УДК 517.9

Н. В. Задоянчук

H-розв'язність задачі оптимального керування для виродженої еліптичної варіаційної нерівності

(Представлено академіком НАН України М. О. Перестюком)

Розглянуто задачу оптимального керування для виродженої еліптичної варіаційної нерівності з ваговою функцією потенціального типу, що входить до диференціального оператора. Доведено розв'язність задачі оптимального керування в класі так званих H-допустимих розв'язків. Встановлено властивість замкненості множини H-допустимих пар у добутку топологій простору керувань та простору станів.

Ключові слова: задача оптимального керування, еліптична варіаційна нерівність, вироджена вагова функція потенціального типу, H-допустимий розв'язок, H-оптимальний розв'язок.

У роботі досліджується задача оптимального керування для виродженої еліптичної варіаційної нерівності. Як відомо, при вивченні оптимізаційних задач з таким об'єктом керування можуть виникати такі проблеми, як ефект Лаврентьєва, неєдиність визначення розв'язку варіаційної нерівності і, як наслідок, неєдиність визначення оптимального розв'язку. У роботі [1] вихідна вироджена задача зведена до еквівалентної в певному сенсі задачі в "класичному" соболєвському просторі і обґрунтована її розв'язність у випадку, коли вагова функція є функцією потенціального типу. Аналогічним чином ця проблема вирішується і в роботах [2, 3] для виродженої параболічної варіаційної нерівності. В межах даного дослідження пропонується альтернативний підхід до вивчення проблеми розв'язності згаданої задачі оптимального керування для виродженої еліптичної варіаційної нерівності. А саме, аналогічно [4], де досліджено оптимізаційну задачу для виродженої нелінійної монотонної варіаційної нерівності з керуванням у коефіцієнтах, вводиться до розгляду клас так званих H-допустимих розв'язків. Відтак, в роботі за допомогою прямого варіаційного методу обґрунтовано H-розв'язність оптимізаційної задачі для виродженого об'єкта керування.

1. Основні означення та допоміжні факти. Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geqslant 3)$ — відкрита обмежена область з достатньо регулярною межею $\partial\Omega$ така, що $0 \in \mathbb{R}^N$ є внутрішньою точкою множини Ω. Всюди далі будемо позначати через $C_0^\infty(\Omega)$ локально опуклий простір усіх нескінченно диференційовних функцій з носіями в Ω.

Нехай є заданою функція $\rho\colon \Omega \to \mathbb{R}$ така, що $\rho(x) > 0$ майже скрізь (м. с.) на Ω,

$$\rho \in L^1(\Omega), \qquad \rho^{-1} \in L^1(\Omega), \qquad \nabla \ln \rho \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^N) \qquad \text{і} \qquad \rho + \rho^{-1} \notin L^\infty(\Omega). \tag{1}$$

Всюди далі будемо вважати, що існує замкнена підмножина $\mathcal{O}$ множини Ω така, що

$$\operatorname{dist}(\mathcal{O}, \partial\Omega) = \varepsilon, \qquad \rho > \varepsilon \qquad \text{м.с.} \quad \text{в} \quad \Omega \setminus \mathcal{O} \qquad \text{і} \qquad \rho \in L^\infty(\Omega \setminus \mathcal{O}) \tag{2}$$

для деякого $\varepsilon > 0$. Інакше кажучи, припускається, що умови (1) не є характерними для примежового шару множини Ω.

Вагові простори. Надалі невід'ємну функцію ρ з властивостями (1), (2) називатимемо виродженою ваговою функцією і пов'язуватимемо з нею вагові гільбертові простори $L^2(\Omega, \rho\, dx)$, $L^2(\Omega, \rho^{-1}\, dx)$, для яких $f \in L^2(\Omega, \rho\, dx)$, якщо $\|f\|^2_{L^2(\Omega,\rho\, dx)} = \int\limits_\Omega f^2 \rho\, dx < +\infty$, та $g \in L^2(\Omega, \rho^{-1} dx)$, якщо $\|g\|^2_{L^2(\Omega,\rho^{-1}\, dx)} = \int\limits_\Omega g^2 \rho^{-1}\, dx < +\infty$. Поруч з ваговими гільбертовими просторами розглянемо ваговий простір Соболєва $H(\Omega; \rho\, dx)$ — замикання простору $C_0^\infty(\Omega)$ відносно норми

$$\|y\|_{H(\Omega;\rho\, dx)} := \left(\int\limits_\Omega y^2 \rho\, dx + \int\limits_\Omega |\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N} \rho\, dx\right)^{1/2}.$$

Зауваження 1. У випадку, коли вага $\rho^{-1} \in L^1(\Omega)$, простір $H(\Omega, \rho\, dx)$ неперервно вкладається в простір $W_0^{1,1}(\Omega)$.

Доведення. Дійсно, скориставшись нерівностями Гельдера і Єнсена, отримаємо

$$\|y\|^2_{W_0^{1,1}(\Omega)} = (\|y\|_{L^1(\Omega)} + \|\nabla y\|_{L^1(\Omega)^N})^2 \leqslant C\left(\int\limits_\Omega y^2 \rho\, dx + \int\limits_\Omega |\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N} \rho\, dx\right) = C\|y\|^2_{H(\Omega,\rho\, dx)}.$$

Введемо до розгляду таке поняття (див. [1]).

Означення 1. Будемо казати, що $\rho \colon \Omega \to \mathbb{R}$ є ваговою функцією потенціального типу, якщо ρ задовольняє умови (1), (2) та існує така стала $\widehat{C}(\Omega) > 0$, що виконується нерівність

$$-\widehat{C}(\Omega) \leqslant -\triangle \ln \rho(x) - \frac{1}{2}|\nabla \ln \rho|^2_{\mathbb{R}^N} < \frac{2\lambda_*}{|x|^2_{\mathbb{R}^N}} = \frac{(N-2)^2}{2|x|^2_{\mathbb{R}^N}} \qquad \text{в} \qquad \Omega. \tag{3}$$

У цьому випадку функцію $V(x) = -\triangle \ln \rho(x) - \dfrac{1}{2}|\nabla \ln \rho|^2_{\mathbb{R}^N}$ будемо називати потенціалом Харді для вагової функції ρ.

2. Постановка задачі. Нехай K — непорожня опукла підмножина простору $W_0^{1,2}(\Omega; \rho\, dx)$, яка є секвенційно замкненою відносно збіжності за нормою

$$\|y\|^2_\rho := \int\limits_\Omega y^2 \rho\, dx + \int\limits_\Omega \left|\nabla y + \frac{y}{2}\nabla \ln \rho\right|^2_{\mathbb{R}^N} \rho\, dx. \tag{4}$$

Нехай $y_{ad} \in L^2(\Omega, \rho\, dx)$, $f \in L^2(\Omega, \rho^{-1} dx)$ та $u_0 \in L^2(\Omega, \rho^{-1} dx)$ — задані розподілення, а U_∂ — непорожня опукла замкнена підмножина в $L^2(\Omega, \rho^{-1} dx)$ така, що

$$U_\partial = \{u \in L^2(\Omega, \rho^{-1} dx) \colon \|u - u_0\|_{L^2(\Omega,\rho^{-1} dx)} \leqslant R\}. \tag{5}$$

Всюди далі функції $u \in U_\partial$ розглядаються як допустимі керування.

Розглянемо таку задачу оптимального керування для варіаційної нерівності з керуванням у правій частині:

$$I(u, y) = \frac{1}{2}\|y - y_{ad}\|^2_{L^2(\Omega,\rho\, dx)} \to \inf, \tag{6}$$

$$u \in U_\partial, \qquad y \in K, \tag{7}$$

$$\int_\Omega (\nabla y, \nabla v - \nabla y)_{\mathbb{R}^N} \rho\, dx \geqslant \int_\Omega (f+u)(v-y)\, dx, \qquad \forall v \in K. \tag{8}$$

Пов'яжемо з варіаційною нерівністю (8) лінійний оператор

$$A\colon H(\Omega; \rho\, dx) \to (H(\Omega; \rho\, dx))^*,$$

скориставшись правилом

$$\langle Ay, v\rangle_{H(\Omega;\rho\, dx)} = \int_\Omega (\nabla y, \nabla v)_{\mathbb{R}^N} \rho\, dx \qquad \forall v \in K.$$

Тут

$$\langle \cdot, \cdot\rangle_{H(\Omega;\rho\, dx)}\colon (H(\Omega; \rho\, dx))^* \times H(\Omega; \rho\, dx) \to \mathbb{R}$$

є операцією дуального спарювання елементів з просторів $(H(\Omega; \rho\, dx))^*$ та $H(\Omega; \rho\, dx)$ відповідно. Тоді ясно, що $Ay = -\operatorname{div}(\rho(x)\nabla y)$.

Розглянемо поняття H-розв'язку.

Означення 2. Будемо казати, що функція $y = y(u, f) \in K$ є H-розв'язком вироджendеної варіаційної нерівності (7), (8), якщо нерівність

$$\langle -\operatorname{div}(\rho(x)\nabla y), v - y\rangle_{H(\Omega;\rho\, dx)} \geqslant \langle f, v - y\rangle_{H(\Omega;\rho\, dx)} \tag{9}$$

виконується для довільного $v \in K$.

Зауважимо, що у випадку, коли функція ρ є ваговою функцією потенціального типу в сенсі означення 1, вдається показати існування і єдиність H-розв'язку для нерівності (7), (8), а саме має місце такий результат:

Теорема 1 [1, теорема 2]. *Нехай $\rho\colon \Omega \to \mathbb{R}_+$ є ваговою функцією потенціального типу. Тоді при заданих $f \in L^2(\Omega, \rho^{-1} dx)$ та $u \in U_\partial$ варіаційна нерівність* (7), (8) *має єдиний розв'язок $y = y(u, f) \in K$ такий, що $y = z/\sqrt{\rho}$ і $z \in H_0^1(\Omega)$.*

Розглянемо поняття H-оптимального розв'язку.

Означення 3. Будемо казати, що пара $(u^0, y^0) \in L^2(\Omega; \rho^{-1} dx) \times H(\Omega; \rho\, dx)$ є H-оптимальним розв'язком задачі (6)–(8), якщо $(u^0, y^0) \in \Xi_H$ і $I(u^0, y^0) = \inf\limits_{(u,y)\in\Xi_H} I(u, y)$, де через Ξ_H позначено множину H-допустимих пар задачі (6)–(8), що визначається таким чином:

$$\Xi_H = \{(u, y) \in U_\partial \times H(\Omega; \rho\, dx) \mid y \in K,\ (u, y) \text{ пов'язані співвідношенням (9)}\}.$$

3. Існування H-оптимальних розв'язків. У даному пункті зосередимося на доведенні існування H-оптимального розв'язку задачі (6)–(8). Для початку встановимо важливу топологічну властивість множини H-допустимих розв'язків. Насамперед введемо поняття слабкої топології в просторі $H(\Omega, \rho\, dx)$.

Означення 4. Будемо казати, що послідовність $\{y_k\}_{k\geqslant 1} \subset H(\Omega, \rho\, dx)$ слабко збігається до елемента $y \in H(\Omega, \rho\, dx)$ при $k \to \infty$, якщо дана послідовність обмежена та $y_k \to y$ слабко в $L^2(\Omega, \rho\, dx)$ та $\nabla y_k \to \nabla y$ слабко в $L^2(\Omega, \rho\, dx)^N$, $k \to \infty$.

Зауваження 2. Розглянемо простір X_ρ^2, що є замиканням множини $M = \{(y, \nabla y), y \in C_0^\infty(\Omega)\}$ в $L^2(\Omega, \rho\, dx) \times L^2(\Omega, \rho\, dx)^N$. Його елементами є пари (y, v), де $y \in H(\Omega, \rho\, dx)$ і $v = \nabla y$ — його градієнт. Згідно з [5], простір X_ρ^2 є замкненим з $L^2(\Omega, \rho\, dx) \times L^2(\Omega, \rho\, dx)^N$.

Означення 5. Надалі добуток слабкої топології в $L^2(\Omega, \rho^{-1}dx)$ та слабкої топології в $H(\Omega, \rho\, dx)$ будемо позначати через τ.

Теорема 2. *Нехай $\rho(x) > 0$ — вироджена вагова функція потенціального типу. Тоді для кожного $f \in L^2(\Omega; \rho^{-1}dx)$ множина Ξ_H є секвенційно τ-замкненою.*

Доведення. Нехай $\{(u_k, y_k)\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \Xi_H$ –довільна τ-збіжна послідовність допустимих пар задачі (6)–(8) (внаслідок теореми 1 такий вибір завжди можливий). Нехай $\{(u_0, y_0)\}$ — її τ-границя. Покажемо, що $\{(u_0, y_0)\} \in \Xi_H$.

Оскільки K та U_∂ — опуклі замкнені множини в $H(\Omega; \rho\, dx)$ та $L^2(\Omega; \rho^{-1}dx)$ відповідно, то за лемою Мазура вони є також слабко замкненими. Тому $u_0 \in U_\partial$, $y_0 \in K$. Покажемо, що гранична пара пов'язана співвідношенням (9). Оскільки пара $\{(u_k, y_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ є допустимою для задачі (6)–(8), то

$$\langle -\mathrm{div}(\rho(x)\nabla y_k), y_k - v\rangle_{H(\Omega;\rho\, dx)} \leqslant \langle f + u_k, y_k - v\rangle_{H(\Omega;\rho\, dx)} \qquad \forall v \in K. \tag{10}$$

Далі розглянемо співвідношення

$$\int\limits_\Omega (f + u_k)(y_k - v)\, dx = \int\limits_\Omega f y_k dx - \int\limits_\Omega f v dx + \int\limits_\Omega u_k y_k dx - \int\limits_\Omega u_k v dx = I_1 + I_2 + I_3 + I_4.$$

Проаналізуємо I_3, записавши в такому вигляді:

$$I_3 = \int\limits_\Omega u_k y_k dx \pm \int\limits_\Omega u_k y_0 dx = \int\limits_\Omega u_k(y_k - y_0)\, dx + \int\limits_\Omega u_k y_0 dx.$$

Розглянемо перший доданок в I_3. З урахуванням зауваження 1 та компактного вкладення $W_0^{1,1}(\Omega)$ в $L^1(\Omega)$, отримаємо, що $y_k \to y_0$ в $L^1(\Omega)$. Тому з точністю до підпослідовності $y_k \to y_0$ м. с. в Ω. Отже, $\int\limits_\Omega u_k(y_k - y_0)dx \to 0$, $k \to \infty$. Внаслідок τ-збіжності послідовності $\{u_k, y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ та того факту, що $L^2(\Omega, \rho^{-1}dx)$ є спряженим простором до $L^2(\Omega, \rho\, dx)$ (див. [6]), отримаємо, що $I_1 \to \int\limits_\Omega f y_0 dx$, $I_4 \to -\int\limits_\Omega u_0 v dx$, $\int\limits_\Omega u_k y_0 dx \to \int\limits_\Omega u_0 y_0 dx$ при $k \to \infty$. Тому

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_\Omega (f + u_k)(y_k - v)\, dx = \int\limits_\Omega (f + u_0)(y_0 - v)\, dx. \tag{11}$$

Тепер перейдемо у співвідношенні (10) до границі при $k \to \infty$, скориставшись властивістю напівнеперервності знизу в просторі $L^2(\Omega; \rho\, dx)^N$ відносно слабкої збіжності (див. [4]) та співвідношенням (11). У результаті отримаємо

$$\langle -\mathrm{div}(\rho(x)\nabla y_0), y_0 - v\rangle_{H(\Omega;\rho\, dx)} = \int\limits_\Omega (\nabla y_0, \nabla y_0 - \nabla v)_{\mathbb{R}^N} \rho\, dx =$$

$$= \int\limits_\Omega (\nabla y_0, \nabla y_0)_{\mathbb{R}^N} \rho\, dx - \int\limits_\Omega (\nabla y_0, \nabla v)_{\mathbb{R}^N} \rho\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \varliminf_{k\to\infty} \int\limits_\Omega (\nabla y_k, \nabla y_k)_{\mathbb{R}^N} \rho\, dx - \lim_{k\to\infty} \int\limits_\Omega (\nabla y_k, \nabla v)_{\mathbb{R}^N} \rho\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \varliminf_{k\to\infty}\left(\int\limits_\Omega (\nabla y_k, \nabla y_k)_{\mathbb{R}^N}\rho\,dx - \int\limits_\Omega (\nabla y_k, \nabla v)_{\mathbb{R}^N}\rho\,dx\right) \leqslant$$

$$\leqslant \varliminf_{k\to\infty}\int\limits_\Omega (f+u_k)(y_k - v)\,dx = \lim_{k\to\infty}\int\limits_\Omega (f+u_k)(y_k-v)\,dx =$$

$$= \int\limits_\Omega (f+u_0)(y_0 - v)\,dx = \langle f+u_0, y_0 - v\rangle_{H(\Omega;\rho\,dx)} \qquad \forall v \in K.$$

Отже, τ-гранична пара (u_0, y_0) є H-допустимою для задачі (6)–(8), а тому $(u_0, y_0) \in \Xi_H$.

Теорема 3. *Нехай $\rho(x) > 0$ — вироджена вагова функція потенціального типу. Тоді множина H-оптимальних розв'язків задачі* (6)–(8) *є непорожньою* $\forall f \in L^2(\Omega; \rho^{-1}dx)$.

Доведення. Зауважимо спочатку, що функціонал вартості (6) є τ-напівнеперервним знизу на Ξ_H. Нехай $\{u_k, y_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \Xi_H$ — H–мінімізуюча послідовність задачі (6)–(8), тобто $\lim\limits_{k\to\infty} I(u_k, y_k) = \inf\limits_{(u,y)\in\Xi_H} I(u,y) < +\infty$. З означення множини U_∂ отримуємо, що послідовність $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — обмежена в $L^2(\Omega;\rho^{-1}dx)$. Отже, з точністю до підпослідовності, існує елемент $u^* \in U_\partial$ такий, що $u_k \to u^*$ слабко в $L^2(\Omega;\rho^{-1}dx)$ при $k\to\infty$. Доведемо обмеженість послідовності $\{y_k = y(u_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ у просторі $H(\Omega;\rho\,dx)$. З [1] відомо, що $y \in K$ може бути поданий як $y = z/\sqrt{\rho}$, де $z \in H_0^1(\Omega)$, та

$$\|z\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \int\limits_\Omega y^2\rho\,dx + \int\limits_\Omega |\nabla(\sqrt{\rho}y)|^2_{\mathbb{R}^N}dx. \tag{12}$$

Крім того, в ході доведення теореми 4 із [1] було отримано, що послідовність $\{z_k\}_{k\in\mathbb{R}^N}$ є обмеженою в просторі $H_0^1(\Omega)$. Внаслідок (12) отримуємо, зокрема, обмеженість послідовності $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ у просторі $L^2(\Omega;\rho\,dx)$. Тепер доведемо обмеженість послідовності $\{\nabla y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ у просторі $L^2(\Omega;\rho\,dx)^N$.

Спочатку встановимо таку властивість оператора A:

$$\frac{\langle Ay, y - v_0\rangle_{H(\Omega;\rho\,dx)}}{\|\nabla y\|_{L^2(\Omega;\rho\,dx)^N}} \to +\infty. \tag{13}$$

Дійсно, з означення оператора A отримаємо

$$\langle Ay, y - v_0\rangle_{H(\Omega;\rho\,dx)} \geqslant \|\nabla y\|^2_{L^2(\Omega;\rho\,dx)^N} - \|\nabla y\|_{L^2(\Omega;\rho\,dx)^N}\|\nabla v_0\|_{L^2(\Omega;\rho\,dx)^N}, \tag{14}$$

оскільки

$$|\langle Ay, v_0\rangle_{H(\Omega;\rho\,dx)}| \leqslant \left(\int\limits_\Omega |\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N}\rho\,dx\right)^{1/2}\left(\int\limits_\Omega |\nabla v_0|^2_{\mathbb{R}^N}\rho\,dx\right)^{1/2} =$$

$$= \|\nabla y\|_{L^2(\Omega;\rho\,dx)^N}\|\nabla v_0\|_{L^2(\Omega;\rho\,dx)^N}. \tag{15}$$

Враховуючи (14) та (15), одержимо (13).

Далі, припустимо, що існує підпослідовність $\{\nabla y_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \{\nabla y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ така, що $\|\nabla y_{k_n}\|_{H(\Omega;\rho\,dx)} \to \infty$ при $n\to\infty$, і, скориставшись властивістю (13) оператора A, отримаємо

$$+\infty \leftarrow \frac{\langle Ay_{k_n}, y_{k_n} - v_0\rangle_{H(\Omega;\rho\,dx)}}{\|\nabla y_{k_n}\|_{L^2(\Omega;\rho\,dx)^N}} \leqslant \frac{\int\limits_\Omega (f+u_{k_n})(y_{k_n} - v_0)\,dx}{\|\nabla y_{k_n}\|_{L^2(\Omega;\rho\,dx)^N}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\|f+u_{k_n}\|_{L^2(\Omega;\rho^{-1}dx)}\|y_{k_n}-v_0\|_{L^2(\Omega;\rho\,dx)}}{\|\nabla y_{k_n}\|_{L^2(\Omega;\rho\,dx)^N}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(\|f\|_{L^2(\Omega;\rho^{-1}dx)}+\|u_{k_n}\|_{L^2(\Omega;\rho^{-1}dx)})(\|y_{k_n}\|_{L^2(\Omega;\rho\,dx)}+\|v_0\|_{L^2(\Omega;\rho\,dx)})}{\|\nabla y_{k_n}\|_{L^2(\Omega;\rho\,dx)^N}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(\|f\|_{L^2(\Omega;\rho^{-1}dx)}+\|u_{k_n}\|_{L^2(\Omega;\rho^{-1}dx)})(\|y_{k_n}\|_{L^2(\Omega;\rho dx)}+\|\nabla y_{k_n}\|_{L^2(\Omega;\rho dx)^N}+\|v_0\|_{L^2(\Omega;\rho dx)})}{\|\nabla y_{k_n}\|_{L^2(\Omega;\rho dx)^N}} =$$

$$= (\|f\|_{L^2(\Omega;\rho^{-1}dx)}+\|u_{k_n}\|_{L^2(\Omega;\rho^{-1}dx)})\left(\frac{\|y_{k_n}\|_{L^2(\Omega;\rho\,dx)}}{\|\nabla y_{k_n}\|_{L^2(\Omega;\rho\,dx)^N}}+1+\frac{\|v_0\|_{L^2(\Omega;\rho\,dx)}}{\|\nabla y_{k_n}\|_{L^2(\Omega;\rho\,dx)^N}}\right) \leqslant \overline{C}$$

для довільного фіксованого елемента $v_0 \in H(\Omega;\rho\,dx)$, оскільки множина U_∂ є обмеженою в просторі $L^2(\Omega;\rho^{-1}dx)$. Отримали протиріччя, що доводить обмеженість послідовності $\{\nabla y_k\}_{k\geqslant 1}$ у просторі $L^2(\Omega,\rho\,dx)^N$. Тому, з точністю до підпослідовності, існує елемент $y^* \in H(\Omega,\rho\,dx)$ такий, що $y_k \to y^*$ слабко в $L^2(\Omega;\rho\,dx)$ та $\nabla y_k \to \nabla y^*$ слабко в $L^2(\Omega,\rho\,dx)^N$ (див. зауваження 2) при $k\to\infty$. Оскільки внаслідок теореми 2 множина Ξ_H є секвенційно τ-замкненою, то пара (u^*,y^*) є H-допустимою для задачі (6)–(8). З τ-напівнеперервності знизу функціонала I отримуємо, що $I(u^*,y^*) \leqslant \varliminf\limits_{k\to\infty} I(u_k,y_k) = \inf\limits_{(u,y)\in\Xi_H} I(u,y)$. Отже, (u^*,y^*) є H-оптимальною парою.

Таким чином, у роботі за допомогою прямого варіаційного методу обгрунтовано існування H-оптимального розв'язку для оптимізаційної задачі (6)–(8), об'єктом керування в якій виступає вироджена еліптична варіаційна нерівність. Також показано виконання важливої топологічної властивості множини H-допустимих пар — замкненість у добутку топологій простору керувань і простору станів, адже саме серед її елементів шукається розв'язок задачі. Загалом, підхід, що базується на введенні H-допустимих розв'язків, є корисним при дослідженні досяжності H-оптимальних розв'язків вироджених задач оптимальними розв'язками невироджених задач.

Цитована література

1. *Задоянчук Н. В., Купенко О. П.* Про розв'язність одного класу задач оптимального керування для вироджених еліптичних варіаційних нерівностей // Журн. обчисл. та прикл. математики. – 2013. – № 4(114). – С. 10–23.
2. *Задоянчук Н. В.* Задача оптимального керування для виродженої параболічної варіаційної нерівності: теорема існування // Журн. обчисл. та прикл. математики. – 2014. – № 1(115). – С. 17–38.
3. *Задоянчук Н. В.* Розв'язність одного класу задач оптимального керування для виродженої параболічної варіаційної нерівності // Вісн. КНУ ім. Тараса Шевченка. Сер. фіз.-мат. науки. – 2014. – Вип. 3. – С. 36–41.
4. *Kupenko O. P.* Optimal Control Problems in Coefficients for Degenerate Variational inequalities of Monotone Type. I. Existence of Optimal Solutions // Журн. обчисл. та прикл. математики. – 2011. – No 3(106). – P. 88–103.
5. *Жиков В. В.* Замечание о соболевских пространствах // Соврем. математика и ее приложения. – 2003. – **10**, № 4. – С. 77–79.
6. *Drabek P., Nicolosi F.* Solvability of degenerate elliptic problems of higher order via Leray-Lions theorem // Hiroshima Math. J. – 1996. – **26**. – P. 79–90.

References

1. *Zadoianchuk N. V., Kupenko O. P.* J. obchisluvalnoi ta prikladnoi matematiki, 2013, No 4 (114): 10–23 (in Ukrainian).
2. *Zadoianchuk N. V.* J. obchisluvalnoi ta prikladnoi matematiki, 2014, No 1(115): 17–38 (in Ukrainian).
3. *Zadoianchuk N. V.* Visnik KNU im. Tarasa Shevchenka, Ser.: fiziko-matematichni nauki, 2014, Iss. 3: 36–41 (in Ukrainian).
4. *Kupenko O. P.* J. obchisluvalnoi ta prikladnoi matematiki, 2011, No 3(106): 88–103.
5. *Zhikov V. V.* Sovremennaya matematika i prilozheniya, 2003, **10**, No 4: 77–79 (in Russian).
6. *Drabek P., Nicolosi F.* Hiroshima Math. J, 1996, **26**: 79–90.

Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 19.03.2015

Н. В. Задоянчук

H-разрешимость задачи оптимального управления для вырожденного эллиптического вариационного неравенства

Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко

Рассмотрена задача оптимального управления для вырожденного эллиптического вариационного неравенства с весовой функцией потенциального типа, которая входит в дифференциальный оператор. Доказана разрешимость задачи оптимального управления в классе так называемых H-допустимых решений. Обосновано свойство замкнутости множества H-допустимых пар в произведении топологий пространства управлений и пространства состояний.

Ключевые слова: задача оптимального управления, эллиптическое вариационное неравенство, вырожденная весовая функция потенциального типа, H-допустимое решение, H-оптимальное решение.

N. V. Zadoianchuk

H-solvability of the optimal control problem for a degenerate elliptic variational inequality

Taras Shevchenko National University of Kiev

We consider the optimal control problem for a degenerate elliptic variational inequality with weight function of potential type, which is in a differential operator. We prove the solvability of the optimal control problem in the class of the so-called H-admissible solutions. We justify the property of closureness for the set of H-admissible pairs in the product of topologies of the control space and the space of states.

Keywords: optimal control problem, elliptic variational inequality, degenerate weight function of potential type, H-admissible solution, H-optimal solution.