

Н. В. Никитина

О характеристических показателях Ляпунова

*(Представлено академиком НАН Украины А. А. Мартынюком)**Приведен подход к нахождению характеристических показателей Ляпунова в задачах хаотических движений. Подход основан на анализе бифуркаций точек траектории.***Ключевые слова:** нелинейная система, бифуркация, орбитальная неустойчивость, странный аттрактор.

Известно, что все траектории хаотического аттрактора неустойчивы по Ляпунову. Поэтому хотя бы один характеристический показатель Ляпунова (ХПЛ) должен быть положительным [1]. Ряд основополагающих работ по динамике хаотических систем предполагают вычисление ХПЛ по алгоритму Бенеттина и др. [1–3]. В данной работе предложен один подход к вычислению характеристических показателей (ХП) точек. Подход связан с анализом бифуркаций точек траектории. Именно этот анализ дает основание для выбора интервала времени, на котором проводятся вычисления для установления положительного знака ХП точек. В простом случае устанавливается отрицательный знак ХПЛ. Нерегулярность появления на траектории последовательности точек с положительной седловой величиной свидетельствует об орбитальной неустойчивости траектории.

Постановка задачи. Рассматривается система

$$\frac{dx}{dt} = F(x), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

где $F(x)$ — гладкая функция, определенная на некотором подмножестве. Введем в рассмотрение малое отклонение δx_i ($i = 1, 2, \dots, n$) в окрестности частных решений $\bar{x}_i(t)$ уравнений (1) $\delta x_i = x_i(t) - \bar{x}_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Примем δx_i в качестве новых координат. Для линейной системы $d\delta x/dt = \mathcal{A}(\bar{x})\delta x$, $\delta x \in \mathbb{R}^n$, где $\mathcal{A}(\bar{x}) = \partial F/\partial x|_{x=\bar{x}}$, соответствующей системе (1), которая называется *системой уравнений в вариациях* [4], составим характеристическое уравнение $f(\lambda, \bar{x}) = 0$ матрицы $\mathcal{A}(\bar{x})$. Введем характеристические показатели нетривиальных решений $\Lambda_j = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} [t^{-1} \ln \|x_j(t)\|]$ ($j = 1, 2, \dots, n$), где $x_j(t) - j$ -е фундаментальное решение системы; $\|0\|$ — норма. Числа Λ_j называются обобщенными характеристическими показателями произвольной системы. Для системы в вариациях, описывающей эволюцию возмущений δx вблизи частного решения $\bar{x}(t)$ нелинейной системы, совокупность Λ_j называют характеристическими показателями Ляпунова частного решения $\bar{x}(t)$. С помощью характеристического уравнения системы в вариациях можно получить характеристические показатели любой точки n -мерного пространства системы (1), включая особые точки.

В данной работе приведен подход, при помощи которого можно установить качество траектории аттрактора. Этот подход аналогичен подходу Бенеттина и др. [3]. Но как алгоритм Бенеттина, так и данный подход *не утверждают существование аттрактора*, а лишь помогают установить существование положительного ХП на некотором промежутке времени.

О существовании аттрактора. Вопрос освещался в работе [5]. Утверждение о существовании аттрактора должно содержать информацию о том, что круговая траектория находится в окрестности нуля и не уходит на ∞ . Для трехмерной системы вида (1) сделаем следующие предположения.

Предположение 1. Система (1) имеет одну особую точку седлофокус с характеристическими показателями $\operatorname{Re} \lambda_1 > 0$, $\operatorname{Re} \lambda_2 > 0$, $\lambda_3 < 0$ с положительной седловой величиной $\sigma = \operatorname{Re} \lambda_1 + \operatorname{Re} \lambda_2 + \lambda_3 > 0$.

Предположение 2. На одной координатной плоскости система (1), относительно особой точки, имеет круговую траекторию, которой соответствуют возрастающие колебания. На другой координатной плоскости отображаются затухающие колебания, так что затухание преобладает над возрастанием. На третьей переменной не связаны между собой и не вызывают неустойчивости.

Утверждение. Пусть для дифференциальной системы (1) выполняются условия предположений 1, 2. Тогда в окрестности особой точки (седлофокус) образуется аттрактор.

Пример 1. Рассмотрим пример изучения процесса бифуркаций в задаче динамики генератора, блок-схема которого состоит из селективного элемента (например, колебательного контура) и усилителя.

Генератор с экспоненциальной инерционной нелинейностью в виде безразмерной системы приведен в [2]

$$\frac{dx}{dt} = mx - xz + y, \quad \frac{dy}{dt} = -x, \quad \frac{dz}{dt} = -b(z - e^x + 1). \quad (2)$$

Системе (2) соответствует колебательный контур

$$\ddot{x} - (m - z)\dot{x} + (\dot{z} + 1)x = 0. \quad (3)$$

Инерционный преобразователь представлен уравнением $\dot{z} = -b(z - e^x + 1)$. Введем в рассмотрение малое отклонение в окрестности решений \bar{x}_i ($i = 1, 2, 3$): $\delta x_i = x_i(t) - \bar{x}_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$). Рассмотрим δx_i в качестве новых координат. Система в координатах δx_i примет следующий вид:

$$\frac{d\delta x}{dt} = (m - \bar{z})\delta x + \delta y - \bar{x}\delta z, \quad \frac{d\delta y}{dt} = -\delta x, \quad \frac{d\delta z}{dt} = -b(\delta z - e^{\bar{x}}\delta x). \quad (4)$$

Характеристическое уравнение системы (4) имеет вид

$$\lambda^3 + \lambda^2(b + \bar{z} - m) + \lambda(b(\bar{z} - m) + be^{\bar{x}} + 1) + b = 0. \quad (5)$$

Корни, соответствующие особой точке $O(0, 0, 0)$, систем (2) равны $\lambda_{1,2} = m/2 \pm \sqrt{(m/2)^2 - 1}$, $\lambda_3 = -b$. Для значений параметров $0 < m < 2$; $b = 0, 2$ корни λ_1, λ_2 — комплексные.

На рис. 1, а приведена сепаратриса, которая разделяет плоскость бифуркаций xz генератора с экспоненциальной нелинейностью. Точки, лежащие ниже сепаратрисы, соответствуют положительным значениям действительной части комплексных корней. Корни на сепаратрисе такие: $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_3 < 0$. Пунктиром на рис. 1, б обозначены разделяющие кривые, на которых комплексные корни становятся действительными. На верхней ветви — $\lambda_{1,2} < 0$, $\lambda_3 < 0$ (здесь и далее значения параметров $(m, b) = (1; 0, 2)$). На нижней ветви — $\lambda_{1,2} > 0$, $\lambda_3 < 0$. Поле сечения xz несимметрично. Это порождает несимметричную область,

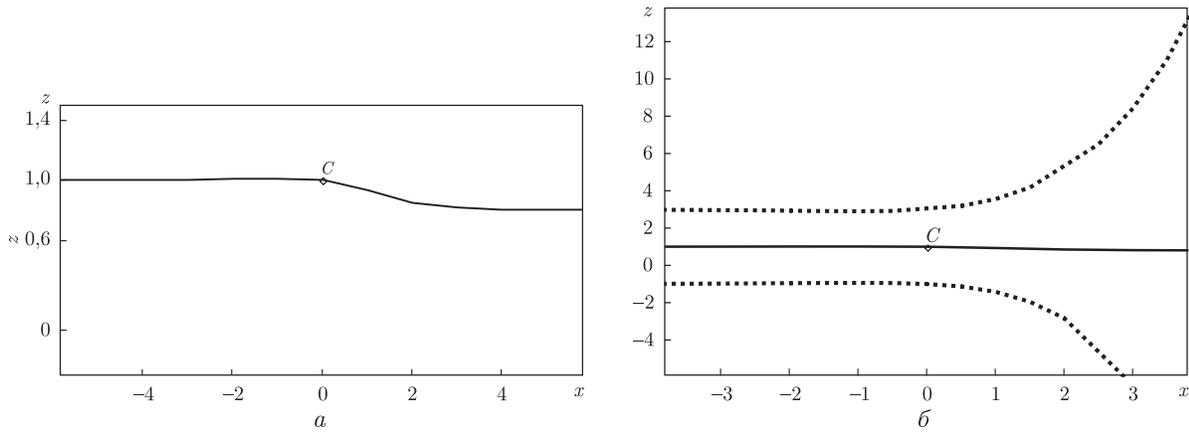


Рис. 1

во внутрь которой могут втягиваться траектории при образовании аттрактора. Более подробно построение сепаратрис приведено в работе [6].

Вернемся к утверждению о существовании аттрактора. Рассмотрим плоскость xy . На плоскости имеет место круговая траектория, определяемая колебательным контуром $\ddot{x} - m\dot{x} + x = 0$ с характеристическими показателями

$$\lambda_{1,2} = \frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{m}{2} - 1}. \quad (6)$$

На плоскости yz переменные не связаны между собой. На плоскости xz имеют место уравнения $\dot{x} = mx - xz$, $\dot{z} = -b(z - e^x + 1)$, которые имеют особую точку A с координатами $x = x_0$, $z = m$, где x_0 определяется из выражения $e^{x_0} = m + 1$. Свяжем с точкой A систему координат $A\chi\zeta$ и составим уравнения в вариациях $\delta\dot{\chi} = -x_0\delta\zeta - \bar{\chi}\delta\zeta - \bar{\zeta}\delta\chi$, $\delta\dot{\zeta} = -b(\delta\zeta - e^{\bar{\chi}}\delta\chi)$. Корни характеристического уравнения имеют вид $\lambda_{1,2} = -(b + \bar{\zeta})/2 \pm (1/2)\sqrt{(b + \bar{\zeta})^2 - 4be^{\bar{\chi}}(x_0 + \bar{\chi})}$. Колебательный контур (3) создает круговую траекторию, которая попадает либо в плоскость xy , либо в плоскость xz . В первом случае движение не ограничивается сверху. Во втором случае в окрестности точки A имеет место притяжение. Величина $b + \bar{\zeta}$ при $\bar{\zeta} > 0$ удовлетворяет неравенству $\bar{\zeta} > m/2$, тогда, принимая во внимание (6), можно утверждать, что диссипативная составляющая на плоскости xz не позволит изображающей точки уходить на ∞ . На рис. 1, б видно, что при $\bar{\chi} > 0$; $\bar{\zeta} > 0$ увеличивается область, которая ограничивает сверху рост круговой траектории системы (2).

Таким образом, решения системы (2) ограничены сверху и траектория не уходит на ∞ .

Вычисление ХП точек на конечном интервале времени. Численное решение системы (1) подставляется в уравнение в вариациях и в характеристическое уравнение. Последнее дает возможность определить точки, в которых решение бифурцирует и изменяет качество. Создается картина, как меняется знак и качество ХП. Это помогает установить интервалы времени, которые связаны с периодом колебаний и знаком интегральной суммы величин $\sigma_j = \lambda_{1j} + \lambda_{2j} + \lambda_{3j}$ в j -х точках траектории.

Для аттрактора с одной особой точкой путь к хаосу может лежать через бифуркации кратного увеличения периода. На рис. 2, а приведена временная реализация предельного цикла при значении параметров $(m, b) = (0,7; 0,2)$. При увеличении параметра m $(m, b) = (0,93; 0,2)$, который связан с отрицательной диссипацией колебательного контура (3),

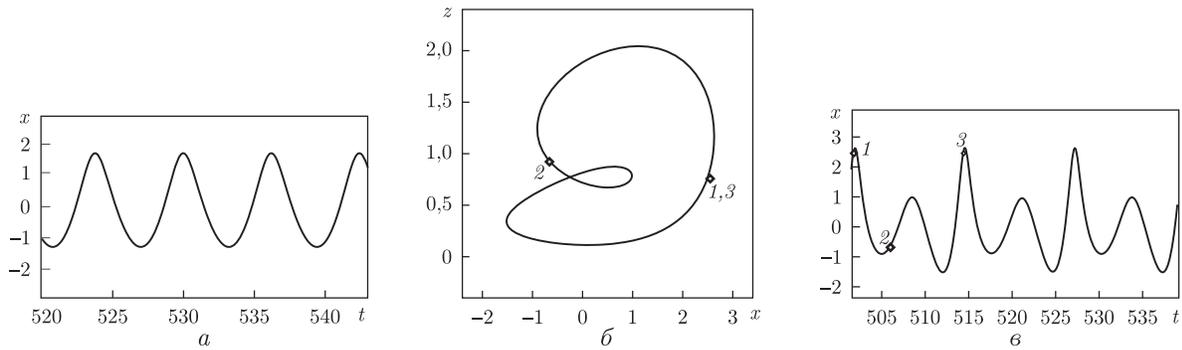


Рис. 2

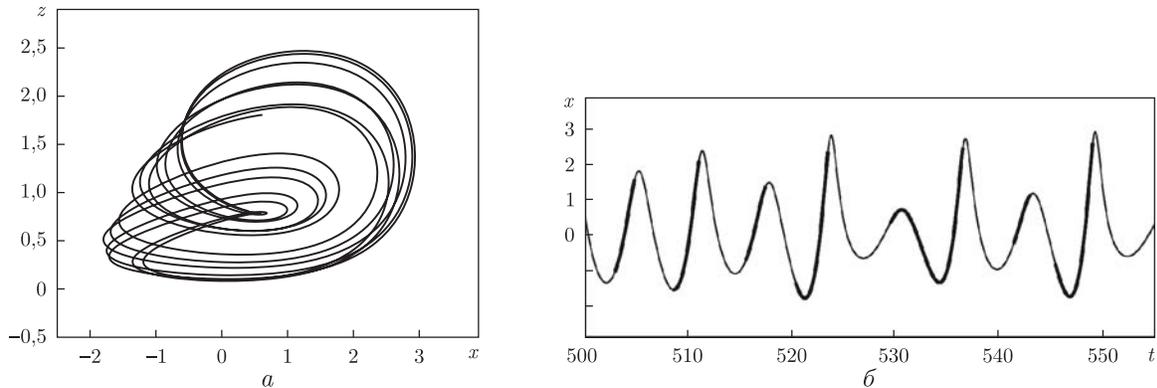


Рис. 3

увеличиваются размахи колебаний. Траектория сохраняет периодичность и увеличивает период в два раза (см. рис. 2, б, в). На рис. 2, б от точки 1 до точки 2 (против часовой стрелки) все точки узлофокусные, характеристические показатели $\text{Re } \lambda_{1,2} < 0$, $\lambda_3 < 0$; от точки 2 до точки 3 все точки седлофокусные, характеристические показатели $\text{Re } \lambda_{1,2} > 0$, $\lambda_3 < 0$; ХПЛ — $(0, -, -)$.

При значениях параметров $(m, b) = (1; 0,2)$ траектория хаотична (рис. 3, а, б). Периодичность колебаний сохраняется (см. рис. 3, б). Жирной линией отмечены интервалы, точки которых имеют седлофокусную характеристику: $\text{Re } \lambda_{1,2} > 0$, $\lambda_3 < 0$; сумма седловых величин $\sigma_j = \lambda_{1j} + \lambda_{2j} + \lambda_{3j}$ равна $S^+ > 0$ (см. рис. 3, б). Тонкой линией обозначены участки траектории, заполненные седлофокусными и узлофокусными точками с $\sigma_j < 0$. Чередование седлофокусных точек с положительным значением σ носит нерегулярный характер, что порождает неустойчивую орбиту (см. рис. 3, а). Чередование наблюдалось на интервале $t = 1300$.

Орбитальная неустойчивость в системе с тремя особыми точками. Представим матрицу $\mathcal{A}(\bar{x})$ системы уравнений в вариациях в виде суммы двух матриц $\mathcal{A}(\bar{x}) = N + M(\bar{x})$, где матрица N соответствует спектру линейной системы уравнений в вариациях, не содержащей частных решений. Матрица $M(\bar{x})$ соответствует той части спектра уравнений в вариациях, которая содержит частные решения $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$. Сделаем о системе (1) следующие предположения.

Предположение 3. Система (1) имеет три особых точки. Особая точка $O(0, 0, 0)$ — седлоузел с отрицательной величиной (седловой) $\sigma = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 < 0$, где $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 <$

< 0 , $\lambda_3 < 0$. Существует окрестность точки O , заполненная седлоузловыми точками в соответствии с теоремой Гробмана–Хартмана [4].

Относительно матрицы $M(\bar{x})$ сделаем следующее предположение.

Предположение 4. Характеристическое уравнение матрицы $M(\bar{x})$ имеет такие собственные значения: одно нулевое и два мнимых. Сумма собственных значений равна нулю: $\bar{\lambda}_1(\bar{x}) + \bar{\lambda}_2(\bar{x}) + \bar{\lambda}_3(\bar{x}) = 0$.

Теорема 1. Пусть для динамической системы (1) выполняются условия предположений 3, 4. Тогда седловая величина σ , полученная в соответствии с определенными значениями параметров, будет одинаковой для всех точек трехмерного пространства, включая все особые точки.

Доказательство. При выполнении условий предположения 3, 4 седловая величина точек на траектории определяется матрицей $A(\bar{x})$ из уравнения $|A(\bar{x}) - \lambda E| = |N - \lambda E| = 0$, где E — единичная матрица. Окрестность, заполненная седлоузловыми точками, так что $\sigma = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 < 0$, может переходить в континуум иного качества. Величина $\sigma = \text{Re } \lambda_1 + \text{Re } \lambda_2 + \lambda_3 < 0$ определяется корнями линейной системы, тогда $\sigma_O = \sigma_A = \sigma_B = \sigma_j$, где σ_j — величины любых точек, включая особые A, B .

Пример 2. Рассмотрим систему Лоренца

$$\frac{dx}{dt} = s(-x + y), \quad \frac{dy}{dt} = rx - y - xz, \quad \frac{dz}{dt} = -bz + xy, \quad (7)$$

где b, r, s — положительные параметры ($r > 1$). Введем малые отклонения $\delta x, \delta y, \delta z$ в системе (7) от частных решений $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ и составим уравнения в вариациях

$$\delta \dot{x} = -s\delta x + s\delta y, \quad \delta \dot{y} = (r - \bar{z})\delta x - \delta y - \bar{x}\delta z, \quad \delta \dot{z} = -b\delta z + \bar{y}\delta x + \bar{x}\delta y. \quad (8)$$

Система (7) имеет следующие особые точки: $O(0, 0, 0)$, $A(\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1)$, $B(-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1)$. Из характеристического уравнения системы (8)

$$\lambda^3 + \lambda^2(b + s + 1) + \lambda(s(1 - r + \bar{z}) + b(s + 1) + \bar{x}^2) + s(b(1 - r + \bar{z}) + \bar{x}(\bar{x} + \bar{y})) = 0 \quad (9)$$

можно определить характеристические показатели точек в поле трехмерного пространства системы (7). В точке O уравнение (9) принимает вид $(\lambda + b)(\lambda^2 + \lambda(1 + s) + s(1 - r)) = 0$, из которого находим $\lambda_{1,2} = -(s + 1)/2 \pm \sqrt{((s + 1)/2)^2 + s(r - 1)}$, $\lambda_3 = -b$. Запишем матричное равенство на основе уравнений в вариациях (8)

$$\begin{pmatrix} -s & s & 0 \\ r - \bar{z} & -1 & -\bar{x} \\ \bar{y} & \bar{x} & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s & s & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\bar{z} & 0 & -\bar{x} \\ \bar{y} & \bar{x} & 0 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

В левой части равенства (10) находится матрица системы в вариациях (8). Первая матрица в правой части равенства (10) представляет спектр линейной системы, соответствующей системе (8). Вторая матрица $M(\bar{x})$ соответствует той части уравнений (8), которая содержит частные решения $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ и имеет корни характеристического уравнения: $\bar{\lambda}_{1,2} = \pm i\sqrt{\bar{x}^2}$, $\bar{\lambda}_3 = 0$.

Рассмотрим систему (7) при следующих значениях параметров: $(b, r, s) = (8/3; 28; 10)$. Особая точка O — седлоузел. Согласно теореме 1, седловая величина будет одинаковой для всех точек ($\sigma = -(s + 1) - b$), включая особые точки O, A, B ($\sigma = -(s + 1) - b$). Известно, что приведенные значения параметров порождают хаотическую траекторию [1].

Свяжем с особыми точками A, B системы координат $Au_1u_2u_3, Bv_1v_2v_3$ и запишем уравнения (7) в новых координатах

$$\begin{aligned}\frac{du_1}{dt} &= -su_1 + su_2, & \frac{du_2}{dt} &= u_1 - u_2 - \sqrt{b(r-1)}u_3 - u_1u_3, \\ \frac{du_3}{dt} &= \sqrt{b(r-1)}u_1 + \sqrt{b(r-1)}u_2 - bu_3 + u_1u_2; \\ \frac{dv_1}{dt} &= -sv_1 + sv_2, & \frac{dv_2}{dt} &= v_1 - v_2 + \sqrt{b(r-1)}v_3 - v_1v_3, \\ \frac{dv_3}{dt} &= -\sqrt{b(r-1)}v_1 - \sqrt{b(r-1)}v_2 - bv_3 + v_1v_2.\end{aligned}$$

Составим системы в вариациях

$$\begin{aligned}\delta\dot{u}_1 &= -s\delta u_1 + s\delta u_2, & \delta\dot{u}_2 &= (1 - \bar{u}_3)\delta u_1 - \delta u_2 - (\sqrt{b(r-1)} + \bar{u}_1)\delta u_3, \\ \delta\dot{u}_3 &= (\sqrt{b(r-1)} + \bar{u}_2)\delta u_1 + (\sqrt{b(r-1)} + \bar{u}_1)\delta u_2 - b\delta u_3; \\ \delta\dot{v}_1 &= -s\delta v_1 + s\delta v_2, & \delta\dot{v}_2 &= (1 - \bar{v}_3)\delta v_1 - \delta v_2 - (-\sqrt{b(r-1)} + \bar{v}_1)\delta v_3, \\ \delta\dot{v}_3 &= (-\sqrt{b(r-1)} + \bar{v}_2)\delta v_1 + (-\sqrt{b(r-1)} + \bar{v}_1)\delta v_2 - b\delta v_3\end{aligned}$$

и запишем соответствующие характеристические уравнения

$$\begin{aligned}\lambda^3 + \lambda^2(b + s + 1) + \lambda((\bar{u}_1 + \sqrt{b(r-1)})^2 + s + b(s + 1) + s(\bar{u}_3 - 1)) + \\ + sb + s(\bar{u}_1 + \sqrt{b(r-1)})^2 + bs(\bar{u}_3 - 1) - s(\bar{u}_1 + \sqrt{b(r-1)})(-\bar{u}_2 - \sqrt{b(r-1)}) = 0,\end{aligned}\quad (11)$$

$$\begin{aligned}\lambda^3 + \lambda^2(b + s + 1) + \lambda((\bar{v}_1 - \sqrt{b(r-1)})^2 + s + b(s + 1) + s(\bar{v}_3 - 1)) + \\ + sb + s(\bar{v}_1 - \sqrt{b(r-1)})^2 + bs(\bar{v}_3 - 1) - s(\bar{v}_1 + \sqrt{b(r-1)})(-\bar{v}_2 - \sqrt{b(r-1)}) = 0.\end{aligned}\quad (12)$$

Граница, разделяющая плоскость xy на области влияния особых точек A, B , проходит по линии, которая наклонена на угол $\pi/4$ к оси Oy (штриховая линия, рис. 4). Рассмотрим фрагмент вращения траектории относительно особой точки A и переход через границу в область вращения относительно особой точки B . Если точка C принадлежит вращению относительно особой точки A , то характеристические показатели определяются из характеристического уравнения (11) (точка C седлоузловая $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0$). Если точка C принадлежит вращению относительно особой точки B , то характеристические показатели определяются из характеристического уравнения (12) ($\text{Re } \lambda_{1,2} > 0, \lambda_3 < 0$). Седловая величина имеет одинаковую величину и знак. Точки A, B относительно границы симметричны, но траектории не обладают такой симметрией. Например, характер точек $1, 2$ — седлоузловой, точек 3 — C -седлофокусный. Во всех случаях имеем место $\sigma_j = -13,6667$. При переходе из области вращения относительно точки B в область вращения относительно точки A нарушается гладкость функции в точке C и возникает орбитальная неустойчивость. Можно ли считать, что при переходе из одной области в другую формируется положительный ХПЛ?

В данной работе, как и в [7], рассматривается бифуркационный процесс. В примере 1 наблюдается смена нерегулярных интервалов точек с положительными и отрицательными седловыми величинами, что порождает орбитальную неустойчивость и хаос. В простейшем

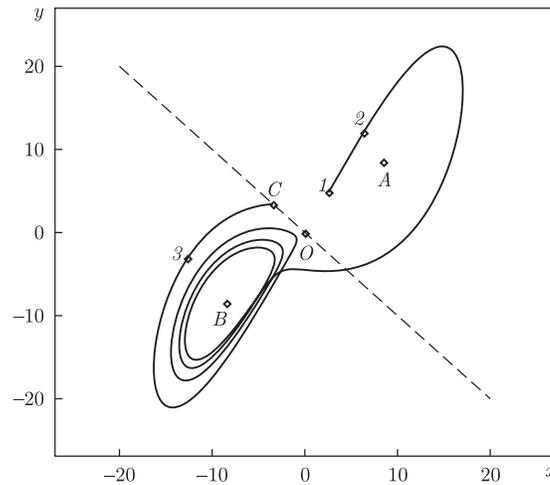


Рис. 4

случае можно указать существование отрицательного ХПЛ. Для вычисления ХПЛ в сложных движениях применяются высокоточные численные методы. При этом может быть обнаружен эффект Перрона [5].

Топологическая особенность системы Лоренца, включая хаотический режим, такая: величина $\sigma_j = \lambda_{1j} + \lambda_{2j} + \lambda_{3j}$ имеет одинаковое значение для всех точек траектории, включая все особые точки.

Цитированная литература

1. *Neimark Yu. I., Landa P. S.* Stochastic and Chaotic Oscillations. – Dordrecht: Kluwer, 1992. – 424 p.
2. *Анищенко В. С.* Сложные колебания в простых системах. – Москва: Наука, 1990. – 312 с.
3. *Benettin G., Galgani I., Strelcyn J. M.* Kolmogorov entropy and numerical experiments // *Phys. Rev. A.* – 1976. – **14**, No 6. – P. 2338–2345.
4. *Shilnikov L. P., Shilnikov A. L., Turaev D. V., Chua L. O.* Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics. Part I. – Singapore: World Scientific, 1998. – 416 p.
5. *Leonov G. A.* Strange Attractors and Classical Stability Theory. – St.-Petersburg: University Press, 2008. – 160 p.
6. *Martynuk A. A., Nikitina N. V.* Bifurcations and Multi-Stability of Vibrations of Three-Dimensional System // *Int. Appl. Mech.* – 2015. – **51**, No 2. – P. 540–541.
7. *Мартынюк А. А., Никитина Н. В.* О периодическом движении и бифуркациях в трехмерных нелинейных системах // *Нелінійні коливання.* – 2014. – **17**, № 2. – С. 268–280.

References

1. *Neimark Yu. I., Landa P. S.* Stochastic and Chaotic Oscillations, Dordrecht: Kluwer, 1992.
2. *Anishchenko V. S.* Complex Oscillations in Simple Systems, Moscow: Nauka, 1990 (in Russian).
3. *Benettin G., Galgani I., Strelcyn J. M.* *Phys. Rev. A.*, 1976, **14**, No 6: 2338–2345.
4. *Shilnikov L. P., Shilnikov A. L., Turaev D. V., Chua L. O.* Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics. Part I., Singapore: World Scientific, 1998.
5. *Leonov G. A.* Strange Attractors and Classical Stability Theory, St.-Petersburg: University Press, 2008.
6. *Martynuk A. A., Nikitina N. V.* *Int. Appl. Mech.*, 2015, **51**, No 2: 540–541.
7. *Martynuk A. A., Nikitina N. V.* *Nonlinear Oscillations*, 2014, **17**, No 2: 268–280.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 05.03.2105

Н. В. Нікітіна

Про характеристичні показники Ляпунова

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ

Наведено підхід до знаходження характеристичних показників Ляпунова в задачах хаотичних рухів. Підхід ґрунтується на аналізі біфуркацій точок траєкторії.

Ключові слова: нелінійна система, біфуркація, орбітальна нестійкість, дивний атрактор.

N. V. Nikitina

About Lyapunov characteristic indices

S. P. Timoshenko Institute of the NAS of Ukraine, Kiev

An approach to finding the Lyapunov characteristic indices is presented for the tasks of chaotic motions. The approach is based on the analysis of the bifurcations of points of a trajectory.

Keywords: nonlinear system, bifurcation, orbital loss of stability, strange attractor.