



УДК 539.3

А. М. Багно

О волнах Лэмба в системе слой идеальной жидкости – упругий слой

(Представлено академиком НАН Украины А. Н. Гузем)

На основании трехмерных линейных уравнений классической теории упругости для твердого тела и линеаризованных уравнений Эйлера для жидкой среды исследовано распространение волн Лэмба в упругом слое, взаимодействующем со слоем идеальной сжимаемой жидкости. Построены дисперсионные кривые для нормальных волн в широком диапазоне частот. Проанализировано влияние толщины слоя жидкости на дисперсию фазовых скоростей мод Лэмба в гидроупругом волноводе как для тонких, так и для толстых жидких и упругих слоев.

Ключевые слова: дисперсия волн, упругий слой, слой идеальной сжимаемой жидкости.

Волны, распространяющиеся вдоль границы контакта упругого слоя и жидкого слоя, относятся к числу обобщений основательно исследованных основных типов поверхностных волн Рэлея, Стоунли, Лява и Лэмба. Обзор работ и анализ результатов, полученных в рамках классической теории упругости и модели идеальной сжимаемой жидкости [1–3], а также с привлечением более общих моделей твердых и жидких сред [4, 5], приведены в [1–5]. В частности, в обзорной работе [4] проанализированы теоретические методы, применяемые для изучения волн Лэмба в анизотропных пластинах. Рассмотренные задачи и результаты, полученные с учетом в телах начальных напряжений и вязкости жидкости, приведены в [5]. Работа [3] посвящена исследованию локализации поверхностных волн в системе упругий слой на жидком полупространстве. При этом проанализировано поведение волн Рэлея, Стоунли и трех высших мод в высокочастотной части спектра. Численно определены величины фазовых скоростей поверхностных волн и трех первых мод высокого порядка при больших значениях волнового числа. Показано, что эффекты упруго-жидкостного взаимодействия и их влияние на фазовые скорости существенно зависят от механических свойств

© А. М. Багно, 2015

жидкости и упругого материала. Вместе с тем значительное практическое использование акустических волн ставит задачу изучения дисперсионных свойств мод Лэмба в гидроупругом волноводе, состоящем из упругого и жидкого слоев, в широком диапазоне частот, охватывающем как длинноволновую, так и коротковолновую части спектра для толщин упругого и жидкого слоев, соизмеримых с длиной волны. В настоящей работе для анализа дисперсионных характеристик мод Лэмба в системе слой жидкости – упругий слой в широком интервале частот используются трехмерные линейризованные уравнения Эйлера для жидкости и линейные уравнения классической теории упругости для твердого тела. При этом предполагается, что жидкость находится в состоянии покоя. В качестве подхода выбраны постановки задач и метод, основанные на применении представлений общих решений уравнений движения идеальной сжимаемой жидкости и упругого тела, полученные в работах [6–10].

Постановка задачи. Рассмотрим задачу о распространении акустических волн в гидроупругой системе, состоящей из слоя идеальной сжимаемой жидкости и упругого слоя. Решение получим с привлечением трехмерных линейных уравнений классической теории упругости для твердого тела и линейризованных уравнений Эйлера для жидкости, находящейся в состоянии покоя. В рамках принятых моделей основные соотношения для системы упругое тело – идеальная сжимаемая жидкость будут иметь вид:

$$\mu \Delta \vec{u} + (\lambda + \mu) \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) - \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = 0, \quad \sigma_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial u_j} + \frac{\partial u_j}{\partial u_i} \right) + \lambda \delta_{ij} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}); \quad (1)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} p = 0, \quad \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \rho^*} = a_0^2, \quad a_0 = \text{const}; \quad (2)$$

$$p_{ij} = -p \delta_{ij}. \quad (3)$$

Здесь введены следующие обозначения: u_i – компоненты вектора перемещений упругого тела; ρ – плотность материала упругого слоя; λ и μ – константы Ламе материала твердого тела; v_i – составляющие вектора возмущений скорости жидкости; ρ^* и p – возмущения плотности и давления в жидкости; ρ_0 и a_0 – плотность и скорость звука в жидкости в состоянии покоя; p_{ij} и σ_{ij} – составляющие напряжений соответственно в жидкости и упругом теле.

Равенства (1) описывают поведение упругого тела. Малые колебания идеальной сжимаемой жидкости, находящейся в состоянии покоя, описывают соотношения (2), (3).

Далее предположим, что упругий слой заполняет объем $-\infty < z_1 < \infty$, $-h_2 \leq z_2 \leq 0$, $-\infty < z_3 < \infty$ и контактирует со слоем идеальной сжимаемой жидкости, занимающим объем $-\infty < z_1 < \infty$, $0 \leq z_2 \leq h_1$, $-\infty < z_3 < \infty$. Будем считать, что внешние силы, действующие на указанные среды, распределены равномерно вдоль оси $0z_3$. Поскольку в этом случае волна, бегущая в направлении оси $0z_1$, и возмущения, ее вызывающие, не зависят от переменной z_3 , задача будет плоской и можно ограничиться изучением процесса распространения волн в плоскости $0z_1z_2$. Следовательно, указанная задача сводится к решению системы уравнений (1)–(3) при следующих граничных условиях:

$$\sigma_{21} \Big|_{z_2=0} = 0, \quad \sigma_{22} \Big|_{z_2=0} = p_{22} \Big|_{z_2=0}, \quad v_2 \Big|_{z_2=0} = \frac{\partial u_2}{\partial t} \Big|_{z_2=0}; \quad (4)$$

$$\sigma_{21} \Big|_{z_2=-h} = 0, \quad \sigma_{22} \Big|_{z_2=-h} = 0, \quad p_{22} \Big|_{z_2=h} = 0. \quad (5)$$

В дальнейшем для решения задачи гидроупругости воспользуемся представлениями общих решений для упругих тел и идеальной сжимаемой жидкости, предложенными в работах [6–10]:

$$u_1 = -\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial z_1 \partial z_2}, \quad u_2 = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda + \mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \chi_1; \quad (6)$$

$$v_1 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_1 \partial t}, \quad v_2 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_2 \partial t}, \quad (7)$$

где введенные потенциалы χ_i являются решениями следующих уравнений:

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \frac{(\lambda + \mu)^2}{\mu(\lambda + 2\mu)} \frac{\partial^4}{\partial z_1^2 \partial z_2^2} \right] \chi_1 = 0; \quad (8)$$

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \right) - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \chi_2 = 0. \quad (9)$$

Для анализа распространения возмущений, гармонично изменяющихся во времени, решения системы уравнений разыскиваются в классе бегущих волн

$$\chi_j = X_j(z_2) \exp[i(kz_1 - \omega t)], \quad j = \overline{1, 2}, \quad (10)$$

где k — волновое число; ω — круговая частота.

Заметим, что выбранный в данной работе класс гармонических волн, являясь наиболее простым и удобным в теоретических исследованиях, не ограничивает общности полученных результатов, поскольку линейная волна произвольной формы, как известно, может быть представлена набором гармонических составляющих. Далее решаются две задачи Штурма–Лиувилля на собственные значения для уравнений движения упругого тела и жидкости, а также находятся соответствующие собственные функции. После подстановки решений в граничные условия (4) и (5) получаем однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно постоянных интегрирования. Исходя из условия существования нетривиального решения, приравнявая определитель системы к нулю, получаем дисперсионное уравнение

$$\det \left\| e_{mn} \left(c, \lambda, \mu, \rho, \rho_0, a_0, \frac{\omega h_1}{c_s}, \frac{\omega h_2}{c_s} \right) \right\| = 0, \quad m, n = \overline{1, 6}, \quad (11)$$

где c — фазовая скорость мод в гидроупругой системе; h_1 — толщина слоя жидкости; h_2 — толщина упругого слоя; c_s ($c_s^2 = \mu/\rho$) — скорость волны сдвига в упругом теле.

Как известно, в неограниченных и полуограниченных телах распространяющиеся волны являются бездисперсионными. Особенностью рассматриваемой упруго-жидкостной системы является наличие не только границы контакта тел, но и двух свободных поверхностей, что приводит к возникновению в исследуемой гидроупругой композиции довольно сложного волнового поля. Обусловлено это взаимодействием на этих граничных поверхностях трех волн: продольной и поперечной в сжимаемом упругом слое, а также продольной в идеальном

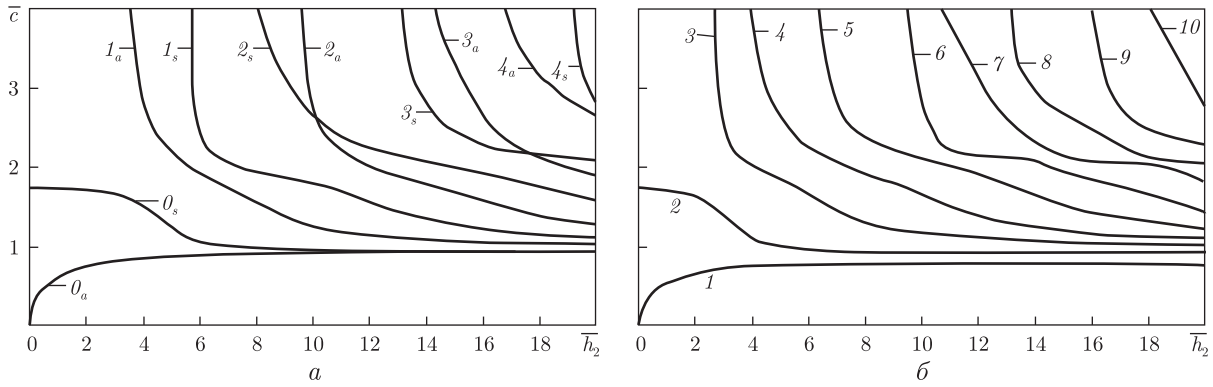


Рис. 1

сжимаемом жидком слое. Возникающие при этом моды распространяются с дисперсией. Их фазовые скорости весьма сложным образом зависят от частоты.

Заметим, что полученное дисперсионное уравнение (11) является наиболее общим и из него можно получить соотношения для ряда частных случаев, которые рассмотрены в работах [1, 2, 5]. В частности, если a_0 устремить к бесконечности, то (11) переходит в уравнение для определения параметров мод в случае взаимодействия с идеальной несжимаемой жидкостью. При $\rho_0 = 0$ равенство (11) перейдет в уравнение для определения скоростей волн Лэмба [1, 2]. Если дополнительно устремить h_2 к бесконечности, получим соотношение для определения скоростей поверхностных волн Рэлея [1, 2]. При $\rho_0 \neq 0$ и $h_1 \rightarrow \infty$ равенство перейдет в уравнение Стоунли [1, 2].

Анализ численных результатов. В дальнейшем дисперсионное уравнение (11) решалось численно. При этом расчеты проводились для системы органическое стекло–вода, которая характеризовалась следующими параметрами: упругий слой — $\rho = 1160 \text{ кг/м}^3$, $\lambda = 3,96 \cdot 10^9 \text{ Па}$, $\mu = 1,86 \cdot 10^9 \text{ Па}$; слой жидкости — $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$, $a_0 = 1459,5 \text{ м/с}$, $\bar{a}_0 = a_0/c_s = 1,1526$. Результаты вычислений представлены на рис. 1–3.

На рис. 1, а для упругого слоя, не взаимодействующего с жидкостью, приведены зависимости безразмерных величин фазовых скоростей нормальных волн Лэмба \bar{c} ($\bar{c} = c/c_s$) от безразмерной величины толщины упругого слоя (частоты) \bar{h}_2 ($\bar{h}_2 = \omega h_2/c_s$). Номерами n_a обозначены антисимметричные моды, а n_s — соответственно симметричные.

На рис. 1, б представлены дисперсионные кривые для гидроупругого волновода, отражающие зависимости безразмерных величин фазовых скоростей мод \bar{c} от безразмерной величины толщины упругого слоя (частоты) \bar{h}_2 для тонкого жидкого слоя толщиной $\bar{h}_1 = 2$ ($\bar{h}_1 = \omega h_1/c_s$).

Из графиков на рис. 1, а следует, что скорость нулевой антисимметричной моды Лэмба при росте частоты или толщины упругого слоя стремится к скорости волны Рэлея ($\bar{c}_R = c_R/c_s = 0,93356$) снизу, а скорость нулевой симметричной моды — к скорости волны Рэлея ($\bar{c}_R = 0,93356$) сверху. Скорости всех мод Лэмба высокого порядка при увеличении частоты или толщины упругого слоя стремятся к скорости волны сдвига в материале упругого тела [1, 4].

Графики, приведенные на рис. 1, б, показывают, что в случае взаимодействия упругого слоя с тонким жидким слоем ($\bar{h}_1 = 2$) при росте толщины упругого слоя (частоты) \bar{h}_2 скорость первой моды Лэмба стремится к скорости волны Стоунли ($\bar{c}_{st} = c_{st}/c_s = 0,77740$) снизу, скорость второй моды — к скорости волны Рэлея ($\bar{c}_R = 0,93356$)

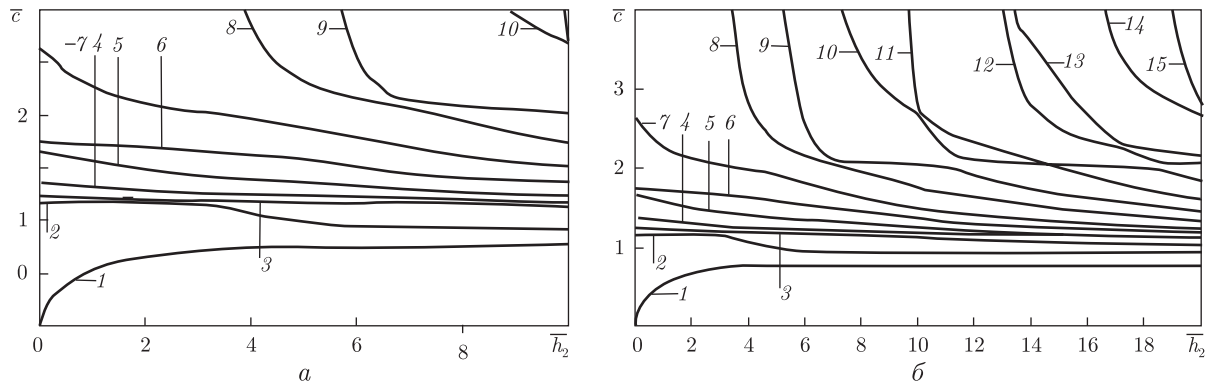


Рис. 2

сверху. Скорости всех мод Лэмба высокого порядка стремятся к скорости распространения волны сдвига в материале упругого тела. Кроме того, наличие тонкого слоя жидкости приводит к смещению критических частот мод в сторону длинноволновой части спектра.

На рис. 2, *a* представлены дисперсионные кривые для гидроупругого волновода, отражающие зависимости безразмерных величин фазовых скоростей мод Лэмба \bar{c} от безразмерной величины толщины упругого слоя (частоты) \bar{h}_2 для толстого жидкого слоя толщиной $\bar{h}_1 = 20$. На этом рисунке для наглядности приведена длинноволновая низкочастотная часть спектра. Это вызвано существенными качественными и количественными различиями дисперсионных картин для упруго-жидкостных волноводов с тонким и толстым жидким слоем.

Дисперсионные кривые для гидроупругого волновода, отражающие зависимости безразмерных величин фазовых скоростей нормальных волн Лэмба \bar{c} от безразмерной величины толщины упругого слоя (частоты) \bar{h}_2 для толстого жидкого слоя толщиной $\bar{h}_1 = 20$, полученные в широком диапазоне частот, приведены на рис. 2, *б*.

Из рис. 2, *a* следует, что в случае взаимодействия упругого слоя с толстым жидким слоем с $\bar{h}_1 = 20$ жидкость оказывает значительное влияние на волновой процесс в низкочастотной части спектра при малых толщинах упругого слоя. Наличие жидкости приводит к увеличению числа мод Лэмба, распространяющихся в гидроупругой системе. При этом возникающие моды имеют нулевые частоты запираания.

Графики для гидроупругой системы, которые приведены на рис. 2, *б* для случая толстого жидкого слоя с $\bar{h}_1 = 20$, показывают, что в коротковолновой части спектра поведение мод Лэмба аналогично поведению волн в гидроупругом волноводе с тонким слоем жидкости. В этом случае также с ростом частоты или толщины упругого слоя \bar{h}_2 скорость первой моды Лэмба стремится к скорости волны Стоунли ($\bar{c}_{st} = 0,77171$) снизу, скорость второй моды — к скорости волны Рэля ($\bar{c}_R = 0,93356$) сверху. Скорости всех высших мод Лэмба стремятся к скорости распространения волны сдвига в материале упругого тела.

Для возможности проведения сравнительного анализа и выявления особенностей поведения мод, характерных для различных упруго-жидкостных систем, на рис. 3, *a*, *б* приведены дисперсионные кривые для двух гидроупругих волноводов, состоящих из тонкого упругого слоя толщиной $\bar{h}_2 = 2$ и толстого упругого слоя толщиной $\bar{h}_2 = 10$, а также слоя жидкости, толщина которого \bar{h}_1 изменяется в широком интервале.

На рис. 3, *a* представлены дисперсионные кривые для гидроупругого волновода, отражающие зависимости безразмерных величин фазовых скоростей нормальных волн \bar{c} от безраз-

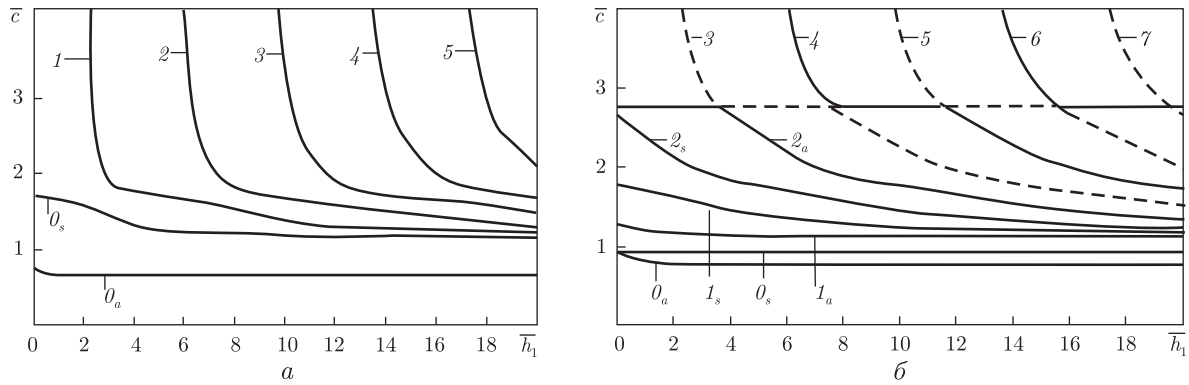


Рис. 3

мерной величины толщины слоя идеальной сжимаемой жидкости \bar{h}_1 для тонкого упругого слоя толщиной $\bar{h}_2 = 2$.

Дисперсионные кривые для гидроупругого волновода, отражающие зависимости безразмерных величин фазовых скоростей мод \bar{c} от безразмерной величины толщины слоя жидкости \bar{h}_1 для толстого упругого слоя толщиной $\bar{h}_2 = 10$, приведены на рис. 3, б.

Графики на рис. 3, а показывают, что при росте толщины жидкого слоя \bar{h}_1 скорость нулевой антисимметричной моды 0_a стремится к величине (0,6708), которая меньше скорости волны Стоунли ($\bar{c}_{st} = 0,77171$). Скорости нулевой симметричной моды 0_s и всех высших мод 1–5, порождаемых слоем жидкости, стремятся к скорости распространения звука в жидкой среде ($\bar{a}_0 = a_0/c_s = 1,1526$). При этом механические параметры гидроупругого волновода такие, что ($\bar{a}_0 = 1,1526 > \bar{c}_s$).

Графики для гидроупругой системы, которые приведены на рис. 3, б для случая толстого упругого слоя с $\bar{h}_2 = 10$, показывают, что при росте толщины жидкого слоя \bar{h}_1 скорость нулевой антисимметричной моды стремится к скорости волны Стоунли ($\bar{c}_{st} = 0,77171$), а скорость нулевой симметричной моды — к скорости волны Рэлея ($\bar{c}_R = 0,93356$). При увеличении толщины жидкого слоя скорость первой антисимметричной моды стремится к скорости волны, величина которой (1,1318) меньше скорости распространения звука в жидкости ($\bar{a}_0 = 1,1526$). Фазовые скорости всех высших мод стремятся к скорости распространения звука в жидкой среде ($\bar{a}_0 = 1,1526$). При этом механические параметры гидроупругого волновода такие, как и в случае тонкого твердого слоя ($\bar{a}_0 = 1,1526 > \bar{c}_s$).

Из графиков, представленных на рис. 1, б и 2, б, нетрудно видеть, что дисперсионные свойства нормальных волн Лэмба при взаимодействии упругого слоя с тонким и толстым слоем жидкости существенно отличаются в длинноволновой части спектра. В высокочастотной части спектра для выбранных механических параметров гидроупругой системы, при которых скорость волны звука в жидкости больше скорости рэлеевской волны на поверхности твердого тела ($\bar{a}_0 > \bar{c}_R$), поведение волн, порождаемых жидкостью, в меньшей мере зависит от толщины жидкого слоя [11]. В этом случае определяющим является твердое тело и глубина проникновения квазиповерхностной моды 1 в упругий слой значительно больше глубины проникновения в жидкость. В связи с этим мода 1, распространяясь вдоль границы контакта сред, локализуется преимущественно в приповерхностной области упругого слоя. Квазирэлеевская мода 2 локализуется и распространяется вдоль свободной поверхности упругого слоя. Моды высокого порядка распространяются в упругом слое по всей его толщине со скоростью поперечной волны в материале твердого тела. Из этого следует, что

в данных волноводах при выбранных механических параметрах гидроупругой системы все без исключения моды Лэмба распространяются в упругом слое.

Приведенный на рис. 3, а, б графический материал непосредственно свидетельствует о том, что в гидроупругом волноводе с выбранными механическими параметрами системы $\bar{a}_0 = 1,1526 > \bar{c}_R = 0,93356$ [11] и твердым слоем произвольной заданной фиксированной толщины \bar{h}_2 при увеличении толщины жидкого слоя \bar{h}_1 все моды локализируются и распространяются в упругом слое. При этом скорости мод высокого порядка стремятся к скорости распространения звука в жидкости, которая при данных механических параметрах системы превышает скорость волны сдвига в твердом теле ($\bar{a}_0 = 1,1526 > \bar{c}_s$).

Цитированная литература

1. *Викторов И. А.* Звуковые поверхностные волны в твердых телах. – Москва: Наука, 1981. – 288 с.
2. *Белянкова Т. И., Калинин В. В.* К проблеме анализа динамических свойств слоистого полупространства // Акуст. журн. – 2014. – **60**, № 5. – С. 492–504.
3. *Гринченко В. Т., Комиссарова Г. Л.* Поверхностные волны в системе: упругий слой на жидком полупространстве // Акуст. вісн. – 2005. – **8**, № 4. – С. 38–45.
4. *Кузнецов С. В.* Волны Лэмба в анизотропных пластинах (обзор) // Акуст. журн. – 2014. – **60**, № 1. – С. 90–100.
5. *Vagno A. M., Guz A. N.* Elastic waves in pre-stressed bodies interacting with a fluid (survey) // Int. Appl. Mech. – 1997. – **33**, No 6. – P. 435–463.
6. *Guz A. N.* Aerohydroelasticity problems for bodies with initial stresses // Int. Appl. Mech. – 1980. – **16**, No 3. – P. 175–190.
7. *Гузь А. Н.* Упругие волны в телах с начальными напряжениями. В 2-х т. – Киев: Наук. думка, 1986. – 372 с.
8. *Гузь А. Н.* Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. – Киев: А. С. К., 2004. – 672 с.
9. *Гузь А. Н.* Динамика сжимаемой вязкой жидкости. – Киев: А. С. К., 1998. – 350 с.
10. *Guz A. N.* Dynamics of compressible viscous fluid. – Cambridge: Cambridge Sci. Publ., 2009. – 428 p.
11. *Волькенштейн М. М., Левин В. М.* Структура волны Стоунли на границе вязкой жидкости и твердого тела // Акуст. журн. – 1988. – **34**, № 4. – С. 608–615.

References

1. *Viktorov I. A.* Sound surface waves in solids, Moscow: Nauka, 1981 (in Russian).
2. *Belyankova T. I., Kalinchuk V. V.* Acoustic J., 2014, **60**, No 5: 492–504 (in Russian).
3. *Grinchenko V. T., Komissarova G. L.* Acoustic bulletin, 2005, **8**, No 4 (in Russian).
4. *Kuznetsov S. V.* Acoustic J., 2014, **60**, No 1: 90–100 (in Russian).
5. *Vagno A. M., Guz A. N.* Int. Appl. Mech., 1997, **33**, No 6: 435–463.
6. *Guz A. N.* Int. Appl. Mech., 1980, **16**, No 3: 175–190 (in Russian).
7. *Guz A. N.* Elastic waves in bodies with initial stresses. In 2 vols., Kiev: Naukova Dumka, 1986 (in Russian).
8. *Guz A. N.* Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses, Kiev: A. C. K., 2004 (in Russian).
9. *Guz A. N.* Dynamics of compressible viscous fluid, Kiev: A. C. K., 1998 (in Russian).
10. *Guz A. N.* Dynamics of compressible viscous fluid, Cambridge: Cambridge Sci. Publ., 2009.
11. *Volkenstein M. M., Levin V. M.* Acoustic J., 1988, **34**, No 4: 608–615 (in Russian).

*Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев*

Поступило в редакцию 15.01.2015

О. М. Багно

Про хвилі Лемба у системі шар ідеальної рідини – пружний шар

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ

На основі тривимірних лінійних рівнянь класичної теорії пружності для твердого тіла та лінеаризованих рівнянь Ейлера для рідкого середовища досліджено поширення хвиль Лемба у пружному шарі, що взаємодіє з шаром ідеальної стисливої рідини. Побудовано дисперсійні криві для нормальних хвиль у широкому діапазоні частот. Проаналізовано вплив товщини шару рідини на дисперсію фазових швидкостей мод Лемба у гідропружному хвилеводі як для тонких, так і для товстих рідких та пружних шарів.

Ключові слова: дисперсія хвиль, пружний шар, шар ідеальної стисливої рідини.

O. M. Bahno

On Lamb waves in the system: an ideal fluid layer – an elastic layer

S. P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev

Basing on the three-dimensional linear equations of the classical theory of elasticity for a solid and on the linearized Euler equations for a fluid, the propagation of Lamb waves in an elastic layer that interacts with the layer of an ideal compressible fluid is studied. For the normal waves, the dispersion curves in a wide range of frequencies are constructed. The effect of the fluid layer thickness on the dispersion of the phase velocities of Lamb modes in a hydroelastic waveguide is analyzed for both thin and thick fluid and elastic layers.

Keywords: dispersion of waves, elastic layer, layer of ideal compressible fluid.