УДК 517.5

И. В. Петков

О граничном поведении гомеоморфизмов класса $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ на плоскости по простым концам

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В. Я. Гутлянским)

Изучается граничное поведение так называемых регулярных отображений, которые являются естественным обобщением квазиконформных отображений. Найден ряд эффективных условий на коэффициент дилатации K_f для гомеоморфного продолжения указанных отображений по простым концам в ограниченных конечносвязных областях.

Ключевые слова: простые концы, граничное поведение, конечносвязные области, регулярные отображения.

Проблема граничного поведения является одной из центральных тем теории квазиконформных отображений и их обобщений. В последние годы интенсивно изучаются различные классы отображений с конечным искажением, естественным образом обобщающие конформные, квазиконформные и квазирегулярные отображения. При этом, как и ранее, основным геометрическим методом в теории отображений остается метод модулей (см., например, [1, 2]).

Все необходимые нам определения из теории простых концов можно найти в [3, 4]. В статье [4] также доказана следующая, полезная в дальнейшем, лемма.

Лемма 1. *Любой простой конец P ограниченной конечносвязной области D в $\mathbb{C}$ содержит цепь разрезов σ_m, лежащих на окружностях S_m с центром в некоторой точке $x_0 \in \partial D$ и радиусами $r_m \to 0$ при $m \to \infty$.*

Замечание 1. Заметим, что на плоскости любая конечносвязная область отображается конформно на некоторую область, ограниченную конечным числом попарно непересекающихся окружностей (так называемую круговую область) (см., например, теорему V.6.2 в [5]).

Как это следует из теоремы 4.1 в [6], при конформном отображении g круговой области D_0 на область D в $\mathbb{C}$ имеет место взаимно однозначное соответствие между точками границы D_0 и простыми концами области D и при этом предельные множества $C(g, b)$, $b \in \partial D_0$, совпадают с телом $I(P)$ соответствующего простого конца P в D.

Если $\overline{D}_P$ — пополнение ограниченной конечносвязной области D ее простыми концами и g — конформное отображение области D на некоторую круговую область D_0, то естественно в $\overline{D}_P$ определить метрику $\rho_g(p_1, p_2) = |\widetilde{g}(p_1) - \widetilde{g}(p_2)|$, где $\widetilde{g}$ — описанное выше продолжение g на $\overline{D}_P$. Если h — конформное отображение области D на некоторую другую круговую область D_*, то соответствующая метрика $\rho_h(p_1, p_2) = |\widetilde{h}(p_1) - \widetilde{h}(p_2)|$ порождает ту же самую сходимость и, следовательно, ту же самую топологию в $\overline{D}_P$, что и метрика ρ_g, поскольку $g \circ h^{-1}$ является конформным отображением между областями D_* и D_0, которое по теореме 4.1 в [6] продолжается до гомеоморфизма между $\overline{D_*}$ и $\overline{D_0}$. В дальнейшем указанную топологию в пространстве $\overline{D}_P$ будем называть *топологией простых концов.*

1. О продолжении прямых отображений. Все необходимые для этого и следующего пунктов определения можно найти в статье [7].

Гомеоморфизм $f\colon D \to D'$ класса Соболева $W^{1,1}_{\rm loc}$ с якобианом $J_f(z) = |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2 > 0$ п. в. в D будем называть *регулярным отображением.* Для такого отображения определим его *дилатацию*

$$K_f = \frac{|f_z| + |f_{\overline{z}}|}{|f_z| - |f_{\overline{z}}|},$$

если $f_z \neq 0$, и $K_f = 1$ в остальных точках.

Лемма 2. *Пусть D и D' — ограниченные конечносвязные области в $\mathbb{C}$ и $f\colon D \to D'$ — регулярное отображение. Если*

$$\int\limits_0^{\delta(x_0)} \frac{dr}{\|K_f\|_1(x_0, r)} = \infty \qquad \forall x_0 \in \partial D \tag{1}$$

при некотором $\delta(x_0) < d(x_0) = \sup\limits_{x \in D} |x - x_0|$, где

$$\|K_f\|_1(x_0, r) = \int\limits_{D \cap S(x_0, r)} K_f |dz|,$$

то f продолжается до непрерывного отображения $\overline{D}_P$ на $\overline{D'}_P$.

Действительно, ввиду замечания 1, без ограничения общности можно считать, что D' является круговой областью. Также по замечанию 1, ввиду метризуемости пространств $\overline{D}_P$ и $\overline{D'}_P$, достаточно доказать, что для любого простого конца P области D предельное множество

$$L = C(P, f)\colon = \{y \in \mathbb{C}\colon y = \lim_{k \to \infty} f(x_k),\ x_k \to P,\ x_k \in D\}$$

состоит из единственной точки $y_0 \in \partial D'$.

Заметим, что $L \neq \varnothing$ в силу компактности множества $\overline{D'}$ и является подмножеством $\partial D'$ (см., например, предложение 2.5 в [8] или предложение 13.5 в [2]). Допустим, что имеется две точки y_0 и $z_0 \in L$, и пусть $U = B(y_0, r_0)$, где $0 < r_0 < |y_0 - z_0|$.

Пусть $x_0 \in I(P) \subseteq \partial D$ и σ_k, $k = 1, 2, \ldots$, — цепь разрезов, лежащих на окружностях $S_k = S(x_0, r_k)$ из леммы 1 с ассоциированными областями d_k. Тогда в областях $d'_k = f(d_k)$ найдутся точки y_k и z_k с $|y_0 - y_k| < r_0$ и $|y_0 - z_k| > r_0$, $y_k \to y_0$ и $z_k \to z_0$ при $k \to \infty$. Пусть C_k — непрерывные кривые, соединяющие y_k и z_k в d'_k. Заметим, что по построению $\partial U \bigcap C_k \neq \varnothing$.

По условию сильной достижимости точки y_0, найдется континуум $E \subset D'$ и число $\delta > 0$, для которых

$$M(\Delta(E, C_k; D')) \geqslant \delta$$

при больших k. Без ограничения общности можно считать, что последнее условие выполнено для всех $k = 1, 2, \ldots$. Заметим, что $C = f^{-1}(E)$ является компактом в D, и потому $\varepsilon_0 = {\rm dist}(x_0, C) > 0$. Опять же, без ограничения общности можно считать, что $r_k < \varepsilon_0$ для всех $k = 1, 2, \ldots$.

Пусть Γ_m — семейство всех непрерывных путей в $D \setminus d_m$, соединяющих окружность $S_0 = S(x_0, \varepsilon_0)$ и $\overline{\sigma_m}$, $m = 1, 2, \ldots$. Заметим, что по построению $C_k \subset d'_k \subset d'_m$ для любых $m \leqslant k$ и, таким образом, по принципу минорирования $M(f(\Gamma_m)) \geqslant \delta$ при всех $m = 1, 2, \ldots$.

С другой стороны, величина $M(f(\Gamma_m))$ равна емкости конденсатора в D' с обкладками $\overline{d'_m}$ и $\overline{f(D \setminus B_0)}$, где $B_0 = B(x_0, \varepsilon_0)$ (см., например, A.4 в [2]). Таким образом, по принципу минорирования и теореме A.28 в [2]

$$M(f(\Gamma_m)) \leqslant \frac{1}{M(f(\Sigma_m))},$$

где Σ_m — семейство пересечений с областью D всех окружностей $S(x_0, \rho)$, $\rho \in (r_m, \varepsilon_0)$, поскольку $f(\Sigma_m) \subset \Sigma(f(S_m), f(S_0))$, где $\Sigma(f(S_m), f(S_0))$ состоит из всех замкнутых множеств в D', отделяющих $f(S_m)$ и $f(S_0)$. Наконец, по условию (1) получаем, что $M(f(\Gamma_m)) \to 0$ при $m \to \infty$. Полученное противоречие опровергает предположение, что предельное множество $C(P, f)$ состоит более чем из одной точки.

2. О продолжении обратных отображений.

Лемма 3. *Пусть D и D' — ограниченные конечносвязные области в $\mathbb{C}$, P_1 и P_2 — различные простые концы области D, f — регулярное отображение области D на область D' и пусть σ_m, $m = 1, 2, \ldots,$ — цепь разрезов простого конца P_1 из леммы 1, лежащих на окружностях $S(z_1, r_m)$, $z_1 \in I(P_1) \subseteq \partial D$, с ассоциированными областями d_m. Предположим, что функция Q интегрируема на штриховых линиях*

$$D(r) = \{x \in D \colon |x - z_1| = r\} = D \bigcap S(z_1, r) \tag{2}$$

для некоторого множества E чисел $r \in (0, r_0)$ положительной линейной меры, где $r_0 = r_{m_0}$, m_0 — минимальный номер, для которого область d_{m_0} не содержит последовательностей, сходящихся к P_2. Если $\partial D'$ — слабо плоская, то

$$C(P_1, f) \bigcap C(P_2, f) = \varnothing.$$

В силу метризуемости расширения $\overline{D}_P$ области D по простым концам (см. замечание 1) и единственности предела по любой метрике, число m_0 в лемме 3 всегда существует.

Теперь выберем $\varepsilon \in (0, r_0)$ такое, что $E_0 := \{r \in E \colon r \in (\varepsilon, r_0)\}$ имеет положительную линейную меру. Такой выбор возможен в силу счетной полуаддитивности линейной меры и исчерпания $E = \bigcup E_m$, где $E_m = \{r \in E \colon r \in (1/m, r_0)\}$, $m = 1, 2, \ldots$. Ввиду критерия нижнего Q-гомеоморфизма (см. теорему 2.1 в [9] или теорему 9.2 в [2])

$$M(f(\Sigma_\varepsilon)) > 0, \tag{3}$$

где Σ_ε — семейство всех штриховых линий $D(r)$, $r \in (\varepsilon, r_0)$, из (2).

Предположим, что $C_1 \bigcap C_2 \neq \varnothing$, где $C_i = C(P_i, f)$, $i = 1, 2$. По построению найдется такое $m_1 > m_0$, что σ_{m_1} лежит на окружности $S(z_1, r_{m_1})$ с $r_{m_1} < \varepsilon$. Пусть $d_0 = d_{m_1}$ и $d_* \subseteq D \setminus d_{m_0}$ — некоторая область, определяемая цепью разрезов простого конца P_2. Пусть $y_0 \in C_1 \bigcap C_2$. Тогда найдется $\rho_0 > 0$ такое, что $S(y_0, \rho_0) \bigcap f(d_0) \neq \varnothing$ и $S(y_0, \rho_0) \bigcap f(d_*) \neq \varnothing$.

Положим $\Gamma = \Delta(\overline{d_0}, \overline{d_*}; D)$. Согласно (3), по принципу минорирования и теореме A.28 в [2],

$$M(f(\Gamma)) \leqslant \frac{1}{M(f(\Sigma_\varepsilon))} < \infty.$$

Пусть $M_0 > M(f(\Gamma))$ — некоторое конечное число. По условию $\partial D'$ — слабо плоская и потому найдется $\rho_* \in (0, \rho_0)$ такое, что

$$M(\Delta(E, F; D')) \geqslant M_0$$

для всех континуумов E и F в D', пересекающих окружности $S(y_0, \rho_0)$ и $S(y_0, \rho_*)$. Однако эти окружности можно соединить кривыми c_1 и c_2 в областях $f(d_0)$ и $f(d_*)$ соответственно, и, в частности, для этих кривых

$$M_0 \leqslant M(\Delta(c_1, c_2; D')) \leqslant M(f(\Gamma)).$$

Полученное противоречие опровергает предположение, что $C_1 \bigcap C_2 \neq \varnothing$.

Заключение следующей теоремы получается из леммы 3 рассуждением от противного из теоремы Фубини (см., например, теорему III (8.1) в [10]) и метризуемости пространств $\overline{D'}_P$ и $\overline{D}_P$ в соответствии с замечанием 1.

Теорема 1. *Пусть D и D' — ограниченные конечносвязные области в $\mathbb{C}$. Если f — регулярное отображение D на D' с $K_f \in L^1(D)$, то f^{-1} имеет продолжение по простым концам до непрерывного отображения $\overline{D'}_P$ на $\overline{D}_P$.*

Аналогично, комбинируя лемму 3 с леммой 9.2 в [9] или леммой 9.6 в [2], немедленно получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть D и D' — ограниченные конечносвязные области в $\mathbb{C}$. Если $f\colon D \to D'$ — регулярное отображение с условием* (1)*, то f^{-1} может быть продолжено по простым концам до непрерывного отображения $\overline{D'}_P$ на $\overline{D}_P$.*

Наконец, комбинируя лемму 2 с теоремой 2, получаем следующий результат о гомеоморфном продолжении на границу по простым концам.

Теорема 3. *Пусть D и D' — ограниченные конечносвязные области в $\mathbb{C}$ и пусть $f\colon D \to D'$ — регулярное отображение с условием* (1)*. Тогда f имеет продолжение по простым концам до гомеоморфизма $\overline{D}_P$ на $\overline{D'}_P$.*

Отметим, что множество теорем о существовании регулярных решений уравнений Бельтрами на плоскости можно найти в монографии [1].

Цитированная литература

1. *Gutlyanskii V., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* The Beltrami equation: A geometric approach. – New York: Springer, 2012. – 314 p.
2. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in modern mapping theory. – New York: Springer, 2009. – 367 p.
3. *Коллингвуд Э., Ловатер А.* Теория предельных множеств. – Москва: Мир, 1971. – 312 с.
4. *Kovtonyuk D. A., Ryazanov V. I.* On boundary elements of space domains // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2010. – **7**, № 2. – С. 99–103.
5. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – Москва: Наука, 1966. – 630 с.
6. *Näkki R.* Prime ends and quasiconformal mappings // J. Anal. Math. – 1979. – **35**. – P. 13–40.
7. *Ковтонюк Д. А., Петков И. В., Рязанов В. И.* О граничном поведении решений уравнений Бельтрами // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 8. – С. 1078–1091.
8. *Рязанов В. И., Салимов Р. Р.* Слабо плоские пространства и границы в теории отображений // Укр. мат. вестн. – 2007. – **4**, № 2. – С. 199–234.
9. *Ковтонюк Д. А., Рязанов В. И.* К теории нижних Q-гомеоморфизмов // Укр. мат. вестн. – 2008. – **5**, № 2. – С. 159–184.
10. *Сакс С.* Теория интеграла. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1949. – 496 с.

References

1. *Gutlyanskii V., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* The Beltrami equation: A geometric approach, New York: Springer, 2012.
2. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in modern mapping theory, New York: Springer, 2009.
3. *Collingwood E. F., Lohwator A. J.* The theory of cluster sets, Cambridge Tracts in Math. and Math. Physics, Vol. 56, Cambridge: Cambridge University Press, 1966.
4. *Kovtonyuk D. A., Ryazanov V. I.* Proc. Inst. Math. NAS of Ukraine, 2010, **7**, No 2: 99–103.
5. *Goluzin G. M.* Geometric theory of functions of a complex variable, Transl. of Math. Monographs, Vol. 26, Providence: AMS, 1969.
6. *Näkki R.* J. Anal. Math., 1979, **35**: 13–40.
7. *Kovtonyuk D., Petkov I., Ryazanov V.* Ukr. Mat. J., 2011, **63**, No 8: 1078–1091 (in Russian).
8. *Ryazanov V. I., Salimov R. R.* Ukr. Mat. Visn., 2007, **4**, No 2: 199–234 (in Russian).
9. *Kovtonyuk D. A., Ryazanov V. I.* Ukr. Mat. Visn., 2008, **5**, No 2: 159–184 (in Russian).
10. *Saks S.* Theory of the integral, New York: Dover Publications Inc., 1964.

Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 26.01.2015

І. В. Пєтков

Гранична поведінка гомеоморфізмів класу $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ на площині по простих кінцях

Інститут прикладної математики і механіки НАН України, Київ

Досліджується гранична поведінка так званих регулярних відображень, які є істотним узагальненням квазіконформних відображень. Знайдено низку ефективних умов на коефіцієнт дилатації K_f для гомеоморфного продовження вказаних відображень по простих кінцях в обмежених скінченнозв'язних областях.

Ключові слова: прості кінці, гранична поведінка, скінченнозв'язні області, регулярні відображення.

I. V. Petkov

The boundary behavior of homeomorphisms of the class $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ on a plane by prime ends

Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev

The boundary behavior of the so-called regular mappings that are a natural generalization of quasiconformal mappings is studied. A number of effective conditions on the dilatation coefficient K_f for a homeomorphic extension of these mappings by prime ends in finitely connected bounded domains are found.

Keywords: prime ends, boundary behavior, finitely connected domains, regular mappings.