda_0^{(0)}=0$, яке є двократним. У роботі [11] при застосуванні FD-методу до матричної задачі Штурма–Ліувілля з крайовими умовами Діріхле всі власні значення базової задачі є двократними.

Дана робота є узагальненням роботи [12], в якій обгрунтовано FD-метод та здійснено його алгоритмічну реалізацію для абстрактної постановки задачі на власні значення (1), коли базова задача (2) може мати двократні власні значення. Узагальнення полягає в тому, що базова задача може містити власні значення довільної скінченної кратності.

Нехай $\lambda_n^{(0)}$ є $k$-кратним власним значенням, $k\geqslant 2$ і йому відповідає ортонормальна система власних векторів $e_{n,p}$, $p=\overline{1,k}$, тобто $(e_{n,p},e_{n,s})=\delta_{p,s}$, $p$, $s=\overline{1,k}$, де $\delta_{p,s}$ — символ

Кронекера. Загальний розв'язок задачі (2) має вигляд $u^{(0)} = \sum\limits_{p=1}^{k} C_p^{(0)} e_p$ (тут і далі індекс $n$ опускатимемо, якщо це не буде призводити до непорозумінь).

При виконанні умов розв'язності

$$(F^{(j+1)}, e_m) = 0, \qquad m = \overline{1,k}, \tag{6}$$

розв'язок рівняння (5) можна записати у вигляді

$$u^{(j+1)} = \sum_{p=1}^{k} C_p^{(j+1)} e_p + \widehat{u}^{(j+1)}, \qquad \widehat{u}^{(j+1)} = \Gamma^+ \left( \sum_{s=1}^{j} \lambda^{(j+1-s)} u^{(s)} - \varphi(B) u^{(j)} \right), \tag{7}$$

де $\Gamma^+$ — псевдообернений оператор Мура–Пенроуза до оператора $A + \overline{B} + \lambda^{(0)} E$, причому підсумовування за $s$ у (7) здійснюється від 1, а не від 0, внаслідок такої властивості $\Gamma^+$:

**Лема 1.** *Мають місце рівності* $\Gamma^+ e_p = 0$, $p = \overline{1,k}$.

Доведення леми 1 базується на такому представленні: $\Gamma^+ v = -\sum\limits_{\substack{p=1 \\ p \neq n}}^{\infty} \dfrac{(v, u_p^{(0)})}{\lambda_n^{(0)} - \lambda_p^{(0)}} u_p^{(0)}$, $\forall\, v \in$ $\in L(e_1, e_2, \ldots, e_k)$, де $L(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ — лінійна оболонка елементів $e_1$, $e_2, \ldots, e_k$.

З вимоги ортогональності

$$(u^{(j+1)}, u^{(0)}) = 0, \qquad j = 0, 1, \ldots, \tag{8}$$

випливає умова $(\vec{C}^{(j+1)}, \vec{C}^{(0)})_R = 0$, яка накладається на вектори $\vec{C}^{(j+1)} = |[C_p^{(j+1)}]|_{p=\overline{1,k}}$. Тут $(\cdot,\cdot)_R$ — скалярний добуток в $R^k$, $\vec{C}^{(0)} = |[C_p^{(0)}]|_{p=\overline{1,k}}$. Помноживши систему (6) на $C_m^{(0)}$ і підсумувавши рівняння за $m$ від 1 до $k$, одержимо

$$\lambda^{(j+1)} = (\varphi(B) u^{(j)}, u^{(0)}) = (\varphi(B) \widehat{u}^{(j)}, u^{(0)}) = (\widehat{u}^{(j)}, \varphi(B) u^{(0)}). \tag{9}$$

**2. Алгоритм FD-методу.** Припустимо, що якщо оператор $\Pi^-(B)$ є добутком самоспряжених операторів $\varphi(B)$ і $\Gamma^+$ з непарною кількістю операторів $\varphi(B)$, то для $\forall\, p$, $m = \overline{1,k}$, $s = 0, 1, \ldots$ будуть справедливими співвідношення

$$(\Pi^-(B) e_p, e_m) = 0, \tag{10}$$

$$((\varphi(B)\Gamma^+)^{2s} \varphi(B) e_p, e_m) = 0, \qquad ((\varphi(B)\Gamma^+)^{2s} \Gamma^+ \varphi(B) e_p, e_m) = 0. \tag{11}$$

**Теорема 1.** *Нехай виконується умова* (10), *тоді вірними є співвідношення*

$$\vec{C}^{(2j-1)} = \vec{0}, \qquad \lambda^{(2j-1)} = 0,$$

$$(\Pi^+ \widehat{u}^{(2j-1)}, e_m) = 0 \qquad \forall\, \Pi^+ \in \Omega^+, \qquad (\Pi^- \widehat{u}^{(2j)}, e_m) = 0, \qquad \forall\, \Pi^- \in \Omega^-,$$

$$m = \overline{1,k}, \qquad j = 1, 2, \ldots,$$

*де* $\Omega^+$, $\Omega^-$ — *множини добутків операторів* $\varphi(B)$ *і* $\Gamma^+$ *з парним і непарним входженням* $\varphi(B)$ *відповідно.*

**Доведення** (проведемо методом повної математичної індукції). З (5) при $j = 0$ маємо $\widehat{u}^{(1)} = -\sum\limits_{p=1}^{k} C_p^{(0)} \Gamma^+ \varphi(B) e_p$, $\lambda^{(1)} = 0$. Умова розв'язності (6) рівняння (5) при $j = 1$:

$$\lambda^{(2)} C_m^{(0)} - (\varphi(B)\widehat{u}^{(1)}, e_m) = \lambda^{(2)} C_m^{(0)} + \sum_{p=1}^{k} C_p^{(0)} (\varphi(B)\Gamma^+\varphi(B)e_p, e_m) = 0, \quad m = \overline{1,k}. \quad (12)$$

Нехай $\lambda_\nu^{(2)}$, $\nu = \overline{1,r}$, є $\mu_\nu$-кратним власним значенням матриці $D^{(2)} = |[d_{p,m}^{(2)}]|_{p,m=\overline{1,k}}$, $d_{p,m}^{(2)} = -(\varphi(B)\Gamma^+\varphi(B)e_p, e_m)$, причому $\sum\limits_{\nu=1}^{r} \mu_\nu = k$, $\lambda_1^{(2)} < \dots < \lambda_\nu^{(2)} < \dots < \lambda_r^{(2)}$, і розв'язками системи (12) при $\lambda^{(2)} = \lambda_\nu^{(2)}$, $\nu = \overline{1,r}$, нехай буде ортонормальна система векторів $\vec{C}_{\nu,i}^{(0)} = |[C_{\nu,i,m}^{(0)}]|_{m=\overline{1,k}}$, $i = \overline{1,\mu_\nu}$, тобто $(\vec{C}_{\nu,i}^{(0)}, \vec{C}_{\nu,s}^{(0)})_R = \delta_{i,s}$, $\|\vec{C}_{\nu,i}^{(0)}\|_R = 1$, $i,s = \overline{1,\mu_\nu}$, де $\|\vec{a}\|_R = (\vec{a},\vec{a})_R$.

Враховуючи (11) та (7), запишемо умову розв'язності (6) рівняння (5) при $j = 2$: $\lambda_{\nu,i}^{(3)} C_{\nu,i,m}^{(0)} + \lambda_\nu^{(2)} C_{\nu,i,m}^{(1)} + \sum\limits_{p=1}^{k} C_{\nu,i,p}^{(1)} (\varphi(B)\Gamma^+\varphi(B)e_p, e_m) = 0$, наслідком якої згідно з (12) і (8) є $\lambda_{\nu,i}^{(3)} = 0$, $(\lambda_\nu^{(2)} E + D^{(2)})\vec{C}_{\nu,i}^{(1)} = \vec{0}$, тоді $\vec{C}_{\nu,i}^{(1)} = \vec{0}$. Тут і далі $m = \overline{1,k}$, $i = \overline{1,\mu_\nu}$.

З (6) при $j = 3$, враховуючи (11), маємо $\lambda_{\nu,i}^{(4)} C_{\nu,i,m}^{(0)} + \lambda_\nu^{(2)} C_{\nu,i,m}^{(2)} - (\varphi(B)\widehat{u}_{\nu,i}^{(3)}, e_m) = 0$, звідки внаслідок (11) та умови (8) одержуємо $\lambda_{\nu,i}^{(4)} = (\varphi(B)\widehat{u}_{\nu,i}^{(3)}, u_{\nu,i}^{(0)})$ і рівняння

$$\lambda_\nu^{(2)} C_{\nu,i,m}^{(2)} + \sum_{p=1}^{k} C_{\nu,i,p}^{(2)} d_{p,m}^{(2)} = -\lambda_{\nu,i}^{(4)} C_{\nu,i,m}^{(0)} + \lambda_\nu^{(2)} (\varphi(B)\Gamma^+\widehat{u}_{\nu,i}^{(1)}, e_m) - (\varphi(B)\Gamma^+\varphi(B)\widehat{u}_{\nu,i}^{(2)}, e_m),$$

розв'язок якого $\vec{C}_{\nu,i}^{(2)} = |[C_{\nu,i,m}^{(2)}]|_{m=\overline{1,k}}$, що визначається неоднозначно, візьмемо саме у такій векторно-матричній формі, яка забезпечує виконання умови (8), тобто

$$\vec{C}_{\nu,i}^{(2)} = (D^{[2,\nu]})^+ [-\lambda_{\nu,i}^{(4)} \vec{C}_{\nu,i}^{(0)} + \lambda_\nu^{(2)} \langle \varphi(B)\Gamma^+\widehat{u}_{\nu,i}^{(1)}, \vec{e}\rangle - \langle \varphi(B)\Gamma^+\varphi(B)\widehat{u}_{\nu,i}^{(2)}, \vec{e}\rangle],$$

де $(D^{[2,\nu]})^+$ — псевдообернена матриця Мура–Пенроуза до матриці $D^{[2,\nu]} = \lambda_\nu^{(2)} E + D^{(2)}$, $\vec{e} = [e_1, e_2, \dots, e_k]^T$, $\langle v, \vec{e}\rangle = [(v,e_1),(v,e_2),\dots,(v,e_k)]^T$. Надалі для спрощення викладок опустимо індекси $\nu$, $i$ при записі векторів $\vec{C}_{\nu,i}^{(j)} = |[C_{\nu,i,m}^{(j)}]|_{m=\overline{1,k}}$ і власних пар $\lambda_{\nu,i}^{(j+1)}$, $u_{\nu,i}^{(j+1)}$.

Припустимо, що для деякого фіксованого $j$ при $m = \overline{1,k}$, $s = \overline{1,j}$ доведено, що

$$\begin{aligned} &\lambda^{(2s-1)} = 0, \qquad \vec{C}^{(2s-1)} = \vec{0}, \\ &(\Pi^+\widehat{u}^{(2s-1)}, e_m) = 0, \qquad (\Pi^-\widehat{u}^{(2s)}, e_m) = 0, \qquad \forall\, \Pi^+ \in \Omega^+, \qquad \forall\, \Pi^- \in \Omega^-. \end{aligned} \quad (13)$$

Покажемо, що (13) справедливі і при $s = j+1$. З (13) і властивостей оператора $\Gamma^+$ маємо

$$u^{(2j+1)} = \sum_{p=1}^{k} C_p^{(2j+1)} e_p + \Gamma^+ \left( \sum_{s=1}^{j} \lambda^{(2j-2s+2)} \widehat{u}^{(2s-1)} - \varphi(B) u^{(2j)} \right),$$

$$\lambda^{(2j+1)} C_m^{(0)} - (\varphi(B)\widehat{u}^{(2j)}, e_m) = 0,$$

звідки з другого рівняння з використанням припущення (13) та леми 1 отримаємо $\lambda^{(2j+1)}C_m^{(0)} - \Big(\varphi(B)\Gamma^+\Big(\sum\limits_{s=1}^{j-1}\lambda^{(2j-2s)}\widehat{u}^{(2s)} - \varphi(B)\widehat{u}^{(2j-1)}\Big), e_m\Big) = 0$, тобто $\lambda^{(2j+1)} = 0$. Для $\forall\,\Pi^+ \in \Omega^+$ з (13) маємо $(\Pi^+\widehat{u}^{(2j+1)}, e_m) = \Big(\Pi^+\Gamma^+\Big(\sum\limits_{s=1}^{j}\lambda^{(2j-2s+2)}\widehat{u}^{(2s-1)} - \varphi(B)\widehat{u}^{(2j)}\Big), e_m\Big) = 0$, бо в оператора $\Pi^+\Gamma^+$ парність кількості входжень $\varphi(B)$ не змінюється, а в оператора $\Pi^+\Gamma^+\varphi(B)$ кількість входжень $\varphi(B)$ стає непарною. Запишемо (6) при заміні $j$ на $2j+2$

$$\lambda^{(2j+3)}C_m^{(0)} + \sum_{s=1}^{j}\lambda^{(2j-2s+4)}(\widehat{u}^{(2s-1)}, e_m) + C_m^{(2j+1)}\lambda^{(2)} - (\varphi(B)\widehat{u}^{(2j+2)}, e_m) = 0. \tag{14}$$

Для $\forall\,\Pi^- \in \Omega^-$ маємо $(\Pi^-\widehat{u}^{(2j+2)}, e_m) = -\sum\limits_{p=1}^{k} C_p^{(2j+1)}(\Pi^-\Gamma^+\varphi(B)e_p, e_m)$, і переписавши (14): $\lambda^{(2j+3)}C_m^{(0)} + \lambda^{(2)}C_m^{(2j+1)} + \sum\limits_{p=1}^{k} d_{p,m}^{(2)}C_p^{(2j+1)} = 0$, одержимо $\lambda^{(2j+3)} = 0$, $C_m^{(2j+1)} = 0$. Звідси випливають рівності $(\Pi^-\widehat{u}^{(2j+2)}, e_m) = 0$. Зауважимо, що вибір вектора $\vec{C}^{(0)}$ як розв'язок системи $(\lambda^{(2)}E + D^{(2)})\vec{C}^{(2j+1)} = \vec{0}$ обумовлений тим, що в подальшому не виникає неоднорідних умов на цей вектор. Теорема доведена.

З умови розв'язності (6) при заміні $j$ на $2j+1$, теореми 1 та формул (7) і (9) одержуємо *основні формули* алгоритму FD-методу для задачі (1) (при $j = 1, 2, \ldots$):

$$\begin{gathered}
\widehat{u}^{(2j-1)} = \Gamma^+\left(\sum_{s=1}^{j-1}\lambda^{(2j-2s)}\widehat{u}^{(2s-1)} - \varphi(B)u^{(2j-2)}\right),\\
\widehat{u}^{(2j)} = \Gamma^+\left(\sum_{s=1}^{j-1}\lambda^{(2j-2s)}\widehat{u}^{(2s)} - \varphi(B)\widehat{u}^{(2j-1)}\right),\\
\vec{C}^{(2j)} = (D^{[2,\nu]})^+\left(\sum_{s=1}^{j-1}\lambda^{(2j+2-2s)}[\langle\varphi(B)\Gamma^+\widehat{u}^{(2s-1)}, \vec{e} - u^{(0)}\vec{C}^{(0)}\rangle - \vec{C}^{(2s)}] + \right.\\
\left. + \lambda^{(2)}\langle\varphi(B)\Gamma^+\widehat{u}^{(2j-1)}, -u^{(0)}\vec{C}^{(0)} + \vec{e}\rangle + \langle\varphi(B)\Gamma^+\varphi(B)\widehat{u}^{(2j)}, u^{(0)}\vec{C}^{(0)} - \vec{e}\rangle\right),\\
\lambda^{(2j)} = (\varphi(B)\widehat{u}^{(2j-1)}, u^{(0)}), \quad \lambda^{(2j+2)} = \lambda_{n,\nu,i}^{(2j+2)}, \quad \widehat{u}^{(j)} = \widehat{u}_{n,\nu,i}^{(j)}, \quad \vec{C}^{(2j-2)} = \vec{C}_{n,\nu,i}^{(2j-2)},\\
\lambda^{(2)} = \lambda_{n,\nu}^{(2)}, \qquad \widehat{u}^{(0)} = 0, \qquad u^{(0)} = u_{n,\nu,i}^{(0)}, \qquad \|u_{n,\nu,i}^{(0)}\| = 1, \qquad \|\vec{C}_{n,\nu,i}^{(0)}\|_R = 1,\\
i = \overline{1, \mu_\nu}, \qquad \nu = \overline{1, r}, \qquad \sum_{\nu=1}^{r}\mu_\nu = k.
\end{gathered} \tag{15}$$

**3. Збіжність FD-методу.** З формул (15), використовуючи співвідношення

$$\sum_{p=1}^{k} C_p^{(2j)}\sum_{t=1}^{k} C_t^{(0)}d_{p,t}^{(2)} = 0, \quad |\langle\vec{e} - u^{(0)}\vec{C}^{(0)}\rangle|^2 = k-1, \quad |\langle\varphi(B)(\vec{e} - u^{(0)}\vec{C}^{(0)})\rangle| \leqslant 2|\langle\varphi(B)\vec{e}\rangle|$$

із введеним позначенням $|\langle\vec{b}\rangle| = \left\{\sum\limits_{p=1}^{k} \|b_p\|^2\right\}^{1/2}$, отримуємо такі оцінки (при $j = 1, 2, \ldots$):

$$\begin{aligned}
&\|\widehat{u}^{(2j-1)}\| \leqslant M_n\left(\sum_{s=1}^{j-1} \|\widehat{u}^{(2j-2s-1)}\|\|\widehat{u}^{(2s-1)}\| + \|\widehat{u}^{(2j-2)}\| + \|\vec{C}^{(2j-2)}\|_R\right),\\
&\|\widehat{u}^{(2j)}\| \leqslant M_n\left(\sum_{s=1}^{j-1} \|\widehat{u}^{(2j-2s-1)}\|\|\widehat{u}^{(2s)}\| + \|\widehat{u}^{(2j-1)}\|\right),\\
&|\lambda^{(2j)}| \leqslant \|\varphi(B)u^{(0)}\|\|\widehat{u}^{(2j-1)}\|,\\
&\|\vec{C}^{(2j)}\| \leqslant \beta\left\{M_n \sum_{s=1}^{j} \|\widehat{u}^{(2j+1-2s)}\|\|\widehat{u}^{(2s-1)}\| + M_n\|\widehat{u}^{(2j)}\| + \sum_{s=1}^{j-1} \|\widehat{u}^{(2j+1-2s)}\|\|\vec{C}^{(2s)}\|\right\},
\end{aligned} \tag{16}$$

де $M_n = M_{n,\nu,i} = \max\{\|\Gamma_n^+\|\|\varphi(B)u_{n,\nu,i}^{(0)}\|, \|\Gamma_n^+\varphi(B)\|\}$, $\beta = \|(D^{[2,\nu]})^+\|\|\langle\varphi(B)\vec{e}\rangle| \times$ $\times \max(\sqrt{k-1}, 2)$.

Перейшовши від оцінок (16) до мажоруючої їх рекурентної системи рівнянь, яку розв'язуємо методом твірних функцій (детальніше див., наприклад, [9]), знаходимо радіус збіжності $z_{\max}$ мажорантних для (4) рядів: $f(z) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} z^j \overline{u}_{2j+1}$, $g(z) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} z^j \overline{u}_{2j+2}$, $w(z) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} z^j \overline{c}_{2j}$, де $c_{2j} = (M_n)^{-2j-1}\|\vec{C}^{(2j)}\|_R \leqslant \overline{c}_{2j}$, $u_j = (M_n)^{-j}\|\widehat{u}^{(j)}\| \leqslant \overline{u}_j$, $j = 1, 2, \ldots$, $c_0 = \overline{c}_0 = 1$, $u_0 = \overline{u}_0 = 0$. Тоді існують такі сталі $L_i > 0$, $\varepsilon_i > 0$, $i = 1, 2, 3$, що $(z_{\max})^j \overline{u}_{2j-1} \leqslant L_1/j^{1+\varepsilon_1}$, $(z_{\max})^j \overline{u}_{2j} \leqslant L_2/j^{1+\varepsilon_2}$, $(z_{\max})^j \overline{c}_{2j} \leqslant L_3/j^{1+\varepsilon_3}$, $j = 1, 2, \ldots$. Звідси, із (7) та (9) випливає

**Теорема 2.** *Нехай* $(\varphi(B)e_{n,p}, e_{n,m}) = 0$, $\forall\, p, m = \overline{1,k}$, $q_{n,\nu,i} = M_{n,\nu,i}/z_{\max} < 1$, *тоді FD-метод для задачі* (1) *є суперекспоненціально збіжним і справедливими є оцінки його точності:*

$$\|u_{n,\nu,i} - \overset{m}{u}_{n,\nu,i}\| \leqslant \frac{2\overline{L}}{(m+1)^{1+\varepsilon}} \frac{q_{n,\nu,i}^{m+1}}{1 - q_{n,\nu,i}}, \quad \|\lambda_{n,\nu,i} - \overset{m}{\lambda}_{n,\nu,i}\| \leqslant \frac{\overline{L}\|\varphi(B)u_{n,\nu,i}^{(0)}\|}{(m+1)^{1+\varepsilon}} \frac{q_{n,\nu,i}^{m}}{1 - q_{n,\nu,i}}. \tag{17}$$

*Якщо* $q_n = 1$, *то замість оцінок* (17) *будуть такі:*

$$\|u_{n,\nu,i} - \overset{m}{u}_{n,\nu,i}\| \leqslant 2\overline{L} \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{1}{j^{1+\varepsilon}} \leqslant \frac{2\overline{L}}{\varepsilon m^{\varepsilon}},$$

$$\|\lambda_{n,\nu,i} - \overset{m}{\lambda}_{n,\nu,i}\| \leqslant \overline{L}\|\varphi(B)u_{n,\nu,i}^{(0)}\| \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{1}{j^{1+\varepsilon}} \leqslant \frac{\overline{L}\|\varphi(B)u_{n,\nu,i}^{(0)}\|}{\varepsilon m^{\varepsilon}}.$$

*Тут* $\overline{L} = \max(L_1, L_2, L_3)$, $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, $i = \overline{1, \mu_\nu}$, $\nu = \overline{1, r}$, $\sum\limits_{\nu=1}^{r} \mu_\nu = k$.

**Приклад.** Розглянемо векторно-матричну задачу Штурма–Ліувілля з крайовими умовами Діріхле, тобто задачу (1), в якій оператори $A$, $B$ визначені таким чином:

$$D(A) = \{v \in W_2^2(0,1)\colon v(0) = v(1) = 0\}, \qquad Av = \frac{d^2v(x)}{dx^2}, \qquad \forall\, v \in D(A),$$

$$D(B) = L_2(0,1), \qquad Bv = Q(x)v(x),$$

*Таблиця 1.* Величини, отримані FD-методом рангу $N = 0, 2, 4, 6$ для власних значень $\lambda_n$ з $n = 2, 4, 8$

| $n$ | $j$ | $k=1$ | | $k=2$ | | $k=3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $\lvert\lambda_{n,1}^{(2j)}\rvert$ | $\Delta_{n,1}(2j)$ | $\lvert\lambda_{n,2}^{(2j)}\rvert$ | $\Delta_{n,2}(2j)$ | $\lvert\lambda_{n,3}^{(2j)}\rvert$ | $\Delta_{n,3}(2j)$ |
| 2 | 0 | 39,48 | $3,4{\cdot}10^{-4}$ | 39,48 | $1,9{\cdot}10^{-3}$ | 39,48 | $5,7{\cdot}10^{-5}$ |
| | 1 | $3,415{\cdot}10^{-4}$ | $1,7{\cdot}10^{-8}$ | $1,881{\cdot}10^{-3}$ | $7,6{\cdot}10^{-7}$ | $5,745{\cdot}10^{-5}$ | $6,8{\cdot}10^{-10}$ |
| | 2 | $1,778{\cdot}10^{-8}$ | $8,0{\cdot}10^{-13}$ | $7,567{\cdot}10^{-7}$ | $2,3{\cdot}10^{-10}$ | $6,796{\cdot}10^{-10}$ | $2,2{\cdot}10^{-14}$ |
| | 3 | $8,050{\cdot}10^{-13}$ | $4,5{\cdot}10^{-17}$ | $2,329{\cdot}10^{-10}$ | $4,4{\cdot}10^{-14}$ | $2,125{\cdot}10^{-14}$ | $1,2{\cdot}10^{-15}$ |
| 4 | 0 | 157,9 | $9,4{\cdot}10^{-5}$ | 157,9 | $7,3{\cdot}10^{-4}$ | 157,9 | $1,5{\cdot}10^{-5}$ |
| | 1 | $9,431{\cdot}10^{-5}$ | $2,4{\cdot}10^{-11}$ | $7,288{\cdot}10^{-4}$ | $1,6{\cdot}10^{-9}$ | $1,542{\cdot}10^{-5}$ | $3,3{\cdot}10^{-12}$ |
| | 2 | $2,438{\cdot}10^{-11}$ | $1,4{\cdot}10^{-16}$ | $1,604{\cdot}10^{-9}$ | $1,6{\cdot}10^{-13}$ | $3,334{\cdot}10^{-12}$ | $5,9{\cdot}10^{-17}$ |
| | 3 | $1,408{\cdot}10^{-16}$ | $1,2{\cdot}10^{-19}$ | $1,635{\cdot}10^{-13}$ | $5,9{\cdot}10^{-17}$ | $6,218{\cdot}10^{-17}$ | $2,8{\cdot}10^{-18}$ |
| 8 | 0 | 631,8 | $2,4{\cdot}10^{-5}$ | 631,8 | $2,0{\cdot}10^{-4}$ | 631,8 | $3,9{\cdot}10^{-6}$ |
| | 1 | $2,389{\cdot}10^{-5}$ | $6,3{\cdot}10^{-13}$ | $1,991{\cdot}10^{-4}$ | $4,4{\cdot}10^{-11}$ | $3,895{\cdot}10^{-6}$ | $2,4{\cdot}10^{-13}$ |
| | 2 | $6,257{\cdot}10^{-13}$ | $2,8{\cdot}10^{-20}$ | $4,364{\cdot}10^{-11}$ | $2,1{\cdot}10^{-17}$ | $2,373{\cdot}10^{-13}$ | $8,5{\cdot}10^{-19}$ |
| | 3 | $3,603{\cdot}10^{-20}$ | $7,7{\cdot}10^{-21}$ | $2,111{\cdot}10^{-17}$ | $1,2{\cdot}10^{-19}$ | $8,430{\cdot}10^{-19}$ | $1,1{\cdot}10^{-20}$ |

*Таблиця 2.* Трійки власних значень $\lambda_{n,l}^{\text{ex}}$, $l = \overline{1,3}$, отримані методом стрільби з $n = 2, 4, 8$

| $n$ | $\lambda_{n,1}^{\text{ex}}$ | $\lambda_{n,2}^{\text{ex}}$ | $\lambda_{n,3}^{\text{ex}}$ |
|---|---|---|---|
| 2 | 39,4787590530763970988721З | 39,4802977381541112885783З | 39,4784750530959332988738б |
| 4 | 157,9137647274037242550664 | 157,9143992106911288540809 | 157,9136858376700168133047 |
| 8 | 631,6547055560593258633251 | 631,6548807432349298044469 | 631,6546855642199543269033 |

$$Q(x) = \left(\frac{1}{2} - x\right) \begin{pmatrix} 1 & 1 & \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що $(Q(x)e_{n,p}(x), e_{n,m}(x)) = 0$, $p, m = \overline{1,3}$, де $e_{n,m}(x) = \sqrt{2}\sin(n\pi x)\|[\delta_{m,i}]\|_{i=\overline{1,3}}$. Застосуємо найпростіший варіант FD-методу, коли $\overline{B} \equiv 0$. Кожне власне значення $\lambda_n^{(0)} = (n\pi)^2$ базової задачі має кратність 3 і йому відповідають власні вектори $u_{n,p}^{(0)}(x) = \sum\limits_{m=1}^{3} C_{n,p,m}^{(0)} e_{n,m}(x)$, $p = \overline{1,3}$, де $\vec{C}_{n,p}^{(0)} = \|[C_{n,p,m}^{(0)}]\|_{m=\overline{1,3}}$, $p = \overline{1,3}$, — ортонормальна система векторів, що є розв'язком відповідної системи (12). Тут $\Gamma^{+}v = (g_n(x,\cdot), v_n(\cdot)) = \int\limits_0^1 g_n(x,\xi)v_n(\xi)\,d\xi$, де $g_n(x,\xi) = \dfrac{\cos(n\pi(x+\xi)) - \cos(n\pi(x-\xi))}{4\pi^2 n^2} - \dfrac{\sin(n\pi(x+\xi))(1-x-\xi) - \sin(n\pi|x-\xi|)(1-|x-\xi|)}{2\pi n}$ — узагальнена функція Гріна. Обчислення та аналітичні перетворення здійснювалися за допомогою системи Maple 17 (з Digits = 128).

У цьому випадку FD-метод є *таким, що точно реалізується* (див. [13]). Наближення $\lambda_{n,l}^{(2j)}$, $u_{n,l}^{(2j)}(x)$, $l = \overline{1,3}$, $j = \overline{0,3}$, знайдені в аналітичній формі в залежності від номера $n$ трійки власних значень. Теорема 1 виконується, зокрема, $\lambda_{n,l}^{(2j-1)} = 0$, $l = \overline{1,3}$, $j = 1, 2, \ldots$. Асимптотична поведінка поправок до власних значень відносно $n$ є такою: $\lambda_{n,1}^{(2j)} = O(n^{4j-2})$, $\lambda_{n,l}^{(2j)} = O(n^{-2j})$, $l = 2, 3$, $j = 1, 2, 3$. Чисельні розрахунки для $n = 2, 4, 8$ наведені в табл. 1, зокрема, абсолютні похибки наближень FD-методу $\Delta_{n,l}(N) = |\lambda_{n,l}^{\text{ex}} - \overset{N}{\lambda}_{n,l}|$ рангу $N = 0, 2, 4, 6$

до власних значень $\lambda_{n,l}^{\mathrm{ex}}$, $l = \overline{1,3}$, отриманих методом стрільби (табл. 2) з використанням методу Гіра для інтегрування відповідних задач Коші. Як видно з табл. 1, чисельні розрахунки підтверджують теорему 2 про суперекспоненціальну швидкість збіжності алгоритму.

### Цитована література


1. *Akulenko L. D., Nesterov S. V.* High-precision methods in eigenvalue problems and their applications. – Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2005. – P. 264.
2. *Pryce J.* Numerical solution of Sturm–Liouville problems. – Oxford: Oxford University Press, 1993. – P. 323.
3. *Rellich F.* Störungstheorie der spektralzerlegung // Math. Ann. – 1937. – **113**, Mitt. I – P. 600–619.
4. *Rellich F.* Störungstheorie der spektralzerlegung // Math. Ann. – 1937. – **113**, Mitt. II – P. 677–685.
5. *Rellich F.* Störungstheorie der spektralzerlegung // Math. Ann. – 1939. – **116**, Mitt. III – P. 555–570.
6. *Armstrong M.* Basic topology. – New York; Berlin; Heidelberg: Springer, 1983. – P. 260.
7. *Allgower E. L., Georg K.* Introduction to numerical continuation methods. – Colorado: Colorado State University, 1990. – P. 397.
8. *Макаров В. Л.* О функционально-разностном методе произвольного порядка точности решения задачи Штурма–Лиувилля с кусочно-гладкими коэффициентами // Докл. АН СССР. – 1991. – **320**, № 1. – С. 34–39.
9. *Бандирський Б. И., Макаров В. Л., Уханьов О. Л.* FD-метод для задач Штурма–Ліувілля. Експоненційна швидкість збіжності // Журн. обчисл. прикл. математики. – 2000. – **85**, № 1. – С. 1–60.
10. *Gavrilyuk I. P., Makarov V. L., Popov A. M.* Super-exponentially convergent parallel algorithm for eigenvalue problems for the fourth order ODE's // J. Numer. Appl. Math. – 2010. – **100**, No 1. – P. 60–81.
11. *Bandyrskii B. I., Gavrilyuk I. P., Lazurchak I. I., Makarov V. L.* Functional-discrete method (FD-method) for matrix Sturm–Liouville problems // Comput. Methods Appl. Math. – 2005. – **4**, No 5. – P. 362–386.
12. *Gavrilyuk I. P., Makarov V. L.* Super-exponentially convergent parallel algorithm for eigenvalue problems in Hilbert spaces // Proc. of the intern. conf. "Differential equations and their applications (DETA 2009)", September 10–12, 2009, Panevezys, Lithuania/ Ed. by V. Kleiza, S. Rutkauskas, A. Stikonas. – Kaunas: Technologija, 2009. – P. 86–92.
13. *Makarov V. L., Vinokur V. V.* The FD-method for first-order linear hyperbolic differential equations with piecewise smooth coefficients // J. Math. Sci. – 1995. – **77**, No 5. – P. 3399–3405.


### References


1. *Akulenko L. D., Nesterov S. V.* High-precision methods in eigenvalue problems and their applications, Boca Raton: Chapman&Hall/CRC, 2005.
2. *Pryce J.* Numerical solution of Sturm–Liouville problems, Oxford: Oxford Univ. Press, 1993.
3. *Rellich F.* Math. Ann., 1937, **113**, Mitt. I: 600–619 (in German).
4. *Rellich F.* Math. Ann., 1937, **113**, Mitt. II: 677–685 (in German).
5. *Rellich F.* Math. Ann., 1939, **116**, Mitt. III: 555–570 (in German).
6. *Armstrong M. A.* Basic topology, Berlin: Springer, 1983.
7. *Allgower E., Georg K.* Introduction to numerical continuation methods, Colorado: Colorado State University, 1990.
8. *Makarov V. L.* Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 1991, **320**, No. 1: 34–39 (in Russian).
9. *Bandyrskii B. I., Makarov V. L., Ukhanev O. L.* J. Comp. Appl. Math., 2000, **85**, No 1: 1–60 (in Ukrainian).
10. *Gavrilyuk I. P., Makarov V. L., Popov A. M.* J. Numer. Appl. Math., 2010, **100**, No 1: 60–81.
11. *Bandyrskii B. I., Gavrilyuk I. P., Lazurchak I. I., Makarov V. L.* Comput. Methods Appl. Math., 2005, **5**, No 4: 362–386.
12. *Gavrilyuk I. P., Makarov V. L.* Super-exponentially convergent parallel algorithm for eigenvalue problems in Hilbert spaces: Proc. of the Intern. Conf. "DETA 2009", Kaunas: Technologija, 2009: 86–92.
13. *Makarov V. L., Vinokur V. V.* J. Math. Sci., 1995, **77**, No 5: 3399–3405.


*Інститут математики НАН України, Київ*

*Надійшло до редакції 02.12.2014*

Академик НАН Украины **В. Л. Макаров, Н. Н. Романюк**

## FD-метод для задачи на собственные значения в гильбертовом пространстве в случае базовой задачи с собственными значениями произвольной кратности

Институт математики НАН Украины, Киев

*Обосновывается новый алгоритм FD-метода для задачи на собственные значения для суммы линейных самосопряженных операторов $A + B$ с дискретным спектром, действующих в некотором гильбертовом пространстве. Алгоритм заключается в аппроксимации оператора $B$ таким оператором $\overline{B}$, что задача на собственные значения для $A + \bar{B}$ является проще, чем для $A + B$. Рассматривается случай, когда оператор $A + \bar{B}$ имеет собственные значения произвольной конечной кратности. Предложенный подход основывается на идее гомотопии и имеет суперэкспоненциальную скорость сходимости, т. е. сходится быстрее, чем геометрическая прогрессия, знаменатель которой обратно пропорционален индексу соответствующего собственного значения. Собственные пары могут быть вычислены параллельно для всех заданных индексов. Численный пример подтверждает теорию.*

***Ключевые слова:*** задача на собственные значения, гильбертово пространство, кратные собственные значения, функционально-дискретный метод, суперэкспоненциально сходящийся алгоритм.

Academician of the NAS of Ukraine **V. L. Makarov, N. M. Romaniuk**

## The FD-method for an eigenvalue problem in a case where the base problem has eigenvalues of arbitrary multiplicities in a Hilbert space

Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kiev

*A new algorithm for the eigenvalue problems for linear self-adjont operators in the form of sum $A + B$ with a discrete spectrum in a Hilbert space is proposed and justified. The algorithm is based on the approximation of $B$ by an operator $\overline{B}$ such that the eigenvalue problem for $A + \overline{B}$ is computationally simpler than that for $A + B$. The operator $A + \overline{B}$ is allowed to have multiple eigenvalues. The algorithm for this eigenvalue problem is based on the homotopy idea. It provides the super-exponential convergence rate, i. e. the rate faster than the convergence rate of a geometrical progression with the ratio, which is inversely proportional to the index of the eigenvalue under consideration. The eigenpairs can be computed in parallel for all prescribed indices. We supply a numerical example which supports the developed theory.*

***Keywords:*** eigenvalue problem, Hilbert space, multiple eigenvalues, functional-discrete method, super-exponentially convergent algorithm.