Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

9 • 2015

МАТЕМАТИКА

УДК 517.986.4

М. І. Нессонов

Двоїстість Шура–Вейля для унітарної групи II_1-фактора

(Представлено академіком НАН України Л. О. Пастуром)

Одержано аналог класичної двоїстості Шура–Вейля для унітарної групи довільного II_1*-фактора.*

Ключові слова: двоїстість Шура–Вейля, унітарна група фактора, діаграма Юнга.

1. Класична двоїстість Шура–Вейля та її нескінченновимірні узагальнення. Нехай $\mathbb{M}_n$ — алгебра комплексних $n \times n$-матриць, $\mathbb{U}_n$ — група унітарних елементів з $\mathbb{M}_n$ і tr — слід на $\mathbb{M}_n$, нормований на одиницю. Одночасно $\mathbb{M}_n$ є гільбертовим простором зі скалярним добутком, який для $a, b \in \mathbb{M}_n$ визначається формулою $\langle a, b\rangle = \mathrm{tr}(b^*a)$. В $\mathbb{M}_n$ діють унітарні зображення $\mathfrak{L}$ і $\mathfrak{R}$ групи $\mathbb{U}_n$: $\mathfrak{L}(u)x = ux$, $\mathfrak{R}(u)x = xu^*$, де $u \in \mathbb{U}_n$, $x \in \mathbb{M}_n$. Очевидно, що $\mathfrak{L}(u)$ та $\mathfrak{R}(v)$ комутують при усіх u, $v \in \mathbb{U}_n$. Отже, оператори $\Pi((u, v)) = \mathfrak{L}(u)\cdot\mathfrak{R}(v)$ утворюють зображення групи $\mathbb{U}_n \times \mathbb{U}_n$. Позначимо через $\Pi^{\otimes p}$ p-й тензорний степінь зображення Π. Якщо $\{e_{jk}\}_{j,k=1}^n$ — система матричних одиниць з $\mathbb{M}_n$, то елементи $e_{j_1k_1} \otimes e_{j_2k_2} \otimes \ldots \otimes e_{j_pk_p}$ утворюють ортонормований базис у $\mathbb{M}_n^{\otimes p}$. Група $\mathfrak{S}_p$ підстановок множини $\{1, 2, \ldots, p\}$ вкладається в унітарну групу алгебри $\mathbb{M}_n^{\otimes p}$:

$$\mathfrak{S}_p \ni s \mapsto \mathfrak{i}(s) = \sum_{k_1,k_2,\ldots,k_p=1}^{n} e_{k_1k_{s^{-1}(1)}} \otimes \ldots \otimes e_{k_pk_{s^{-1}(p)}} \in \mathbb{M}_n^{\otimes p}.$$

Оператори лівого та правого множення на $\mathfrak{i}(s)$ утворюють в $\mathbb{M}_n^{\otimes p}$ унітарне зображення $\mathcal{P}^{(2)}$ групи $\mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_p$: $\mathcal{P}^{(2)}((s,t))x = \mathfrak{i}(s) \cdot x \cdot \mathfrak{i}(t^{-1})$, $x \in \mathbb{M}_n^{\otimes p}$, $(s,t) \in \mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_p$.

Класична двоїстість Шура–Вейля [1] стверджує:

алгебра $\mathcal{P}^{(2)}(\mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_p)''$, що породжена операторами з $\mathcal{P}^{(2)}(\mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_p)$, є комутантом множини операторів $\Pi(\mathbb{U}_n \times \mathbb{U}_n)$;

якщо $\mathfrak{E}$ — мінімальний проектор з $\mathcal{P}^{(2)}(\mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_p)''$, що належить до незвідної компоненти $\mathfrak{I}^{\lambda\mu}$ зображення $\mathcal{P}^{(2)}$, яка відповідає p-розбиттям (діаграмам Юнга) λ, μ, то оператори

$\mathfrak{E} \cdot \Pi^{\lambda\mu}((u,v)) \cdot \mathfrak{E}$ утворюють незвідні та попарно нееквівалентні при різних парах (λ, μ) зображення групи $\mathbb{U}_n$.

Один з варіантів нескінченновимірної двоїстості Шура–Вейля з'явився в [2] у зв'язку з тензорними реалізаціями допустимих зображень групи $\mathfrak{S}_\infty \times \mathfrak{S}_\infty$, де $\mathfrak{S}_\infty$ — група скінченних перестановок зліченної множини. За допомогою розкладень тензорних зображень класичних груп на незвідні компоненти в [3] було знайдено змістовний клас зображень групи $\mathfrak{S}_\infty$. Названі дослідження належать до так званої дінамічної теорії двоїстості, коли скінченна група перестановок замінюється на нескінченну. Більш традиційні випадки, коли група перестановок залишається скінченною, а замість $\mathbb{U}_n$ розглядається унітарна група гільбертового простору чи природна індуктивна границя класичних алгебр Лі, вивчалися в [4, 5]. Тут параметризація незвідних компонент тензорних зображень залишалася класичною. У цій роботі ми заміняємо $\mathbb{U}_n$ на унітарну группу II_1-фактора при скінченній групі підстановок. Відповідний аналог двоїстості Шура–Вейля суттєво відрізняється від класичного.

2. Тензорні зображення унітарної групи II_1-фактора. Тепер розглянемо довільний II_1-фактор Неймана $\mathcal{M}$ з нормальним слідом tr [6]. Позначимо через $\mathbb{U}(\mathcal{M})$ групу унітарних елементів фактора $\mathcal{M}$. Визначимо скалярний добуток на $\mathcal{M}$ за формулою $\langle a, b\rangle = \mathrm{tr}(b^*a)$, $a,\ b \in \mathcal{M}$. Поповнення $\mathcal{M}$ за відповідною нормою позначимо через $L^2(\mathcal{M}, \mathrm{tr})$. Стандартною реалізацією фактора $\mathcal{M}$ є його зображення операторами лівого множення в просторі $L^2(\mathcal{M}, \mathrm{tr})$: $\mathfrak{L}(a)\eta = a\eta$, де $a \in \mathcal{M}$, $\eta \in L^2(\mathcal{M}, \mathrm{tr})$. При цьому множина $\mathcal{M}'$ обмежених операторів, комутуючих з $\mathcal{M}$, складається з операторів $\mathfrak{R}(a)$, $a \in \mathcal{M}$ правого множення: $\mathfrak{R}(a)\eta = \eta a^*$. Далі ми ототожнюємо алгебру $\mathcal{M}$ з $\mathfrak{L}(\mathcal{M})$ ($\mathcal{M}'$ з $\mathfrak{R}(\mathcal{M})$).

В $L^2(\mathcal{M}, \mathrm{tr})^{\otimes p}$ діють унітарні зображення $\mathfrak{L}^{\otimes p}(u)$ та $\mathfrak{R}^{\otimes p}(u)$ групи $\mathbb{U}(\mathcal{M})$:

$$\mathfrak{L}^{\otimes p}(u)(x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_p) = ux_1 \otimes ux_2 \otimes \ldots \otimes ux_p,$$
$$\mathfrak{R}^{\otimes p}(u)(x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_p) = x_1u^* \otimes x_2u^* \otimes \ldots \otimes x_pu^*,$$

де $x_1, x_2, \ldots, x_p \in L^2(\mathcal{M}, \mathrm{tr})$.

Також в $L^2(\mathcal{M}, \mathrm{tr})^{\otimes p}$ природно визначається зображення $\mathcal{P}_p$ групи $\mathfrak{S}_p$:

$$\mathcal{P}_p(s)(x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_p) = x_{s^{-1}(1)} \otimes x_{s^{-1}(2)} \otimes \ldots \otimes x_{s^{-1}(p)}, \qquad s \in \mathfrak{S}_p. \tag{1}$$

Оскільки $\mathcal{P}_p(s)$ комутує з кожним оператором $\mathfrak{L}^{\otimes p}(u)$ і $\mathfrak{R}^{\otimes p}(u)$ для всіх $s \in \mathfrak{S}_p$ та $u \in \mathbb{U}(\mathcal{M})$, то природно з'являється зображення $\mathcal{T}$ групи $\mathbb{U}(\mathcal{M}) \times (\mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_q)$:

$$\mathcal{T}(u,s,t) = (\mathfrak{L}^{\otimes p}(u) \times \mathfrak{R}^{\otimes q}(u))(\mathcal{P}_p(s) \otimes \mathcal{P}_q(t)).$$

$\mathcal{P}_p(s)$ визначає автоморфізми θ_s і θ'_s факторів $\mathcal{M}^{\otimes p}$ і $(\mathcal{M}')^{\otimes p}$:

$$\theta_s(a) = \mathcal{P}_p(s)a\mathcal{P}_p(s)^{-1}, \qquad a \in \mathcal{M}^{\otimes p}; \qquad \theta'_s(a') = \mathcal{P}_p(s)a'\mathcal{P}_p(s)^{-1}, \qquad a' \in (\mathcal{M}')^{\otimes p}. \tag{2}$$

Нехай $(\mathcal{M}^{\otimes p})^{\mathfrak{S}_p} = \{a \in \mathcal{M}^{\otimes p} \colon \theta_s(a) = a\ \forall s \in \mathfrak{S}_p\}$ і $((\mathcal{M}')^{\otimes p})^{\mathfrak{S}_p} = \{a' \in (\mathcal{M}')^{\otimes p} \colon \theta'_s(a') = a'\ \forall s \in \mathfrak{S}_p\}$.

Нагадаємо, що незвідні зображення групи $\mathfrak{S}_p$ параметризуються розбиттями числа p.[1]

[1]Розбиття $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ — незростаюча послідовність натуральних чисел така, що $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k = p$. Загальноприйняте позначення — $\lambda \vdash p$.

Для $\lambda \vdash p$ позначимо через χ^λ відповідний характер незвідного зображення групи $\mathfrak{S}_p$. Тоді оператор $P_p^\lambda = \dfrac{\dim\lambda}{p!}\sum\limits_{s\in\mathfrak{S}_p}\chi^\lambda(s)\mathcal{P}_p(s)$ є ортогональним проектором з центра алгебри, породженої операторами $\{\mathcal{P}_p(s)\}_{s\in\mathfrak{S}_p}$.

Для множини $\mathcal{A}$ операторів позначимо через $\mathcal{N}_\mathcal{A}$ найменшу алгебру Неймана, що містить $\mathcal{A}$. Якщо $\mathcal{A}'$ — множина усіх операторів, комутуючих з кожним із $\mathcal{A}$, то за теоремою Неймана про бікомутант [6] маємо $\mathcal{N}_\mathcal{A} = (\mathcal{A}')' = \mathcal{A}''$.

3. Результати. Нехай $\mathcal{H}_{\lambda\mu} = P_p^\lambda \otimes P_q^\mu(L^2(\mathcal{M},\mathrm{tr})^{\otimes p}\otimes L^2(\mathcal{M},\mathrm{tr})^{\otimes q})$ і $\mathcal{T}^{\lambda\mu}(u,s,t) = (P_p^\lambda\otimes \otimes P_q^\mu)\cdot\mathcal{T}(u,s,t)\cdot(P_p^\lambda\otimes P_q^\mu)$, де $u\in\mathbb{U}(\mathcal{M})$, $(s,t)\in\mathfrak{S}_p\times\mathfrak{S}_q$. Зрозуміло, що унітарні зображення $\mathcal{T}^{\lambda\mu}$ групи $\mathbb{U}(\mathcal{M})\times(\mathfrak{S}_p\times\mathfrak{S}_q)$ для різних (λ,μ) не є квазіеквівалентними. Тому з точки зору класичної двоїстості Шура–Вейля дещо несподіваним є нижченаведене твердження.

Теорема 1. *Нехай $\lambda\vdash p$, $\mu\vdash q$ і $\Pi_{\lambda\mu}$ — звуження зображення $\mathfrak{L}^{\otimes p}\otimes\mathfrak{R}^{\otimes q}$ на підпростір $\mathcal{H}_{\lambda\mu}$. Справедливі такі твердження:*

1. Алгебри $\{\mathfrak{L}^{\otimes p}\otimes\mathfrak{R}^{\otimes q}(\mathbb{U}(\mathcal{M}))\}''$ та $(\mathcal{M}^{\otimes p})^{\mathfrak{S}_p}\otimes(\mathcal{M}'^{\otimes q})^{\mathfrak{S}_q}$ є ідентичними[2]*. Зокрема, алгебра $(\mathcal{M}^{\otimes p})^{\mathfrak{S}_p}\otimes(\mathcal{M}'^{\otimes q})^{\mathfrak{S}_q}$ — фактор типу II_1.*

2. Зображення $\Pi_{\lambda\mu}$ квазіеквівалентно[3] *зображенню $\mathfrak{L}^{\otimes p}\otimes\mathfrak{R}^{\otimes q}$.*

3. Для $\gamma\vdash p$ і $\delta\vdash q$ зображення $\Pi_{\lambda\mu}$ і $\Pi_{\gamma\delta}$ тоді і лише тоді унітарно еквівалентні, коли $\dim\lambda\cdot\dim\mu = \dim\gamma\cdot\dim\delta$.

Поряд із зображенням $\mathfrak{L}^{\otimes p}\otimes\mathfrak{R}^{\otimes q}$ групи $\mathbb{U}(\mathcal{M})$ в $L^2(\mathcal{M},\mathrm{tr})^{\otimes p}\otimes L^2(\mathcal{M},\mathrm{tr})^{\otimes q}$ діє зображення $\mathfrak{R}^{\otimes p}\otimes\mathfrak{L}^{\otimes q}$. Спираючись на той факт, що оператори $\mathfrak{L}^{\otimes p}\otimes\mathfrak{R}^{\otimes q}(u)$ і $\mathfrak{R}^{\otimes p}\otimes\mathfrak{L}^{\otimes q}(v)$ $(u,v\in\mathbb{U}(\mathcal{M}))$ комутують, визначимо зображення $\mathcal{R}^{(2)}$ групи $\mathbb{U}(\mathcal{M})\times\mathbb{U}(\mathcal{M})$:

$$\mathcal{R}^{(2)}(u,v) = (\mathfrak{L}^{\otimes p}\otimes\mathfrak{R}^{\otimes q}(u))\cdot(\mathfrak{R}^{\otimes p}\otimes\mathfrak{L}^{\otimes q}(v)). \tag{3}$$

Також в $L^2(\mathcal{M},\mathrm{tr})^{\otimes p}\otimes L^2(\mathcal{M},\mathrm{tr})^{\otimes q}$ діє зображення $\mathcal{T}^{(2)}$ групи $\mathbb{U}(\mathcal{M})\times\mathbb{U}(\mathcal{M})\times\mathfrak{S}_p\times\mathfrak{S}_q$:

$$\begin{aligned}&\mathcal{T}^{(2)}(u,v,s,t) = \mathcal{R}^{(2)}(u,v)\cdot(\mathcal{P}_p(s)\otimes\mathcal{P}_q(t)),\\ &\text{де}\qquad u,v\in\mathbb{U}(\mathcal{M}),\qquad s\in\mathfrak{S}_p,\qquad t\in\mathfrak{S}_q.\end{aligned} \tag{4}$$

Підпростори $\mathcal{H}_{\lambda\mu}$ є інваріантними відносно зображення $\mathcal{T}^{(2)}$. Позначимо через $\mathcal{T}^{(2)}_{\lambda\mu}$ звуження $\mathcal{T}^{(2)}$ на $\mathcal{H}_{\lambda\mu}$.

Теорема 2. *Мають місце такі властивості:*

(a) $\mathcal{R}^{(2)}(\mathbb{U}(\mathcal{M})\times\mathbb{U}(\mathcal{M}))'' = (\mathcal{P}_p(\mathfrak{S}_p)\otimes\mathcal{P}_q(\mathfrak{S}_q))'$. Зокрема, вимірність алгебри $\mathcal{R}^{(2)}(\mathbb{U}(\mathcal{M})\times \times\,\mathbb{U}(\mathcal{M}))'$ дорівнює $p!\cdot q!$.

(b) Зображення $\mathcal{T}^{(2)}_{\lambda\mu}$ є незвідним.

(c) Зображення $\mathcal{T}^{(2)}_{\lambda\mu}$ та $\mathcal{T}^{(2)}_{\gamma\delta}$ тоді і лише тоді є унітарно еквівалентними, коли $\lambda=\gamma$ і $\mu=\delta$.

Зауваження 1. Якщо в теоремі 2 заміст II_1-фактора $\mathcal{M}$ розглядати алгебру всіх комплексних $n\times n$-матриць $\mathbb{M}_n$, то рівність з (a) порушується. Наприклад, вимірність алгебри $\mathcal{R}^{(2)}(\mathbb{U}(\mathbb{M}_n)\times\mathbb{U}(\mathbb{M}_n))'$ при $n\geqslant\max\{p,q\}$ дорівнює $(p!\cdot q!)^2$.

[2]Нагадаємо, що ми ототожнюємо елементи алгебри $(\mathcal{M}^{\otimes p})^{\mathfrak{S}_p}$ $((\mathcal{M}'^{\otimes q})^{\mathfrak{S}_q})$ з відповідними операторами лівого (правого) множення в $L^2(\mathcal{M},\mathrm{tr})^{\otimes p}$ $(L^2(\mathcal{M},\mathrm{tr})^{\otimes q})$.

[3]Зображення $\mathcal{R}_1$ та $\mathcal{R}_2$ групи G є квазіеквівалентними, якщо існує ізоморфізм θ: $\mathcal{R}_1(G)''\mapsto\mathcal{R}_2(G)''$, для якого $\theta(\mathcal{R}_1(g)) = \mathcal{R}_2(g)$ при усіх $g\in G$.

Для того щоб сформулювати важливий наслідок теореми 2, введемо необхідні позначення. Нехай $T^{\lambda\mu}$, де $\lambda \vdash p$, $\mu \vdash q$, — незвідне зображення групи $\mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_q$, а $\{t_{kl}^{\lambda\mu}\}_{k,l=1}^{\dim T^{\lambda\mu}}$ — набір його матричних елементів. Тоді оператор

$$P_k^{\lambda\mu} = \frac{\dim T^{\lambda\mu}}{p!q!} \sum_{(s,t)\in\mathfrak{S}_p\times\mathfrak{S}_q} \overline{t_{kk}^{\lambda\mu}}((s,t)) \cdot (\mathcal{P}_p(s) \otimes \mathcal{P}_q(t)) \tag{5}$$

є мінімальним проектором в алгебрі $(\mathcal{P}_p(\mathfrak{S}_p)\otimes\mathcal{P}_q(\mathfrak{S}_q))''$. Зрозуміло, що $\sum\limits_{k=1}^{\dim T^{\lambda\mu}} P_k^{\lambda\mu} = P_p^\lambda \otimes P_q^\mu$ і $P_k^{\lambda\mu} \in \mathcal{R}^{(2)}(\mathbb{U}(\mathcal{M}) \times \mathbb{U}(\mathcal{M}))'$ (див. (3)). Отже, підпростір $\mathcal{H}_{\lambda,\mu,k} = P_k^{\lambda\mu}\mathcal{H}_{\lambda\mu} \subset \mathcal{H}_{\lambda\mu}$ є інваріантним відносно операторів $\mathcal{R}^{(2)}(u,v)$, де $u, v \in \mathbb{U}(\mathcal{M})$. Позначимо через $\mathcal{R}_{\lambda,\mu,k}^{(2)}$ звуження зображення $\mathcal{R}^{(2)}$ на $\mathcal{H}_{\lambda,\mu,k}$. Нижченаведене твердження випливає з теореми 2 (*a*).

Наслідок 3. *Зображення $\mathcal{R}_{\lambda,\mu,k}^{(2)}$ є незвідним. $\mathcal{R}_{\lambda,\mu,j}^{(2)}$ і $\mathcal{R}_{\gamma,\delta,k}^{(2)}$ тоді і лише тоді є унітарно еквівалентними, коли $\lambda = \gamma$ и $\mu = \delta$.*

Якщо K — компактна група, а T — незвідне зображення групи $K \times K$ у гільбертовому просторі $\mathcal{H}$, то добре відомо, що T розпадається в тензорний добуток. А саме звуження T на підгрупи $K \times e$ та $e \times K$, де e — одиниця з K, кратні незвідним зображенням T_L та T_R відповідно групи K. Це означає, що T є еквівалентним зображенням групи $K \times K$, яке задається операторами $T_L(k_1) \otimes T_R(k_2)$, де k_1, $k_2 \in K$. Зокрема,

$$T(K \times e)' = T(e \times K)''. \tag{6}$$

Нижченаведене твердження показує, що для зображень $\mathcal{R}_{\lambda,\mu,k}^{(2)}$ ця рівність, загалом кажучи, порушується.

Теорема 4. *Співвідношення $\mathcal{R}_{\lambda,\mu,k}^{(2)}(\mathbb{U}(\mathcal{M}) \times I)' = \mathcal{R}_{\lambda,\mu,k}^{(2)}(I \times \mathbb{U}(\mathcal{M}))''$ має місце тоді і лише тоді, коли зображення групи $\mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_q$, яке відповідає парі (λ, μ), є одновимірним.*

Зауваження 2. Доведення теореми 4 спирається на обчислення зв'язуючої константи Неймана (coupling constant) [6] для фактора $\mathcal{R}_{\lambda,\mu,k}^{(2)}(\mathbb{U}(\mathcal{M}) \times I)''$.

4. Ідея доведення теореми 1 для AFD-фактора при $p = 2$, $q = 0$. При цих умовах доведення технічно значно спрощується, але добре проявляються різного роду нескінченновимірні ефекти.

Для доведення того, що алгебра $\mathfrak{L}^{\otimes 2}(\mathbb{U}(\mathcal{M}))''$ є II_1-фактором, встановимо насамперед рівність

$$\mathfrak{L}^{\otimes 2}(\mathbb{U}(\mathcal{M}))'' = \mathfrak{L}((\mathcal{M} \otimes \mathcal{M})^{\mathfrak{S}_2}). \tag{7}$$

Дійсно, користуючись співвідношенням $\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{tA} \otimes e^{tA})\right|_{t=0} = I \otimes A + A \otimes I$, де $A = -A^* \in \mathcal{M}$, одержуємо, що $\mathfrak{L}^{\otimes 2}(\mathbb{U}(\mathcal{M}))''$ містить оператори лівого множення на $X \otimes Y + Y \otimes X$ при всіх X, $Y \in \mathcal{M}$. Звідси випливає (7).

Припустимо, що $(\mathcal{M} \otimes \mathcal{M})^{\mathfrak{S}_2}$ не є II_1-фактором. Тоді знайдуться ненульові взаємно ортогональні проектори E і F з центра $(\mathcal{M} \otimes \mathcal{M})^{\mathfrak{S}_2}$.

Для AFD-фактора $\mathcal{M}$ [7] існує система взаємно комутуючих I_2-підфакторів $\mathcal{M}_i \subset \mathcal{M}$, де $i \in \mathbb{N}$, що породжують $\mathcal{M}$. Нехай $\mathcal{M}_{(n,m]} = (\{\mathcal{M}_i\}_{i=n+1}^{m})''$ і $\{E_{kl}^{j}\}_{k,l=1}^{2}$ — система матричних одиниць фактора $\mathcal{M}_j$. Пряма перевірка показує, що оператор

$$W_n = \sum_{i_1,j_1,i_2,j_2,\ldots,i_n,j_n=1}^{2} E_{i_1j_1}^{1} \cdot E_{j_1i_1}^{n+1} \cdot E_{i_2j_2}^{2} \cdot E_{j_2i_2}^{n+2} \ldots E_{i_nj_n}^{n} \cdot E_{j_ni_n}^{2n}$$

належить до $(\mathcal{M} \otimes \mathcal{M})^{\mathfrak{S}_2}$ та задовольняє умову $W_n \mathcal{M}_{(0,n)} W_n^* = \mathcal{M}_{(n,2n)}$. В алгебрі $\mathcal{M}_{(0,n)}$ існують оператори A_n^E та A_n^F з властивостями

$$\lim_{n\to\infty} \|E - A_n^E\|_2 = \lim_{n\to\infty} \|F - A_n^F\|_2 = 0 \qquad \text{і} \qquad \|A_n^E\|, \qquad \|A_n^F\| \leqslant 1,$$

де $\|A - B\|_2^2 = \operatorname{tr}((A - B)^*(A - B))$.

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} \|E - A_n^E\|_2 = \lim\limits_{n\to\infty} \|F - W_n \cdot A_n^F \cdot W_n^*\|_2 = 0$. Звідси маємо

$$0 = \lim_{n\to\infty} \|A_n^E \cdot F - A_n^E \cdot W_n \cdot A_n^F \cdot W_n^*\|_2 \overset{EF=0}{=} \lim_{n\to\infty} \|A_n^E \cdot W_n \cdot A_n^F \cdot W_n^*\|_2 =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \|A_n^E\|_2 \cdot \|W_n \cdot A_n^F \cdot W_n^*\|_2 = \|E\|_2 \cdot \|F\|_2 \neq 0.$$

Це протиріччя доводить, що $(\mathcal{M}\otimes\mathcal{M})^{\mathfrak{S}_2}$ є II_1-фактором. Властивість *1* з теореми 1 доведено.

Для доведення *2–3*, спираючись на той факт, що $(\mathcal{M} \otimes \mathcal{M})^{\mathfrak{S}_2}$ — фактор, знайдемо $V \in (\mathcal{M}\otimes\mathcal{M})^{\mathfrak{S}_2}$, для якого $V(E_{11}^1 \otimes E_{22}^1 + E_{22}^1 \otimes E_{11}^1)V^* = E_{11}^1 \otimes E_{11}^1 + E_{22}^1 \otimes E_{22}^1$. Отже, унітарний оператор $W = E_{11}^1 \otimes E_{22}^1 - E_{22}^1 \otimes E_{11}^1 + V(E_{11}^1 \otimes E_{22}^1 - E_{22}^1 \otimes E_{11}^1)V^*$ задовольняє співвідношення $\theta_{(12)}(W) = -W$ (див. (2)). Звідси для ортопротекторів $P_2^{(2)} = (I + \mathcal{P}_2((12)))/2$ та $P_2^{(1,1)} = (I - \mathcal{P}_2((12)))/2$ з $(\mathfrak{L}^{\otimes 2}(\mathbb{U}(\mathcal{M})))'$ одержуємо

$$P_2^{(2)} L^2(\mathcal{M}, \operatorname{tr})^{\otimes 2} = L^2((\mathcal{M} \otimes \mathcal{M})^{\mathfrak{S}_2}, \operatorname{tr}^{\otimes 2}),$$
$$P_2^{(1,1)} L^2(\mathcal{M}, \operatorname{tr})^{\otimes 2} = L^2((\mathcal{M} \otimes \mathcal{M})^{\mathfrak{S}_2}, \operatorname{tr}^{\otimes 2}) \cdot W.$$

Отже, зображення, що задаються операторами $\Pi_{(2)}(u) = P_2^{(2)} \cdot \mathfrak{L}^{\otimes 2}(u) \cdot P_2^{(2)}$ та $\Pi_{(1,1)}(u) = P_2^{(1,1)} \cdot \mathfrak{L}^{\otimes 2}(u) \cdot P_2^{(1,1)}$, $u \in \mathbb{U}(\mathcal{M})$, є унітарно еквівалентними. Відповідний сплітаючий оператор визначається правим множенням на W. Властивість *3* доведено. *2* випливає з того факту, що відображення $a \ni \mathfrak{L}^{\otimes 2}(\mathbb{U}(\mathcal{M}))'' \mapsto P_2^{(2)} \cdot a \cdot P_2^{(2)} \in P_2^{(2)} \cdot \mathfrak{L}^{\otimes 2}(\mathbb{U}(\mathcal{M}))'' \cdot P_2^{(2)}$ є ізоморфізмом фактора $\mathfrak{L}^{\otimes 2}(\mathbb{U}(\mathcal{M}))''$ на фактор $P_2^{(2)} \cdot \mathfrak{L}^{\otimes 2}(\mathbb{U}(\mathcal{M}))'' \cdot P_2^{(2)}$.

Робота частково підтримана грантом “Мережа математичних досліджень 2013–2015”.

Цитована література

1. *Weyl H.* The classical groups. Their invariants and representations. – Princeton, N. J.: Princeton Univ. Press, 1997. – 336 p.
2. *Ольшанский Г. И.* Унитарные представления (G, K)-пар, связанных с бесконечной симметрической группой $S(\infty)$ // Алгебра и анализ. – 1989. – **1**, вып. 4. – С. 178–210.
3. *Tsilevich N. V., Vershik A. M.* Infinite-dimensional Schur–Weyl duality and the Coxeter–Laplace operator // Commun. Math. Phys. – 2014. – **327**. – P. 873–885.

4. *Kirillov A. A.* Representations of the infinite-dimensional unitary group // Soviet Math., Dokl. – 1973. – **14**. – P. 1355–1358.
5. *Penkov I., Styrkas K.* Tensor representations of classical locally finite Lie algebras // Developments and Trends in Infinite-Dimensional Lie Theory. – Boston: Birkhäuser, 2011. – P. 127–150. – (Progress in Mathematics; 288).
6. *Takesaki M.* Theory of Operator Algebras, Vol. I. – Berlin; Heidelberg: Springer, 2002. – 416 p.
7. *Takesaki M.* Theory of Operator Algebras, Vol. III. – Berlin; Heidelberg: Springer, 2003. – 548 p.

References

1. *Weyl H.* The classical groups. Their invariants and representations, Princeton, N. J.: Princeton Univ. Press, 1997.
2. *Ol'shanskii G. I.* Leningr. Math. J., 1990, **1**, Iss. 4: 983–1014.
3. *Tsilevich N. V., Vershik A. M.* Commun. Math. Phys., 2014, **327**: 873–885.
4. *Kirillov A. A.* Soviet Math., Dokl., 1973, **14**; 1355–1358.
5. *Penkov I., Styrkas K.* Developments and Trends in Infinite-Dimensional Lie Theory, Boston: Birkhäuser, 2011: 127–150.
6. *Takesaki M.* Theory of Operator Algebras, Vol. I, Berlin; Heidelberg: Springer, 2002.
7. *Takesaki M.* Theory of Operator Algebras, Vol. III, Berlin; Heidelberg: Springer, 2003.

Фізико-технічний інститут низьких температур
ім. Б. І. Вєркіна НАН України, Харків

Надійшло до редакції 17.04.2015

Н. И. Нессонов

Двойственность Шура–Вейля для унитарной группы II_1-фактора

Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины, Харьков

Получен аналог классической двойственности Шура–Вейля для унитарной группы произвольного II_1*-фактора.*

Ключевые слова: двойственность Шура–Вейля, унитарная группа фатора, диаграмма Юнга.

N. I. Nessonov

The Schur–Weyl duality for the unitary group of a II_1-factor

B. I. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the NAS of Ukraine, Kharkiv

We obtain an analogue of the Schur–Weyl duality for the unitary group of an arbitrary II_1*-factor.*

Keywords: Schur–Weyl duality, unitary group of a factor, Young diagram.