

М. Ф. Селіванов

Модель тріщини з зоною зчеплення при змішаному режимі руйнування

(Представлено академіком НАН України В. Д. Кубенком)

Розглянуто навантажену на нескінченності пластину з центральною тріщиною змішаного режиму руйнування. Для кусково-лінійного закону розподілу сил зчеплення отримано розв'язок для відривів. Цей розв'язок включено до моделі тріщини із складною зоною зчеплення. Визначальні співвідношення для параметрів граничного стану проілюстровано числовими розв'язками для двох комбінацій величин розтягуючих та зсувних зовнішніх зусиль.

Ключові слова: тріщина змішаного режиму руйнування, модель тріщини з зоною зчеплення, складна зона зчеплення, закон зчеплення–відриву.

Інженерним розрахункам, що враховують наявність тріщин, приділяється все більше уваги у зв'язку з тим, що вони зосереджені на виявленні границь опору руйнуванню і довговічності конструкцій, виготовлених з сучасних матеріалів, таких як армовані пластики, наноккомпозити тощо. Переважно ці розрахунки базуються на результатах лінійної пружної механіки руйнування (ЛПМР). Коли нелінійною поведінкою матеріалу в околі вершини тріщини можна знехтувати, ЛПМР дає ефективні результати при прогнозуванні граничного стану тріщини (визначення параметрів задачі, що забезпечують початок поширення тріщини). Найважливішим здобутком після появи ЛПМР стала модель тріщини із зоною послаблених зв'язків біля її вершини. Ця зона отримала назву зони передруйнування, або зони зчеплення (ЗЗ). При незначних розмірах ЗЗ можна ефективно використовувати концепцію квазікрихкого руйнування, яка використовує найважливіший параметр ЛПМР — коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН).

В багатьох випадках визначення граничного стану при наявності тріщини в конструкції з композитного матеріалу, бетону або іншого квазікрихкого матеріалу розмір ЗЗ виявляється недостатньо малим порівняно з іншими характеристичними розмірами, що призводить до невідповідності умовам застосування КІН. Деякі механізми (утворення мікротріщин та порожнин перед кінцем тріщини, їх злиття, бріджинг та інші механізми на мікрорівні), що супроводжують розвиток тріщини, можуть призводити до невиконання цих умов. Якщо розмір ЗЗ не є достатньо малим, ніж інші характерні розміри задачі, незамінним інструментом аналізу стає модель тріщини з зоною зчеплення (МЗЗ). Складні фізичні ефекти, які мають місце в околі вершини тріщини, можна змоделювати за допомогою введення нелінійних ефектів деформування, що знесені на відрізок на продовженні тріщини. При цьому в усій області поза цим відрізком матеріал можна вважати лінійно-пружним. ЗЗ моделюється двома поверхнями, які стягуються силами зчеплення (СЗ). Втрата несучої здібності матеріалом характеризується повним роз'єднанням поверхонь зчеплення. СЗ та відстань між поверхнями зчеплення (відрив) пов'язані законом зчеплення–відриву (ЗЗВ).

Для застосування МЗЗ у найпростішій формі (для простого режиму руйнування) необхідно два параметри: енергія руйнування (граничне значення роботи СЗ) і міцність зчеплення (максимальна інтенсивність СЗ). Ці параметри мають бути визначені за допомогою стандартизованих тестів з метою прогнозування розвитку тріщини в інших структурних конфігураціях. Окрім енергії руйнування та міцності зчеплення ЗЗВ включає своїми параметрами ще й параметри форми, таким чином надаючи більшої гнучкості описанню тріщиностійкості. Існує набір базових законів, що успішно застосовуються в рамках МЗЗ. Критичне розкриття тріщини перетворюється на характеристичний розмір, що залежить від енергії руйнування, міцності зчеплення і ЗЗВ.

При змішаному режимі руйнування параметрів тріщиностійкість збільшується. Енергія руйнування ϕ_I , міцність зчеплення σ_{\max} та параметри форми для тріщини нормального відриву доповнюються енергією руйнування ϕ_{II} , міцністю зчеплення τ_{\max} та параметрами форми для тріщини зсуву, а також параметрами, що пов'язують ці два види руйнування. Останні визначаються з умови потенційності поля СЗ [1].

Дослідження напружено-деформованого стану в рамках МЗЗ проводиться за допомогою апарату методу функції комплексної змінної (МФКЗ) або методу скінченних елементів (МСЕ). В першому випадку довжина ЗЗ знаходиться з умови скінченності напружень у вершині ЗЗ. В рамках МСЕ вводиться новий характеристичний розмір (для нормального відриву — $E\phi_I/\sigma_{\max}^2$), що з точністю до числового множника збігається з розміром ЗЗ.

Сучасні уявлення про моделювання в рамках МЗЗ викладено в роботах [1–4]. Більшість досліджень, що використовують МЗЗ для розв'язання прикладних задач механіки руйнування, проведено за допомогою МСЕ. Робіт, що застосовують апарат МФКЗ для досліджень тріщиностійкості при змішаному типі навантаження з використанням МЗЗ, на сьогодні не виявлено. В роботі [5] у формулюванні МФКЗ наведено розв'язок задачі про переміщення берегів тріщини змішаного режиму руйнування (до пластини прикладено на нескінченності навантаження σ_y^∞ , σ_x^∞ та τ_{xy}^∞), коли нормальні та дотичні СЗ розподілені вздовж ЗЗ зі сталими інтенсивностями σ_{\max} і τ_{\max} відповідно, причому ділянки прикладання цих сил збігаються. В такій постановці умови скінченності напружень у вершині ЗЗ призводять до зв'язку між ЗЗ і зовнішнім навантаженням у вигляді $\sigma_y^\infty/\sigma_{\max} = \tau_{xy}^\infty/\tau_{\max}$, який не дозволяє незалежно вводити міцності зчеплення для двох режимів руйнування. Вперше таку проблему вдалося вирішити в роботі [6] шляхом введення зон прикладання нормальних і зсувних СЗ з відмінними положеннями хвостів. Такий принцип моделювання отримав назву складних границь зони зчеплення [3]. В даній роботі модифіковано розв'язок, одержаний в [5]. Розподіл СЗ при цьому взято у вигляді кусково-лінійного закону. Одержані вирази для нормального та дотичного відривів дали можливість використати МЗЗ. Побудовано систему для визначення значень СЗ у вузлах кусково-лінійних розподілів для заданої довжини тріщини та інтенсивності зовнішнього навантаження. Ця система використана у числовому прикладі для визначення параметрів граничного стану, коли потенціал ЗЗВ задано в формі

$$\Psi(\bar{\Delta}_I, \bar{\Delta}_{II}) = \phi_I [1 - (1 - \bar{\Delta}_I)^\alpha (1 - \bar{\Delta}_{II})^\beta]. \quad (1)$$

Отриману визначальну систему розв'язано шляхом додавання вузлів у розподіл СЗ з використанням попереднього розв'язку як наближення.

Постановка задачі. Визначення переміщень берегів тріщини при кусково-лінійному розподілі СЗ. Розглянемо класичну задачу механіки руйнування суцільного середовища про ідеально гостру тріщину в нескінченній пластині. На нескінченності до

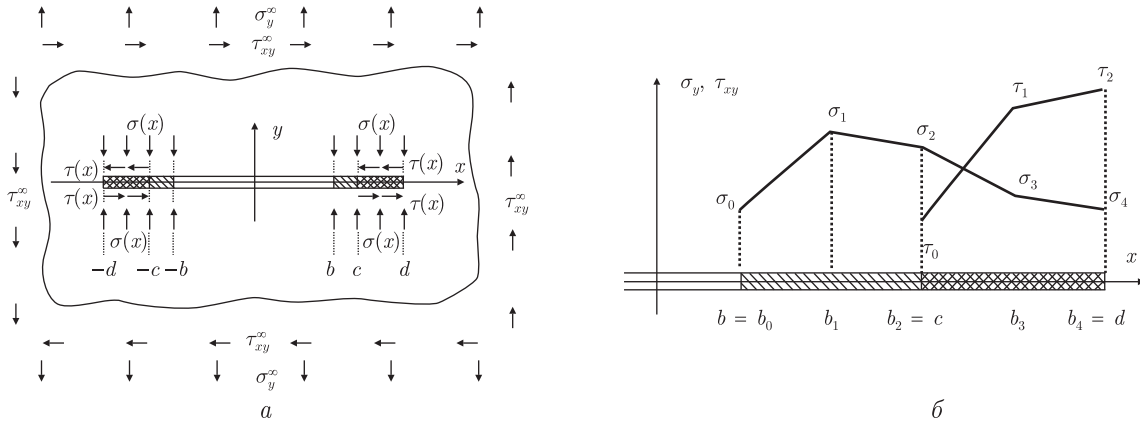


Рис. 1

пластини прикладено розтягуюче навантаження, напрям прикладання якого збігається з напрямом нормалі до лінії розташування тріщини інтенсивністю σ_y^∞ та зсувне навантаження інтенсивністю τ_{xy}^∞ (рис. 1, а).

Вважатимемо, що задані параметри задачі співвідносяться таким чином, що руйнування відбувається в режимі нормального відриву. В іншому випадку постановку задачі можна легко переформулювати. Внаслідок покладеного довжина ділянки прикладання нормальних сил зчеплення $\sigma(x)$ є більшою за ділянку прикладання дотичних сил зчеплення $\tau(x)$ ($c > b$).

Будемо моделювати тріщину розрізом довжиною $2b$ вздовж осі Ox . На продовженні цього розрізу вводимо додатковий розріз довжиною $d - b$ з прикладеними до берегів самоврівноваженими нормальними СЗ інтенсивністю $\sigma(x)$, на частині введеного розрізу довжиною $d - c$ прикладемо дотичні СЗ інтенсивністю $\tau(x)$. Закони розподілу $\sigma(x)$ і $\tau(x)$ задаємо у кусково-лінійній формі зі збіжними вузлами спільної ділянки прикладання (рис. 1, б). Вимагатимемо плавного змикання берегів тріщини, що еквівалентно умові скінченності напружень σ_y і τ_{xy} у вершині ЗЗ (в точці $x = d$).

Розглянемо контурні умови (на рис. 1, б взято $n = 4$, $r = 2$, $m = n - r$): у правій координатній напівплощині

$$\sigma_y^\pm(x) = \begin{cases} \frac{(b_k - x)\sigma_{k-1} + (x - b_{k-1})\sigma_k}{\Delta b_k}, & b_{k-1} \leq x \leq b_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \\ 0, & 0 \leq x < b \end{cases}$$

$$\tau_{xy}^\pm(x) = \begin{cases} \frac{(b_{k+m} - x)\tau_{k-1} + (x - b_{k+m-1})\tau_k}{\Delta b_{k+m}}, & b_{k+m-1} \leq x \leq b_{k+m}, \quad k = 1, 2, \dots, r, \\ 0, & 0 \leq x < c, \end{cases}$$

і симетрично для $-d \leq x < 0$ $\sigma_y^\pm(x) = \sigma_y^\pm(-x)$, $\tau_{xy}^\pm(x) = \tau_{xy}^\pm(-x)$.

Знайдемо величини нормального та дотичного відривів шляхом розв'язання граничної задачі для площини з прямолінійним розрізом

$$\Delta_I(x) = \frac{4}{\pi E} \sum_{k=0}^n \sigma_k J_k(x), \quad \Delta_{II}(x) = \frac{4}{\pi E} \sum_{k=0}^r \tau_k J'_k(x), \quad (2)$$

які визначаються за умов скінченності напружень

$$\sum_{k=0}^n \sigma_k N_k = \frac{\pi \sigma_y^\infty}{2}, \quad \sum_{k=0}^r \tau_k N'_k = \frac{\pi \tau_{xy}^\infty}{2}. \quad (3)$$

У виразах (2) та (3) введено такі позначення:

$$\begin{aligned} J_0(x) &= \frac{\Delta T_1(x)}{\Delta b_1} + K(b, x), & J'_0(x) &= \frac{\Delta T_{m+1}(x)}{\Delta b_{m+1}} + K(b_m, x); \\ J_k(x) &= \frac{\Delta T_{k+1}(x)}{\Delta b_{k+1}} - \frac{\Delta T_k(x)}{\Delta b_k} \quad (0 < k < n), & J_n(x) &= \frac{T_{n-1}(x)}{\Delta b_n}; \\ J'_k(x) &= J_{m+k}(x) \quad (0 < k \leq r, \quad m = n - r); \\ C(\xi, x) &= \ln \left| \frac{\check{X}(\xi) - \check{X}(x)}{\check{X}(\xi) + \check{X}(x)} \right|, & \check{X}(t) &= \sqrt{\frac{t+d}{d-t}}; \\ K(\xi, x) &= (x - \xi)C(\xi, x) - (x + \xi)C(-\xi, x); \\ \Delta T_k(x) &= T_{k+1}(x) - T_k(x); \\ T_k(x) &= \frac{1}{2} [(x + b_k)^2 C(-b_k, x) + (x - b_k)^2 C(b_k, x)] + \hat{X}(b_k) \hat{X}(x); \\ N_0 &= \frac{\Delta R_1}{\Delta b_1} - I_0, & N_k &= \frac{\Delta R_{k+1}}{\Delta b_{k+1}} - \frac{\Delta R_k}{\Delta b_k} \quad (0 < k < n), & N_n &= I_n - \frac{\Delta R_n}{\Delta b_n}; \\ N'_0 &= \frac{\Delta R_{m+1}}{\Delta b_{m+1}} - I_m, & N'_k &= N_{m+k} \quad (0 < k \leq r); \\ \Delta R_k &= R_k - R_{k-1}, & R_k &= b_k I_k + \hat{X}_k; \\ I_k &= I(b_k), & \hat{X}_k &= \hat{X}(b_k) \quad (I_n = I(d) = \pi, \quad \hat{X}_n = \hat{X}(d) = 0); \\ I(t) &= 2 \operatorname{arctg} \check{X}(t), & \hat{X}(t) &= \sqrt{d^2 - t^2}. \end{aligned}$$

Визначення параметрів граничного стану за заданим ЗЗВ. Використавши заданий ЗЗВ

$$\sigma = T_I(\bar{\Delta}), \quad \tau = T_{II}(\bar{\Delta}), \quad \bar{\Delta} = (\bar{\Delta}_I, \bar{\Delta}_{II})$$

та умову скінченності напружень у вершині ЗЗ (3), для заданої докритичної напівдовжини тріщини b_0 можна записати систему $n + r + 4$ рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} T_I[\bar{\Delta}(b_k)] = \sigma_k, \quad k = 0, 1, \dots, n, \\ T_{II}[\bar{\Delta}(b_{n-r+k})] = \tau_k, \quad k = 0, 1, \dots, r, \\ \sum_{k=0}^n \sigma_k N_k = \frac{\pi \sigma_y^\infty}{2}, \quad \sum_{k=0}^r \tau_k N'_k = \frac{\pi \tau_{xy}^\infty}{2} \end{array} \right. \quad (4)$$

для визначення $n + r + 4$ невідомих: 1) положення точки b_n — вершини ЗЗ; 2) положення точки b_{n-r} — хвоста ділянки прикладання дотичних СЗ; 3) значень σ_k функції $\sigma(x)$ в точках сітки b_k , $k = 0, 1, \dots, n$; 4) значень τ_k функції $\tau(x)$ в точках сітки b_{n-r+k} , $k = 0, 1, \dots, r$.

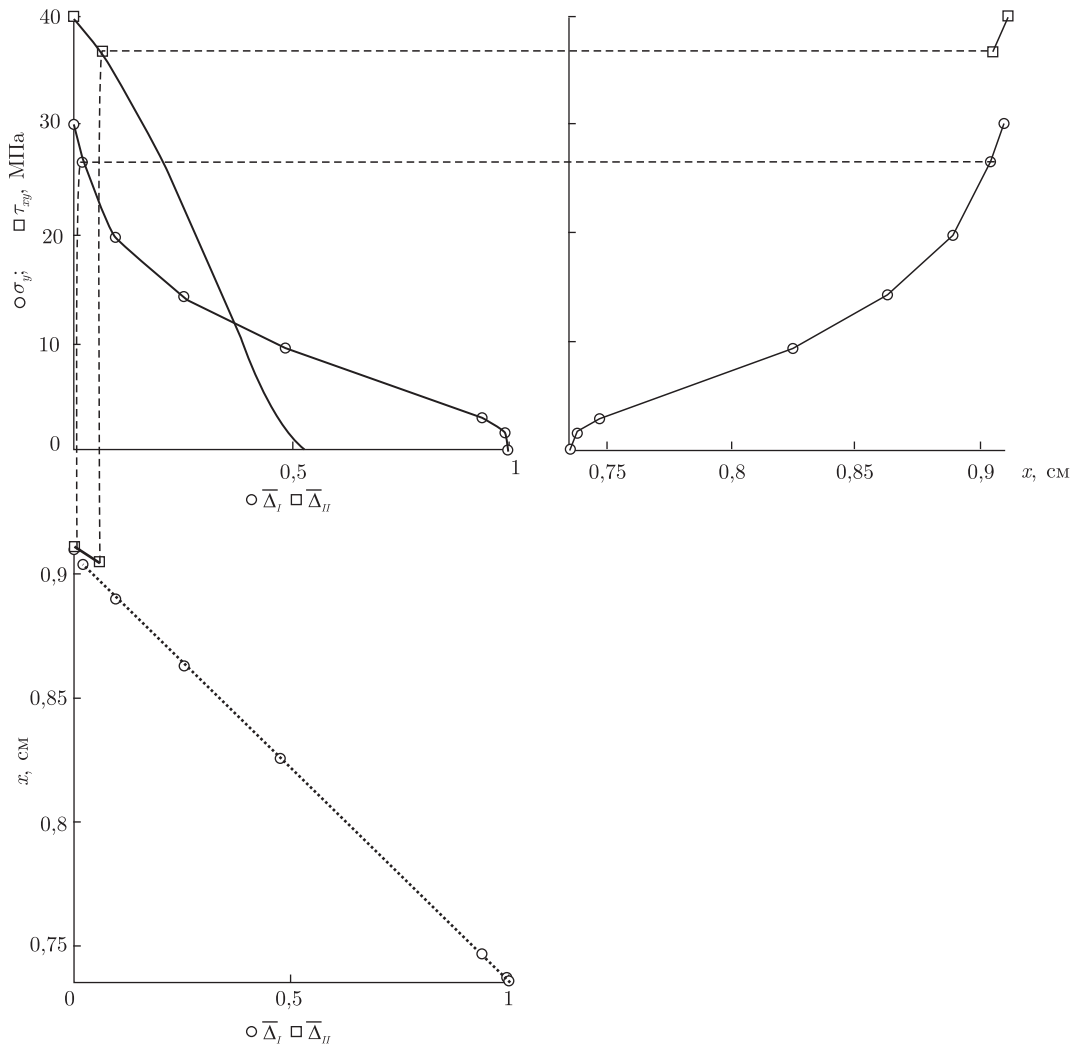


Рис. 2

Величини b_k , $k = 0, 1, \dots, n$, є параметрами геометричних характеристик N_k , N'_k , J_k , J'_k . Три з величин b_k — $b_0 = b$, $b_m = c$ і $b_n = d$ невідомі, інші можна розподілити (наприклад, рівновіддалено) між b_0 і b_m , b_m і b_n .

У граничному стані одного з режимів руйнування, коли розкриття тріщини в її вершині досягає максимального значення Δ_{\max} , згідно з більшістю відомих ЗЗВ, відповідне значення СЗ дорівнює нулю. Покладаючи у співвідношеннях (4) $\sigma_0 = 0$, отримуємо систему для визначення параметрів граничного стану в режимі нормального відриву (до цих параметрів замість σ_0 слід віднести критичну довжину тріщини b_0).

У дану роботу не входить детальний опис методу числового розв'язання системи (4). Відзначимо лише те, що він отримується додаванням числа вузлів у кусково-лінійний розподіл сил зчеплення з використанням попереднього розв'язку як наближення для поточного.

Для числового прикладу використаємо ЗЗВ з потенціалом (1):

$$T_I(\bar{\Delta}) = \sigma_{\max}(1 - \bar{\Delta}_I)^{\alpha-1}(1 - \bar{\Delta}_{II})^{\beta}, \quad T_{II}(\bar{\Delta}) = \tau_{\max}(1 - \bar{\Delta}_I)^{\alpha}(1 - \bar{\Delta}_{II})^{\beta-1}. \quad (5)$$

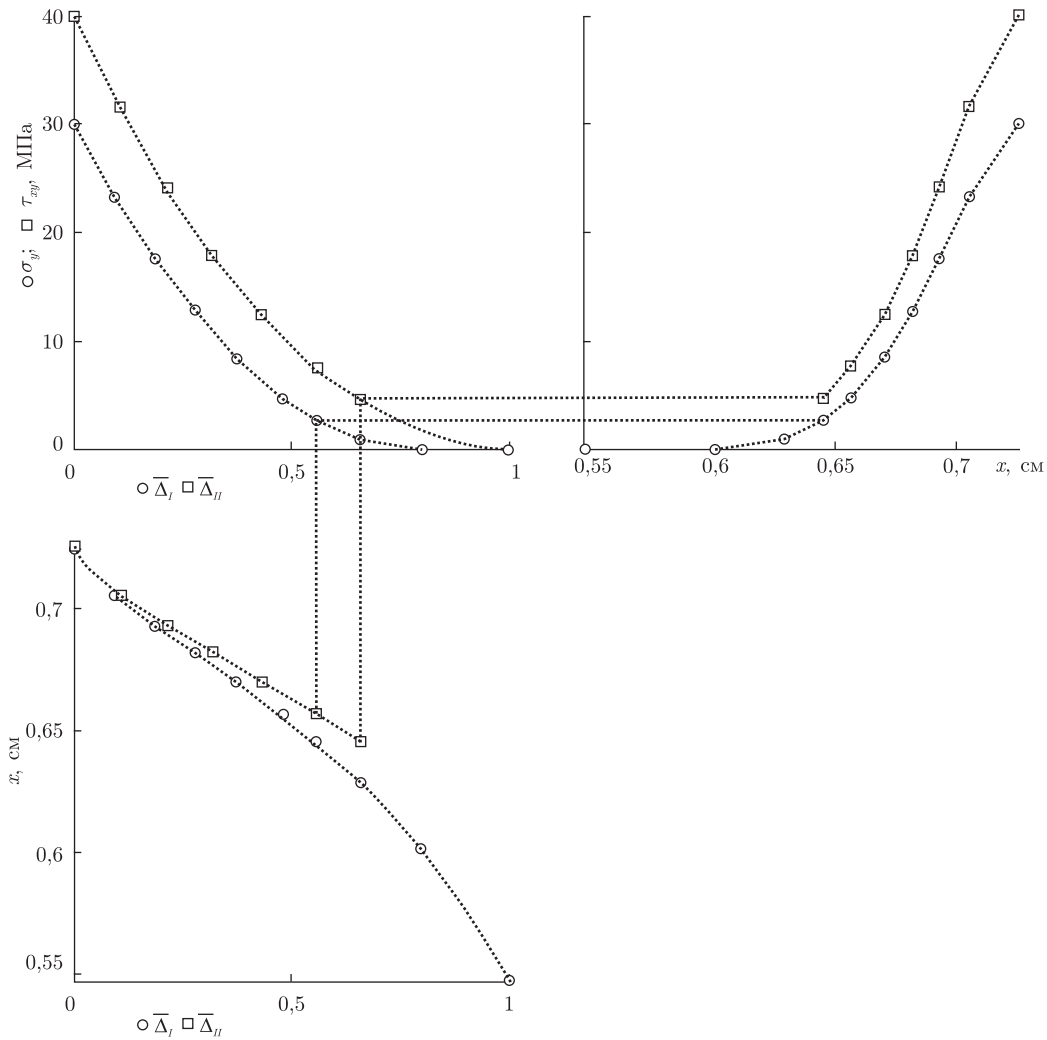


Рис. 3

Запишемо енергію руйнування для режимів нормального відриву та зсуву:

$$\phi_I = \int_0^{\Delta_{I \max}} T_I(\Delta_I, 0) d\Delta_I = \frac{\sigma_{\max} \Delta_{I \max}}{\alpha}; \quad (6)$$

$$\phi_{II} = \int_0^{\Delta_{II \max}} T_{II}(0, \Delta_{II}) d\Delta_{II} = \frac{\tau_{\max} \Delta_{II \max}}{\beta}.$$

Умовою потенціальності поля (5) є рівність енергій руйнування двох режимів.

Параметри числових розв'язків візьмемо такими: $E = 4$ ГПа, $\phi_I = \phi_{II} = 600$ Н/м, $\sigma_{\max} = 30$ МПа, $\tau_{\max} = 40$ МПа, $\alpha = 1,3$, $\beta = 2$. Величини $\Delta_{I \max}$ і $\Delta_{II \max}$ визначено за допомогою виразів (6).

На рис. 2 проілюстровано параметри граничного стану при $\sigma_y^\infty = 7$ МПа, $\tau_{xy}^\infty = 9,4$ МПа. Аналогічні залежності на рис. 3 побудовано для $\tau_{xy}^\infty = 3$ МПа. Пунктирними кривими на

перших блоках рисунків зображено проекції ліній перетину поверхні ЗЗВ зі смугою між прямими, що проходять через точки $\overline{\Delta}(b_{k-1})$ і $\overline{\Delta}(b_k)$ площини $\overline{\Delta}_I O \overline{\Delta}_{II}$, перпендикулярно цій площині. На кожному з рисунків пунктирними прямими зображено відповідність між блоками. Кожна точка (кружечок для параметрів нормального відриву, квадратик — для зсуву) відповідає вузлу кусково-лінійного закону розподілу СЗ. Згадана відповідність проілюстрована лише для точок b_0 і b_m — хвостів відрізків прикладання нормальних та зсувних СЗ відповідно.

Рис. 2 і 3 дозволяють простежити, як змінюється критична напівдовжина тріщини при збільшенні інтенсивності зовнішніх зсувних навантажень (від 0,73 см в першому випадку до 0,55 см — в другому). Зрозуміло, що при подальшому збільшенні τ_{xy}^∞ режим руйнування буде змінено, але отримати аналітичну умову виявилось досить складним завданням.

Цитована література

1. Park K., Paulino G. H. Cohesive zone models: a critical review of traction-separation relationships across fracture surfaces // Appl. Mech. Reviews. – 2011. – **64**, No 6. – P. 060802.
2. Chew H. B., Hong S., Kim K.-S. Cohesive-zone laws for void growth-I. Experimental field projection of crack-tip crazing in glassy polymers // J. Mech. Phys. Solids. – 2009. – **57**. – P. 1357–1373.
3. Hui C. Y., Ruina A., Long R., Jagota A. Cohesive zone models and fracture // J. Adhesion. – 2011. – **87**. – P. 1–52.
4. Thouless M. D., Sills R. B. The effect of cohesive-law parameters on mixed-mode fracture // Eng. Fract. Mech. – 2013. – **109**. – P. 353–368.
5. Becker W., Gross D. About the Dugdale crack under mixed mode loading // Int. J. Fract. – 1988. – **37**. – P. 163–170.
6. Jin Z.-H., Sun C. T. Cohesive zone modeling of interface fracture in elastic bimaterials // Eng. Fract. Mech. – 2005. – **72**. – P. 1805–1817.

References

1. Park K., Paulino G. H. Appl. Mech. Reviews, 2011, **64**, No 6: 060802.
2. Chew H. B., Hong S., Kim K.-S. J. Mech. Phys. Solids, 2009, **57**: 1357–1373.
3. Hui C. Y., Ruina A., Long R., Jagota A. J. Adhesion, 2011, **87**: 1–52.
4. Thouless M. D., Sills R. B. Eng. Fract. Mech., 2013, **109**: 353–368.
5. Becker W., Gross D. Int. J. Fract., 1988, **37**: 163–170.
6. Jin Z.-H., Sun C. T. Eng. Fract. Mech., 2005, **72**: 1805–1817.

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України, Київ

Надійшло до редакції 26.12.2014

М. Ф. Селиванов

Модель тріщини с зоной сцепления при смешанном режиме разрушения

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ

Рассмотрена нагруженная на бесконечности пластина с центральной трещиной смешанного режима разрушения. Для кусочно-линейного закона распределения сил сцепления получено решение для отрывов. Это решение включено в модель трещины со сложной зоной сцепления. Определяющие соотношения для параметров предельного состояния проиллюстрированы численными решениями для двух комбинаций величин растягивающих и сдвиговых внешних усилий.

Ключевые слова: трещина смешанного режима разрушения, модель трещины с зоной сцепления, сложная зона сцепления, закон сцепления-отрыва.

M. F. Selivanov

A model of crack with cohesive zone for a mixed mode of fracture

S. P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev

The loaded at infinity plate with a central mixed-mode crack is considered. For the piecewise-linear distribution law for cohesive traction, a solution for separations is given and is included in the cohesive zone model with multiple cohesive zone fronts. The governing relationships for critical state parameters are illustrated by numerical solutions for two combinations of the values of tensile and shear external forces.

Keywords: mixed-mode fracture crack, cohesive zone model, complex cohesive zone, traction-separation law.