УДК 539.421

А. О. Камінський, М. Ф. Селіванов

Моделювання повільного зростання тріщини зчеплення у в'язкопружному тілі

(Представлено академіком НАН України Я. М. Григоренком)

Запропоновано модель повільного зростання тріщини зчеплення, обумовленого лінійно-в'язкопружними властивостями матеріалу. Постановка задачі передбачає виконання умови плавності змикання берегів тріщини та закону зчеплення–відриву в кожний момент часу. Модель демонструє збільшення зони зчеплення під час інкубаційного періоду розвитку тріщини та при зростанні її розміру.

Ключові слова: модель тріщини з зоною зчеплення, повільне зростання тріщини, в'язкопружність.

Огляд основних теоретичних та експериментальних досліджень в області механіки довготривалого руйнування зроблено в роботі [1]. Більшість досліджень повільного зростання тріщин у в'язкопружних тілах застосовують в своїй основі модель тріщини із зоною передруйнування. Ця зона моделюється додатковим розрізом на продовженні тріщини, до берегів якого прикладено самоврівноважені стискаючі зусилля σ. Величина цих зусиль у кожній точці зони передруйнування залежить лише від положення точки в цій зоні: $\sigma = \sigma(x)$. При повільному поширенні тріщини, в цьому випадку, з часом змінюються основні характеристики тріщиностійкості. Наприклад, якщо покласти незалежною від часу величину $\sigma_{\max}$, то з часом змінюватиметься енергія руйнування ϕ. Окремо відзначаємо роботи [2, 3], в яких запропоновано модель зростання тріщини зчеплення у старіючому в'язкопружному матеріалі.

В роботі пропонується така постановка задачі, згідно з якою величини $\sigma_{\max}$, ϕ та закон зчеплення–відриву вважаються незмінними під час повільного зростання тріщини в тілі з в'язкопружного нестаріючого матеріалу в ізотермічних умовах.

Постановка задачі та принцип побудови розв'язку. Розглянемо наскрізну тріщину нормального відриву в нескінченній пластині. Будемо досліджувати квазістатичне стійке зростання тріщини, наявної до моменту прикладання навантаження. Поширення тріщини відбувається при сталому докритичному рівні зовнішнього навантаження внаслідок в'язкопружних властивостей матеріалу пластини. Дослідження проведемо за допомогою моделі тріщини з зоною зчеплення. Згідно з цією моделлю, на продовженні лінії розташування тріщини вводиться додатковий розріз з прикладеними до його берегів самоврівноваженими зусиллями — силами зчеплення $\sigma(x)$, величина яких не перевищує міцності зчеплення $\sigma_{\max}$. Розкриття в зоні зчеплення (відрив $\Delta(x)$) пов'язане з величиною сил зчеплення законом зчеплення–відриву $\sigma(x) = T[\Delta(x)]$. В цьому полягає розбіжність між терміном "зона передруйнування", про яку згадано у вступі, і терміном "зона зчеплення". В закон зчеплення–відриву, крім величин міцності зчеплення та енергії руйнування, які вважаються основними параметрами тріщиностійкості, також входять параметри форми функції T.

В момент прикладання навантаження тріщина перебуває в докритичному стані — відрив не перевищує граничного рівня: $\Delta(0, b) < \Delta_{\max}$. За рахунок повзучості відрив у вершині

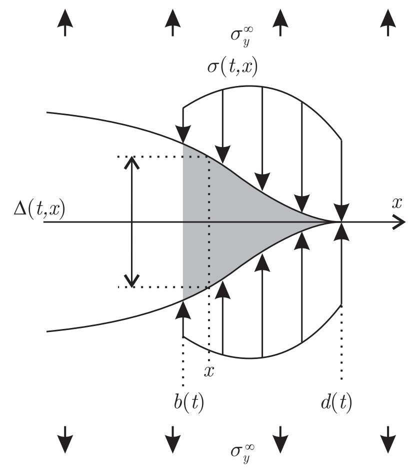

Рис. 1

тріщини з часом досягає свого максимального значення, завершуючи інкубаційний період та ініціюючи початок зростання розміру тріщини. Як під час інкубаційного періоду, так і протягом квазістатичного зростання, справедливим є закон зчеплення–відриву

$$\sigma(t,x) = T[\Delta(t,x)], \qquad b(t) \leqslant x \leqslant d(t),$$

де $\Delta(t,x)$ — величина відриву тріщини довжиною $b(t)$ з зоною зчеплення довжиною $d(t) - b(t)$ в точці x (рис. 1); ця величина залежить від інтенсивності сил зчеплення $\sigma(t,x)$ та визначається розв'язком задачі лінійної в'язкопружності у вигляді інтеграла Больцмана–Вольтерра

$$\overline{\Delta}(t,x) = \int\limits_{-\infty}^{t} l(t-\tau)\widetilde{\Delta}'_\tau(\tau,x)\,\mathrm{d}\tau, \qquad \overline{\Delta}(t,x) = \frac{\Delta(t,x)}{\Delta_{\max}}. \tag{1}$$

Величини $\overline{\Delta}(t,x)$ та $\widetilde{\Delta}(t,x)$ є безрозмірними. На відміну від $\overline{\Delta}(t,x)$, введена величина $\widetilde{\Delta}(t,x)$ не має змісту в термінах моделі за винятком випадку $t = 0$, коли $\widetilde{\Delta}(0,x) = \overline{\Delta}(0,x)$ — миттєве значення відносного відриву в точці x. Розв'язок (1) має бути знайденим за умови скінченності напружень в тілі; ця умова еквівалентна умові плавності змикання берегів тріщини

$$\left.\frac{\partial\overline{\Delta}(t,x)}{\partial x}\right|_{x=d(t)} = 0.$$

Співвідношення (1) отримується за допомогою розв'язання відповідної задачі теорії пружності шляхом застосування принципу пружно-в'язкопружної відповідності.

Якщо зовнішнє навантаження прикладено в момент часу $t = 0$,

$$\overline{\Delta}(t,x) = l(t)\overline{\Delta}(0,x) + \int\limits_{0}^{t} l(t-\tau)\widetilde{\Delta}'_\tau(\tau,x)\,\mathrm{d}\tau. \tag{2}$$

Розв'язання задачі. Розв'язок граничної задачі в'язкопружності (1) отримаємо за допомогою розв'язання відповідної пружної задачі з контурними умовами

$$\sigma^{\pm}(x) = \frac{(b_k - x)\sigma_{k-1} + (x - b_{k-1})\sigma_k}{\triangle b_k}, \qquad x \in (b_{k-1}, b_k), \qquad k = 1, 2, \dots n;$$

$$\sigma^{\pm}(x) = 0, \qquad x \in (0, b); \qquad \sigma^{\pm}(-x) = \sigma^{\pm}(x); \qquad \tau^{\pm}_{xy}(x) = 0, \qquad x \in (-d, d),$$

де σ_k — величини сили зчеплення у вузлах кусково-лінійного розподілу цієї сили вздовж зони зчеплення, $\triangle b_k = b_k - b_{k-1}$. Розв'язок задачі теорії пружності з такими контурними умовами отримано в [4] в формі

$$\overline{\Delta}(x) = \frac{L\sigma_{\max}}{\pi\Delta_{\max}} \sum_{k=0}^{n} \overline{\sigma}_k J_k(x), \qquad L = \frac{4}{E}, \tag{3}$$

E — модуль Юнга матеріалу пластини; відносні величини сил зчеплення $\overline{\sigma}_k = \sigma_k/\sigma_{\max}$ мають задовольняти умову скінченності напружень

$$\sum_{k=0}^{n} \overline{\sigma}_k N_k = B, \qquad B = \frac{\pi\sigma_y^{\infty}}{2\sigma_{\max}}. \tag{4}$$

Наведені у виразах (3) і (4) величини $J_k(x)$ та N_k виписано в [1].

Розв'язок (3) з урахуванням умови (4) для рівновіддалених вузлів координатної сітки з точністю до величин порядку малості $[(d-b)/n]^2$ можна записати таким чином:

$$\overline{\Delta}(b_m) = \frac{L}{D} b_0 \frac{P_m(\overline{\sigma})}{Q^2(\overline{\sigma})}, \qquad m = 1, 2, \dots, n, \tag{5}$$

де

$$b_m = b_0 + m\triangle b, \qquad \triangle b = \frac{9b_0 B^2}{8Q^2(\overline{\sigma})}, \qquad D = \frac{32\sigma_{\max}\Delta_{\max}}{9\pi[\sigma_y^{\infty}]^2};$$

$\overline{\sigma} = (\overline{\sigma}_0 \overline{\sigma}_1 \dots \overline{\sigma}_n)$ — вектор відносних величин сили зчеплення у вузлах сітки;

$$P_m(\overline{\sigma}) = \sum_{k=0}^{n} a_{mk}\overline{\sigma}_k, \qquad Q(\overline{\sigma}) = \sum_{k=0}^{n} c_k\overline{\sigma}_k;$$

$$a_{m0} = t_{m1} - t_{m0} + q_m;$$

$$a_{mk} = t_{m(k-1)} - 2t_{mk} + t_{m(k+1)} \qquad (0 < k < n), \qquad a_{mn} = t_{m(n-1)};$$

$$q_0 = 2n, \qquad q_m = mw_{m0} + 2y_m y_0 \qquad (0 < m < n), \qquad q_n = 0;$$

$$t_{mk} = \frac{1}{2}(m-k)^2 w_{mk} + (2n - k - m)y_m y_k \qquad (m < k < n);$$

$$t_{mn} = 0, \qquad t_{mm} = 2(n-m)^2, \qquad t_{km} = t_{mk};$$

$$c_0 = y_1^3 - y_0^3 + \frac{3}{2}y_0, \qquad c_k = y_{k-1}^3 - 2y_k^3 + y_{k+1}^3 \qquad (0 < k < n), \qquad c_n = 1;$$

$$y_k = \sqrt{n-k}, \qquad w_{mk} = \ln\left|\frac{y_k - y_m}{y_k + y_m}\right|.$$

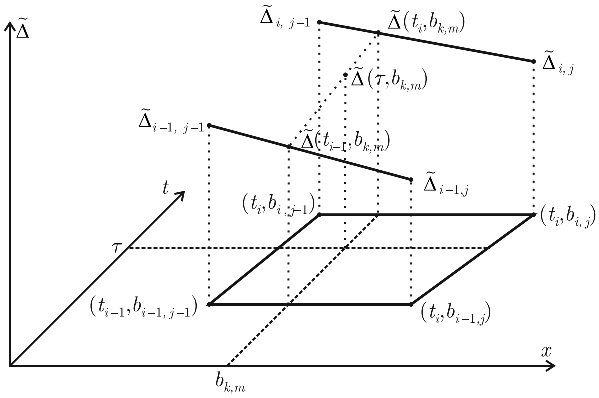

Рис. 2

Далі для пружного розв'язку (5) запишемо його в'язкопружний аналог у формі (2). Скориставшись принципом пружно-в'язкопружної відповідності, знайдемо

$$l(t) = L^{-1}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s^2\mathcal{L}\{E(t)\}}\right\},$$

де $\mathcal{L}$ та $\mathcal{L}^{-1}$ — пряме та обернене перетворення Лапласа; $E(t)$ — характеристика релаксації матеріалу (в'язкопружний аналог модуля Юнга).

Таким чином, в'язкопружний аналог виразу (5) матиме вигляд

$$\overline{\Delta}[t, b_m(t)] = l(t)\widetilde{\Delta}[0, b_m(t)] + \int\limits_0^t l(t-\tau)\widetilde{\Delta}'_\tau[\tau, b_m(t)]\,\mathrm{d}\tau. \qquad (6)$$

В кожний момент часу напружено-деформований стан в околі тріщини визначається системою рівнянь

$$\overline{T}(\overline{\Delta}[t, b_m(t)]) = \overline{\sigma}[t, b_m(t)], \qquad m = 1, 2, \ldots, n, \qquad (7)$$

де $\overline{T}(\overline{\Delta}) = T(\overline{\Delta})/\sigma_{\max}$.

Протягом інкубаційного періоду довжина тріщини не змінюється ($b_0(t)$ дорівнює початковому розміру тріщини) — система (7) має невідомими величини $\overline{\sigma}[t, b_m(t)]$, $m = 0, 1, \ldots, n$. При зростанні тріщини невідомими системи (7) будуть $b_0(t)$ та $\overline{\sigma}[t, b_m(t)]$, $m = 1, 2, \ldots, n$.

Будемо розв'язувати систему (7) в моменти часу $t_k = k \cdot \triangle t$, $k = 0, 1, \ldots$. Введемо позначення $b_{i,j} = b_j(t_i)$ — координата j-го вузла сітки в момент часу t_i. Тоді (див. рис. 2)

$$\widetilde{\Delta}'_\tau(\tau, b_{k,m}) = \frac{\widetilde{\Delta}(t_i, b_{k,m}) - \widetilde{\Delta}(t_{i-1}, b_{k,m})}{\triangle t}, \qquad t_{i-1} \leqslant \tau \leqslant t_i,$$

де

$$\widetilde{\Delta}(t_i, b_{k,m}) = \begin{cases} \widetilde{\Delta}_{i,j-1} + \dfrac{b_{k,m} - b_{i,j-1}}{\triangle b_i}[\widetilde{\Delta}_{i,j} - \widetilde{\Delta}_{i,j-1}], & b_{i,j-1} \leqslant b_{k,m} \leqslant b_{i,j} \\ 0, \quad b_{k,m} > b_{i,n}, \end{cases},$$

$$\widetilde{\Delta}_{i,j} = \widetilde{\Delta}(t_i, b_{i,j}) = \frac{L}{D} b_{i,0} \frac{P_j[\overline{\sigma}(t_i)]}{Q^2[\overline{\sigma}(t_i)]},$$

$\overline{\Delta}_{i,j}$ — відрив в j-му вузлі сітки в момент часу t_i.

Зазначимо, що перший доданок у виразі (6) дорівнює нулю, якщо $b_{k,m} > b_{0,n}$. Другий доданок можна переписати у вигляді

$$\int\limits_0^{t_k} l(t_k-\tau)\widetilde{\Delta}'_\tau(\tau, b_{k,m})\,\mathrm{d}\tau = \int\limits_\omega^{t_k} l(t_k-\tau)\widetilde{\Delta}'_\tau(\tau, b_{k,m})\,\mathrm{d}\tau =$$

$$= \Lambda_{kI}\widetilde{\Delta}(t_I, b_{k,m}) + \sum_{i=I+1}^{k} \Lambda_{ki}[\widetilde{\Delta}(t_i, b_{k,m}) - \widetilde{\Delta}(t_{i-1}, b_{k,m})],$$

де

$$\omega = \begin{cases} 0, & b_{k,m} \leqslant b_{0,n}, \\ t_{I-1} + \dfrac{b_{k,m} - b_{I-1,n}}{b_{I,n} - b_{I-1,n}}\triangle t, & b_{k,m} > b_{0,n} \end{cases}, \qquad b_{I-1,n} < b_{k,m} < b_{I,n},$$

$$\Lambda_{kI} = \frac{1}{\triangle t}\int\limits_\omega^{t_I} l(t_k-\tau)\,\mathrm{d}\tau; \tag{8}$$

$$\Lambda_{ki} = \frac{1}{\triangle t}\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} l(t_k-\tau)\,\mathrm{d}\tau, \qquad i = I+1, I+2, \ldots, k.$$

Якщо, наприклад, характеристика повзучості $l(t)$ знайдена у формі

$$l(t) = 1 + \sum_r \lambda_r \int\limits_0^t \exp(-\beta_r\tau)\,\mathrm{d}\tau = l_\infty - \sum_r \xi_r \exp(-\beta_r\tau),$$

$$\xi_r = \frac{\lambda_r}{\beta_r}, \qquad l_\infty = 1 + \sum_r \xi_r,$$

то

$$\Lambda_{kI} = l_\infty - \sum_r \frac{\xi_r \exp(-\beta_r(k-I)\triangle t) - \exp(-\beta_r[t_k-\omega])}{\beta_r(t_k-\omega)};$$

$$\Lambda_{ki} = l_\infty - \sum_r \frac{\xi_r \exp(-\beta_r(k-i)\triangle t)[1-\exp(-\beta_r\triangle t)]}{\beta_r\triangle t}.$$

Таким чином, в кожний момент часу t_k визначальна система параметрів напружено-деформованого стану (7) набуде вигляду

$$\overline{T}\left(l(t_k)\widetilde{\Delta}(0, b_{k,m}) + \Lambda_{kI}\widetilde{\Delta}(t_I, b_{k,m}) + \sum_{i=I+1}^{k}\Lambda_{ki}[\widetilde{\Delta}(t_i, b_{k,m}) - \widetilde{\Delta}(t_{i-1}, b_{k,m})]\right) = \overline{\sigma}_{k,m}, \tag{9}$$

$$m = 0, 1, \ldots, n-1,$$

де $\sigma_{k,m} = \sigma_m(t_k)$, а індекс I залежить від положення точки $(t_k, b_{k,m})$ на площині час–координата та визначається згідно з (8). Невідомими системи (9) є величини $\overline{\sigma}_{k,0}$, $\overline{\sigma}_{k,1}$, …, $\overline{\sigma}_{k,n-1}$, якщо $\overline{\Delta}_{k,0} < 1$ і величини $\overline{\sigma}_{k,1}$, $\overline{\sigma}_{k,2}$, …, $\overline{\sigma}_{k,n-1}$, $b_{k,0}$ у випадку, коли $\overline{\Delta}_{k,0} = 1$.

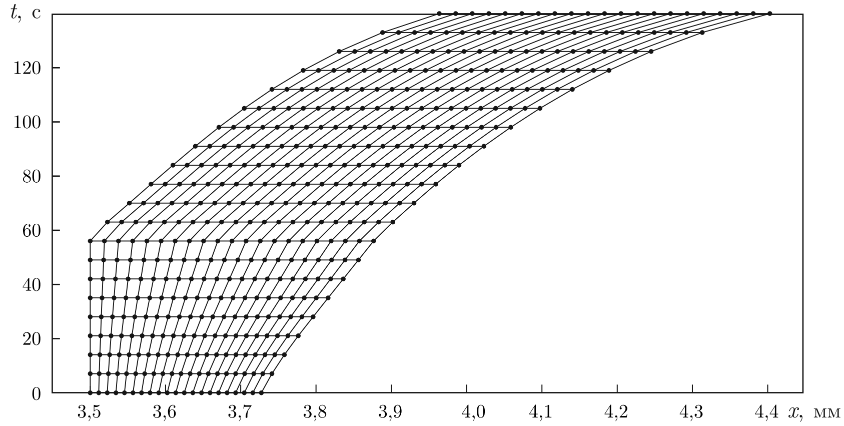

Рис. 3

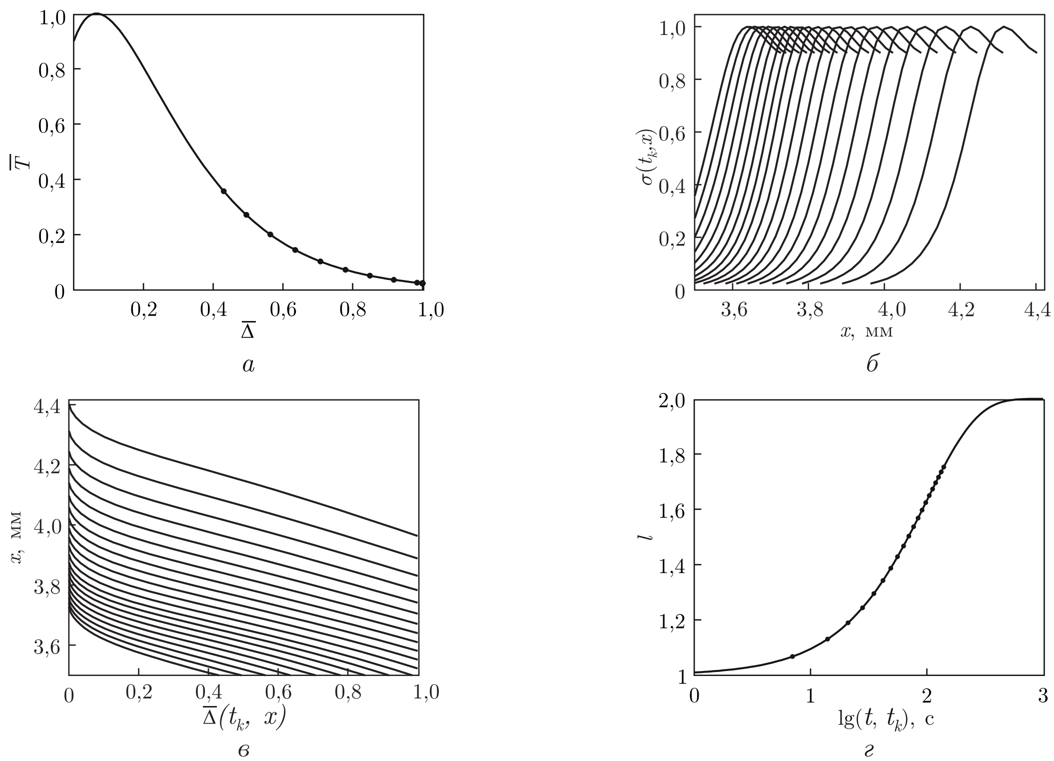

Рис. 4

Числовий розв'язок. Для чисельної ілюстрації отриманих розв'язків використаємо закон зчеплення–відриву у вигляді

$$\overline{T}(\overline{\Delta}) = (\overline{\sigma}_n + \overline{\sigma}_l\overline{\Delta}) \exp(-a\overline{\Delta}),$$

де параметр $\overline{\sigma}_l$ визначається з умови рівності відносного зчеплення в точці екстремуму одиниці:

$$\exp\left(a\frac{\overline{\sigma}_n}{\overline{\sigma}_l} - 1\right) = \frac{a}{\overline{\sigma}_l}.$$

Закон містить два параметри форми: параметр $\overline{\sigma}_n = \overline{T}(0)$ і параметр a, що характеризує величину сили зчеплення при $\overline{\Delta} = 1$. Енергія руйнування для цього ЗЗВ

$$\phi = \Delta_{\max}\sigma_{\max}\frac{\overline{\sigma}_l}{a}\left[\frac{\overline{\sigma}_n}{\overline{\sigma}_l} + \frac{1}{a} - \left(\frac{\overline{\sigma}_n}{\overline{\sigma}_l} + \frac{1}{a} + 1\right)\exp(-a)\right],$$

звідки можна визначити $\Delta_{\max}$ при заданих величинах $\sigma_{\max}$ і ϕ.

На рис. 3 наведено вузли сітки $(t_i, b_{i,j})$ в площині час – координата, отримані для задачі з такими параметрами: а) параметри в'язкопружності — $E = 4$ ГПа, $l_\infty = 2$, $\beta_1 = 0{,}01$ с$^{-1}$; б) параметри тріщиностійкості — $\sigma_{\max} = 30$ МПа, $\phi = 600$ Н/м; в) параметри форми закону зчеплення–відриву — $\overline{\sigma}_n = 0{,}9$, $a = 6$; г) геометричні та силові параметри — початкова напівдовжина тріщини $b_0(0) = 3{,}5$ мм, $\sigma_y^\infty = 6$ МПа; д) параметри дискретизації — $n = 20$, $\triangle t = 7$ с.

На рис. 4 відображені використаний для побудови розв'язку закон зчеплення–відриву та значення відриву у вершині тріщини в моменти часу t_k (*а*), розподіл сил зчеплення (*б*) та відрив (*в*) в моменти часу t_k, а також функція повзучості $l(t)$ та її значення в моменти часу t_k (*г*).

Цитована література

1. *Kaminsky A. A.* Mechanics of the delayed fracture of viscoelastic bodies with cracks: theory and experiment (review) // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, No 5. – C. 485–548.
2. *Bazant Z. P., Li Y.-N.* Cohesive crack model with rate-depending opening and viscoelasticity: I. Mathematical model and scaling // Int. J. Fract. – 1997. – **86**. – P. 247–265.
3. *Li Y.-N., Bazant Z. P.* Cohesive crack model with rate-dependent opening and viscoelasticity: II. Numerical algorithm, behavior and size effect // Int. J. Fract. – 1997. – **86**. – P. 267–288.
4. *Селіванов М. Ф.* Визначення безпечної довжини тріщини та розподілу сил зчеплення в рамках моделі тріщини з зоною передруйнування // Доп. НАН України. – 2014. – № 11. – С. 58–64.

References

1. *Kaminsky A. A.* Int. Appl. Mech., 2014, **50**, No 5: 485–548.
2. *Bazant Z. P., Li Y.-N.* Int. J. Fract., 1997, **86**: 247–265.
3. *Li Y.-N., Bazant Z. P.* Int. J. Fract., 1997, **86**: 267–288.
4. *Selivanov M. F.* Dopov. NAS Ukraine, 2014, No 11: 58–64 (in Ukrainian).

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ

Надійшло до редакції 05.03.2015

А. А. Каминский, М. Ф. Селиванов

Моделирование медленного роста трещины сцепления в вязкоупругом теле

Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев

Предложена модель медленного роста трещины сцепления, обусловленного линейно-вязкоупругими свойствами материала. Постановка задачи предусматривает выполнение условий плавности смыкания берегов трещины и закона сцепления–отрыва в каждый момент времени. Модель демонстрирует увеличение размера зоны сцепления как во время инкубационного периода развития трещины, так и при ее распространении.

Ключевые слова: модель трещины с зоной сцепления, медленный рост трещины, вязкоупругость.

A. A. Kaminsky, M. F. Selivanov

Modeling the slow cohesive crack growth in viscoelastic solids

S. P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev

A model cohesive crack growth due to viscoelastic properties of a material is proposed. The problem statement takes into account that the condition of closure smoothness and the traction-separation law hold true at an arbitrary moment of time. The model demonstrates increasing the cohesive zone size both during the incubation period of crack propagation and during the crack growth.

Keywords: cohesive zone model, slow crack growth, viscoelasticity.