



УДК 539.3

А. М. Багно

**О частотном спектре нормальных волн  
в предварительно напряженном сжимаемом слое,  
взаимодействующем со слоем идеальной жидкости**

*(Представлено академиком НАН Украины А. Н. Гузем)*

*На основании трехмерных линеаризованных уравнений теории упругости конечных деформаций для твердого тела и трехмерных линеаризованных уравнений Эйлера для идеальной сжимаемой жидкости построены дисперсионные кривые нормальных волн в гидроупругой системе в широком диапазоне частот. Проанализировано влияние начальных напряжений в предварительно деформированном сжимаемом упругом слое, а также толщины слоя жидкости на фазовые скорости мод в гидроупругом волноводе как для тонкого, так и для толстого упругого слоя.*

**Ключевые слова:** упругий сжимаемый слой, слой идеальной сжимаемой жидкости, начальные напряжения, гармонические волны.

Волны, распространяющиеся вдоль границы контакта слоя жидкости и упругого слоя, принадлежат к числу обобщений основательно исследованных основных типов акустических волн: Рэлея, Стоунли, Лява и Лэмба. Интерес к таким задачам связан с тем, что указанные волновые процессы являются определяющими и широко используются в таких областях как сейсмология, акустоэлектроника, гидроакустика, дефектоскопия, нетравматические и неразрушающие ультразвуковые методы контроля и диагностики и др. Обзор работ и анализ результатов, полученных в рамках классической теории упругости, приведены в [1, 2]. Вместе с тем, значительное практическое использование поверхностных волн ставит задачу более полного учета реальных свойств сред. К числу таких факторов принадлежат начальные напряжения. Созданные целенаправленно или возникшие в результате технологических операций при изготовлении, они оказывают существенное влияние на волновые процессы. Рассмотренные задачи и результаты, полученные с учетом в телах начальных напряжений, приведены в [3, 5–8]. В настоящей работе для исследования распространения волн в упругом слое, подверженном большим (конечным) начальным деформациям и взаимодействующим со слоем идеальной сжимаемой жидкости, привлекаются модель предварительно напряженного тела и модель покоящейся идеальной сжимаемой жидкости. При этом

---

© А. М. Багно, 2015

используются трехмерные линейризованные уравнения теории упругости конечных деформаций для упругого тела и трехмерные линейризованные уравнения Эйлера для идеальной сжимаемой жидкости. В качестве подхода выбраны постановки задач и метод, основанные на применении представлений общих решений уравнений движения упругого тела и жидкости, предложенные в работах [4–8].

**Постановка задачи.** Рассмотрим задачу о распространении акустических волн в гидроупругой системе, состоящей из упругого сжимаемого слоя, подверженного большим (конечным) начальным деформациям, и слоя идеальной сжимаемой жидкости. Решение получим с привлечением трехмерных линейризованных уравнений теории упругости при конечных деформациях для твердого тела и линейризованных уравнений Эйлера для жидкости, находящейся в состоянии покоя.

Далее предположим, что нелинейно-упругое тело, упругий потенциал которого является произвольной дважды непрерывно-дифференцируемой функцией компонент тензора деформаций Грина, заполняет объем  $-\infty < z_1 < \infty$ ,  $-h_2 \leq z_2 \leq 0$ ,  $-\infty < z_3 < \infty$  и контактирует со слоем идеальной сжимаемой жидкости, занимающей объем  $-\infty < z_1 < \infty$ ,  $0 \leq z_2 \leq h_1$ ,  $-\infty < z_3 < \infty$ . Будем считать, что внешние силы, действующие на указанные среды, распределены равномерно вдоль оси  $0z_3$ . Поскольку в этом случае волна, бегущая в направлении оси  $0z_1$ , и возмущения, ее вызывающие, не зависят от переменной  $z_3$ , то задача будет плоской и можно ограничиться изучением процесса распространения волн в плоскости  $0z_1z_2$ . Следовательно, указанная задача сводится к решению системы уравнений движения упругого тела и жидкости при следующих динамических

$$\tilde{Q}_1|_{z_2=0} = 0, \quad \tilde{Q}_2|_{z_2=0} = P_2|_{z_2=0}, \quad \tilde{Q}_1|_{z_2=-h} = 0, \quad \tilde{Q}_2|_{z_2=-h} = 0, \quad P_2|_{z_2=h} = 0 \quad (1)$$

и кинематическом

$$v_2|_{z_2=0} = \frac{\partial u_2}{\partial t}|_{z_2=0} \quad (2)$$

граничных условиях.

В дальнейшем воспользуемся представлениями общих решений, полученными в работах [4–8]. Для плоского случая общие решения будут иметь вид:

$$u_1 = -\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial z_1 \partial z_2}, \quad (3)$$

$$u_2 = \frac{(\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)}{\lambda_2^2 (a_{12} + \mu_{12})} \left[ \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\lambda_2^2 (\lambda_1^2 \mu_{12} + s_{22}^0)}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\rho}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \chi_1;$$

$$v_1 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_1 \partial t}, \quad v_2 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_2 \partial t}, \quad (4)$$

где введенные функции  $\chi_1$  и  $\chi_2$  являются решениями следующих уравнений:

$$\left\{ \left[ \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\lambda_2^2 (\lambda_1^2 \mu_{12} + s_{22}^0)}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\rho}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \left[ \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\lambda_2^2 (\lambda_2^2 a_{22} + s_{22}^0)}{\lambda_1^2 (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\rho}{\lambda_1^2 (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] - \frac{\lambda_2^4 (a_{12} + \mu_{12})^2}{(\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0) (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^4}{\partial z_1^2 \partial z_2^2} \right\} \chi_1 = 0; \quad (5)$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \chi_2 = 0. \quad (6)$$

Здесь введены следующие обозначения:  $u_i$  — компоненты вектора перемещений упругого тела;  $\rho$  — плотность материала упругого тела;  $\lambda_i$  — удлинения упругого слоя в направлениях координатных осей;  $a_{ij}$  и  $\mu_{ij}$  — величины, которые определяются из уравнений состояния и зависят от вида упругого потенциала [4–8];  $\bar{\sigma}_{ii}^0$  ( $s_{ii}^0 = (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \bar{\sigma}_{ii}^0) / \lambda_i^2$ ) — начальные напряжения в упругом теле;  $v_i$  — компоненты вектора возмущения скорости жидкости;  $\rho_0$  и  $a_0$  — плотность и скорость звука в жидкости в состоянии покоя;  $P_j$  и  $\tilde{Q}_j$  — составляющие напряжений соответственно в жидкости и упругом теле.

Далее параметры, характеризующие процесс распространения волн, разыскиваются в классе бегущих волн и выбираются в виде

$$\chi_j = X_j(z_2) \exp[i(kz_1 - \omega t)], \quad j = \overline{1, 2}, \quad (7)$$

где  $k$  — волновое число;  $\omega$  — круговая частота.

В дальнейшем решаются две задачи Штурма–Лиувилля на собственные значения для уравнений движения упругого тела и жидкости, а также находятся соответствующие собственные функции. После подстановки решений в граничные условия (1) и (2) получаем однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно постоянных интегрирования. Исходя из условия существования нетривиального решения, приравнивая определитель системы к нулю, получаем дисперсионное уравнение

$$\det \left\| e_{mn} \left( c_\sigma, \lambda_i, a_{ij}, \mu_{ij}, s_{ii}^0, \rho_0, a_0, \frac{\omega h_1}{c_s}, \frac{\omega h_2}{c_s} \right) \right\| = 0, \quad m, n = \overline{1, 6}, \quad (8)$$

где  $c_\sigma$  — фазовая скорость нормальных волн в предварительно напряженном слое;  $c_s$  ( $c_s^2 = \mu / \rho$ ) — скорость волны сдвига в ненапряженном упругом теле;  $\mu$  — модуль сдвига материала упругого тела;  $h_1$  — толщина слоя жидкости;  $h_2$  — толщина упругого слоя.

Отметим, что полученное дисперсионное уравнение (8) не зависит от формы упругого потенциала. Оно является наиболее общим и из него можно получить соотношения для ряда частных случаев [3–11]. Если положить  $\bar{\sigma}_{ii}^0 = 0$ , получим равенства для хорошо исследованных в рамках классической теории упругости волн Рэлея, Стоунли и Лэмба [1, 2].

**Анализ численных результатов.** Как известно, взаимодействие продольных и сдвиговых волн на граничных поверхностях приводит к возникновению волнового поля с довольно сложным спектром мод. Для возможности его получения дисперсионное уравнение (8) в дальнейшем решалось численно. При этом расчеты проводились для системы органическое стекло — вода, которая характеризовалась следующими параметрами: упругий слой —  $\rho = 1160 \text{ кг/м}^3$ ,  $\mu = 1,86 \cdot 10^9 \text{ Па}$ ; слой жидкости —  $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$ ,  $a_0 = 1459,5 \text{ м/с}$ .

Заметим, что уравнение (8) выведено без введения каких-либо дополнительных ограничений к виду функции упругого потенциала, поэтому оно справедливо для упругих потенциалов произвольной формы. В данной работе для описания упругих свойств оргстекла использовался трехинвариантный потенциал Мурнагана [12]. При рассмотрении конкретного примера и численного решения уравнения (8) учитывалось то, что оргстекло, не разрушаясь, не допускает больших деформаций и поэтому коэффициенты уравнений состояния  $a_{ij}$  и  $\mu_{ij}$  определялись в рамках линейного акустического приближения [12].

Результаты вычислений представлены на рис. 1–3.

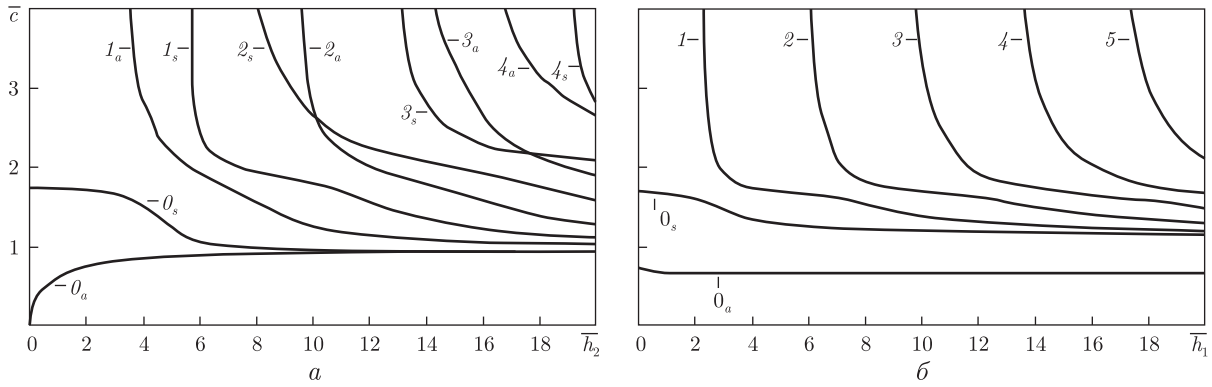


Рис. 1

На рис. 1, а для упругого слоя, не взаимодействующего с жидкостью, приведены зависимости безразмерных величин фазовых скоростей нормальных волн Лэмба  $\bar{c}$  ( $\bar{c} = c/c_s$ ) от безразмерной величины толщины упругого слоя (частоты)  $\bar{h}_2$  ( $\bar{h}_2 = \omega h_2/c_s$ ) при отсутствии начальных деформаций. Номерами  $n_a$  обозначены антисимметричные моды, а  $n_s$  — соответственно симметричные моды.

На рис. 1, б представлены дисперсионные кривые для гидроупругого волновода, отражающие зависимости безразмерных величин фазовых скоростей мод  $\bar{c}$  ( $\bar{c} = c/c_s$ ) от безразмерной величины толщины слоя идеальной сжимаемой жидкости  $\bar{h}_1$  ( $\bar{h}_1 = \omega h_1/c_s$ ) для тонкого упругого слоя, с толщиной, равной  $\bar{h}_2 = 2$ , также при отсутствии начальных деформаций.

Из графиков на рис. 1, а следует, что скорость нулевой антисимметричной моды Лэмба при росте толщины упругого слоя (частоты) стремится к скорости волны Рэлея снизу, а скорость нулевой симметричной моды — к скорости волны Рэлея сверху. Скорости всех мод Лэмба высокого порядка при увеличении толщины упругого слоя (частоты) стремятся к скорости волны сдвига в материале упругого тела [1, 2, 9].

Графики, приведенные на рис. 1, б, показывают, что при росте толщины жидкого слоя  $\bar{h}_1$  скорость нулевой антисимметричной моды  $0_a$  стремится к величине, которая меньше скорости волны Стоунли. Скорости нулевой симметричной моды  $0_s$  и всех высших мод 1–5, порождаемых слоем жидкости, стремятся к скорости распространения звука в жидкой среде.

Характер влияния предварительного растяжения ( $\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$ ) на скорости мод в упругом слое, взаимодействующем с жидким слоем, иллюстрируют графики на рис. 2, а, где представлены зависимости относительных изменений величин фазовых скоростей  $c_\varepsilon$  ( $c_\varepsilon = (\bar{c}_\sigma - \bar{c})/\bar{c}$ ,  $\bar{c}_\sigma$  — фазовая скорость мод в предварительно напряженном слое;  $\bar{c}$  — фазовая скорость нормальных волн в системе при отсутствии начальных деформаций) от толщины слоя жидкости  $\bar{h}_1$  для первых 7 мод. На этом рисунке приведены кривые для гидроупругого волновода, толщина упругого слоя которого равняется  $\bar{h}_2 = 2$ .

На рис. 2, б представлены дисперсионные кривые для гидроупругого волновода, отражающие зависимости безразмерных величин фазовых скоростей мод  $\bar{c}$  от безразмерной величины толщины слоя жидкости  $\bar{h}_1$  для толстого упругого слоя с толщиной, равной  $\bar{h}_2 = 10$ , при отсутствии начальных деформаций.

Графики на рис. 2, а показывают, что начальное растяжение ( $\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$ ) приводит к повышению скоростей нулевых антисимметричной и симметричной мод. Скорости высших мод, возникновение которых обусловлено действием слоя жидкости, в окрестнос-

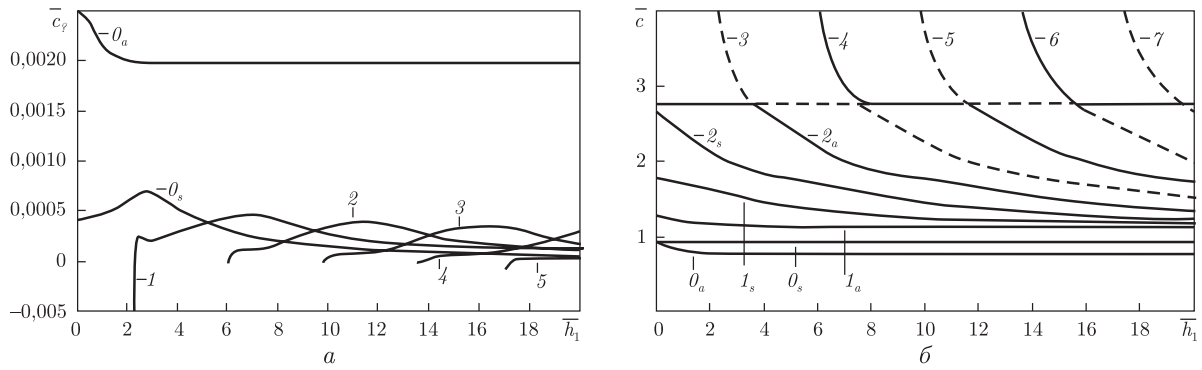


Рис. 2

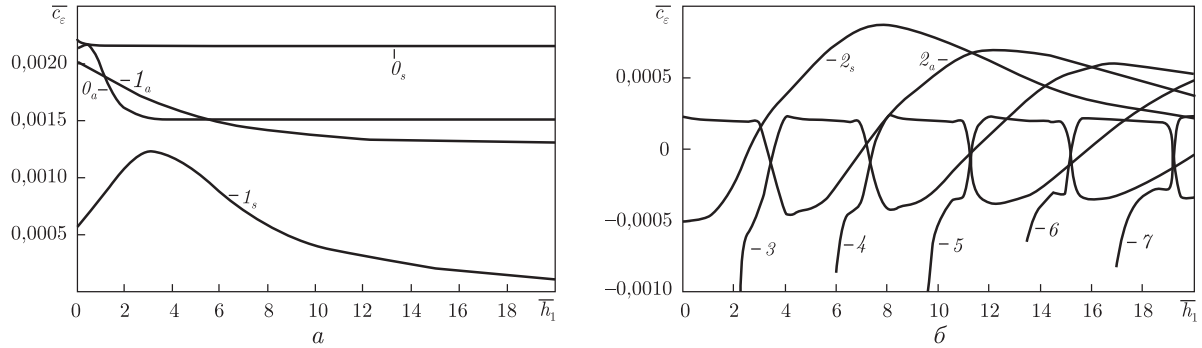


Рис. 3

ти критических частот в случае тонкого  $\bar{h}_2 = 2$  упругого слоя ниже, чем при отсутствии предварительного растяжения. В дальнейшем с ростом толщины слоя жидкости для скоростей всех мод характерно уменьшение влияния начального растяжения. Для мод 1–5, порождаемых жидкостью, существуют жидкие слои определенной толщины, при которых начальное напряжение не оказывает влияния на их фазовые скорости. Эта качественно новая закономерность, отсутствующая в случае распространения волн в неограниченных и полугограниченных телах, впервые была обнаружена и опубликована в работе [9] для упругого слоя, не взаимодействующего с жидкостью.

Графики для гидроупругой системы, приведенные на рис. 2, б для случая толстого упругого слоя с  $\bar{h}_2 = 10$ , показывают, что при росте толщины жидкого слоя скорость нулевой антисимметричной моды стремится к скорости волны Стоунли, а скорость нулевой симметричной моды — к скорости волны Рэлея. При этом скорость первой антисимметричной моды стремится к скорости волны, величина которой меньше скорости распространения звука в жидкости. Фазовые скорости всех последующих высших мод стремятся к скорости распространения звука в жидкой среде.

Характер влияния предварительного растяжения ( $\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$ ) на скорости мод в упруго-жидкостной системе отображают графики на рис. 3, а и б, где представлены зависимости относительных изменений величин фазовых скоростей  $c_\varepsilon$  от толщины слоя жидкости  $\bar{h}_1$  для первых 11 мод. На этих рисунках изображены кривые для гидроупругого волновода, толщина упругого слоя которого равна  $\bar{h}_2 = 10$ .

Из графиков на рис. 3, а и б вытекает, что начальное растяжение упругого слоя приводит к повышению фазовых скоростей нулевой и первой антисимметричной и симметричной

мод, а также второй антисимметричной моды. Скорости второй симметричной моды и всех последующих высших мод 3–7, порождаемых слоем жидкости, в окрестности частот их зарождения становятся меньше соответствующих скоростей в случае слоя без начальных напряжений. С увеличением толщины жидкого слоя для всех мод характерно уменьшение влияния начального растяжения упругого слоя на их фазовые скорости. Вместе с тем для мод, начиная со второй и далее для всех последующих, существуют жидкие слои определенной толщины, при которых предварительное деформирование не оказывает влияния на их фазовые скорости. В отличие от тонкого слоя, для гидроупругого волновода с толстым упругим слоем каждая мода, порождаемая жидкостью, имеет три такие частоты. Кроме того, из представленных графиков следует, что для ряда мод существуют области частот, где начальное растяжение упругого слоя приводит как к повышению величин фазовых скоростей волн, так и к их понижению.

Анализ графиков на рис. 2, а и 3, а, б показывает, что начальные напряжения изменяют критические частоты и смещают дисперсионные кривые мод. Это приводит к изменению величин фазовых скоростей нормальных волн и появлению для ряда мод частот, при которых начальные напряжения не оказывают влияния на их фазовые скорости.

### Цитированная литература

1. *Викторов И. А.* Звуковые поверхностные волны в твердых телах. – Москва: Наука, 1981. – 288 с.
2. *Кузнецов С. В.* Волны Лэмба в анизотропных пластинах (обзор) // Акустич. журн. – 2014. – **60**, № 1. – С. 90–100.
3. *Bagno A. M., Guz A. N.* Elastic waves in pre-stressed bodies interacting with a fluid (survey) // Int. Appl. Mech. – 1997. – **33**, No 6. – P. 435–463.
4. *Guz A. N.* Aerohydroelasticity problems for bodies with initial stresses // Int. Appl. Mech. – 1980. – **16**, No 3. – P. 175–190.
5. *Гузь А. Н.* Упругие волны в телах с начальными напряжениями. В 2-х т. – Киев: Наук. думка, 1986.
6. *Гузь А. Н.* Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. – Киев: А. С. К., 2004. – 672 с.
7. *Гузь А. Н.* Динамика сжимаемой вязкой жидкости. – Киев: А. С. К., 1998. – 350 с.
8. *Guz A. N.* Dynamics of compressible viscous fluid. – Cambridge Scientific Publishers, 2009. – 428 p.
9. *Гузь А. Н., Жук А. П., Махорт Ф. Г.* Волны в слое с начальными напряжениями. – Киев: Наук. думка, 1976. – 104 с.
10. *Бабич С. Ю., Гузь А. Н., Жук А. П.* Упругие волны в телах с начальными напряжениями // Прикл. механика. – 1979. – **15**, № 4. – С. 3–23.
11. *Жук А. П.* Волны Стоунли в среде с начальными напряжениями // Прикл. механика. – 1980. – **16**, № 1. – С. 113–116.
12. *Гузь А. Н., Махорт Ф. Г., Гуца О. И.* Введение в акустоупругость. – Киев: Наук. думка, 1977. – 152 с.

### References

1. *Viktorov I. A.* Sound surface waves in solids, Moscow: Nauka, 1981 (in Russian).
2. *Kuznetsov S. V.* Acoustic J., 2014, **60**, No 1: 90–100 (in Russian).
3. *Bagno A. M., Guz A. N.* Int. Appl. Mech., 1997, **33**, No 6: 435–463.
4. *Guz A. N.* Int. Appl. Mech., 1980, **16**, No 3, 175–190 (in Russian).
5. *Guz A. N.* Elastic waves in bodies with initial stresses. In 2 vols., Kiev: Naukova Dumka, 1986 (in Russian).
6. *Guz A. N.* Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses, Kiev: A. C. K., 2004 (in Russian).
7. *Guz A. N.* Dynamics of compressible viscous fluid, Kiev: A. C. K., 1998 (in Russian).
8. *Guz A. N.* Dynamics of compressible viscous fluid, Cambridge Scientific Publishers, 2009.
9. *Guz A. N., Zhuk A. P., Makhort F. G.* Waves in layer with initial stresses, Kiev: Naukova Dumka, 1976 (in Russian).

10. Babich S. Y., Guz A. N., Zhuk A. P. J. Appl. Mech., 1979, **15**, No 4: 3–23 (in Russian).
11. Zhuk A. P. J. Appl. Mech., 1980, **16**, No 1: 113–116 (in Russian).
12. Guz A. N., Makhort F. G., Guscha O. I. Introduction in acoustoelasticity, Kiev: Nauk. Dumka, 1977 (in Russian).

*Институт механики им. С. П. Тимошенко  
НАН Украины, Киев*

*Поступило в редакцию 23.12.2014*

**О. М. Багно**

### **Про частотний спектр нормальних хвиль у попередньо напруженому стисливому шарі, що взаємодіє з шаром ідеальної рідини**

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ

*На основі тривимірних лінеаризованих рівнянь теорії пружності скінченних деформацій для твердого тіла та тривимірних лінеаризованих рівнянь Ейлера для ідеальної стисливої рідини побудовано дисперсійні криві нормальних хвиль у гідропружній системі в широкому діапазоні частот. Проаналізовано вплив початкових напружень у попередньо деформованому стисливому пружного шарі, а також товщини шару рідини на фазові швидкості мод у гідропружному хвилеводі як для тонкого, так і для товстого пружного шару.*

**Ключові слова:** пружний стисливий шар, шар ідеальної стисливої рідини, початкові напруження, гармонічні хвилі.

**O. M. Bahno**

### **On the frequency spectrum of the normal waves in a prestressed compressible layer interacting with the layer of an ideal fluid**

S. P. Timoshenko Institute of Mechanics NAS of Ukraine, Kiev

*Basing on the three-dimensional linearized equations of the elasticity theory of finite deformations for a solid and the three-dimensional linearized Euler equations for an ideal compressible fluid, the dispersion curves of normal waves in hydroelastic system in a wide range of frequencies are constructed. The effects of initial stresses in a predeformed compressible elastic layer and of the fluid layer thickness on the phase velocities of modes in a hydroelastic waveguide for both thin and thick elastic layers are analyzed.*

**Keywords:** elastic compressible layer, layer of ideal compressible fluid, initial stresses, harmonic waves.