УДК 517.9

Л. В. Фардигола

Проблеми керованості для хвильового рівняння на півплощині та модифіковані простори Соболєва

(Представлено академіком НАН України Є. Я. Хрусловим)

Двовимірне хвильове рівняння $w_{tt} = \Delta w$, $t \in (0,T)$, на півплощині $x_1 > 0$, кероване крайовою умовою Діріхле $w(0, x_2, t) = \delta(x_2)u(t)$, досліджене в просторах Соболєва, де $T > 0$ — деяка стала, а $u \in L^\infty(0,T)$ — керування. Цю керовану систему трансформовано в деяку керовану систему для одновимірного хвильового рівняння в модифікованих просторах Соболєва. Ці простори відіграють важливу роль у дослідженні. Для одновимірної задачі керування одержано необхідні і достатні умови (наближеної) L^∞-керованості. Також доведено, що двовимірна керована система відтворює властивості керованості одновимірної керованої системи і навпаки. Нарешті, необхідні і достатні умови (наближеної) L^∞-керованості одержано для вихідної двовимірної задачі керування.

Ключові слова: модифіковані простори Соболєва, хвильове рівняння, проблема керованості, півплощина, керування крайовими умовами Діріхле.

Останнім часом питання керованості для хвильового рівняння вивчалися багатьма дослідниками (див. [1–13] та ін).

Розглянемо хвильове рівняння

$$w_{tt} = \Delta w, \qquad x_1 > 0, \qquad x_2 \in \mathbb{R}, \qquad t \in (0,T), \tag{1}$$

кероване крайовою умовою Діріхле

$$w(0, x_2, t) = \delta(x_2)u(t), \qquad x_2 \in \mathbb{R}, \qquad t \in (0,T), \tag{2}$$

де $T > 0$ є сталою, $u \in L^\infty(0,T)$ — керування, δ — розподіл Дірака, $\Delta = (\partial/\partial x_1)^2 + (\partial/\partial x_2)^2$. Досліджується керованість системи (1), (2) за заданий та вільний час у просторах Соболєва (див. означення нижче). Керованість цієї системи лише за заданий час вивчалася раніше в [3]. Рівняння (1), кероване крайовою умовою Неймана: $w_{x_1}(0, x_2, t) = \delta(x_2)u(t)$, $x_2 \in \mathbb{R}$, $t \in [0,T]$, було досліджене у [8].

Нехай $n \in \mathbb{N}$. Нехай $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ — простір Шварца швидко зростаючих функцій n змінних та $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ — його двоїстий простір помірно зростаючих розподілів (див., наприклад, [14, гл. 1]). Позначимо $H_l^s(\mathbb{R}^n)$, s, $l \in \mathbb{R}$, такі простори Соболєва:

$$H_l^s(\mathbb{R}^n) = \{\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \mid (1 + |D|^2)^{s/2}(1 + |x|^2)^{l/2}\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)\},$$

$$\|\varphi\|_l^s = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |(1 + |D|^2)^{s/2}(1 + |x|^2)^{l/2}\varphi(x)|^2 dx\right)^{1/2},$$

де $|\cdot|$ — евклідова норма в $\mathbb{R}^n$, $D = (-i\partial/\partial x_1, \ldots, -i\partial/\partial x_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Добре відомо [14, гл. 1], що $H_l^s \subset H_{l'}^{s'}$ є неперервним вкладенням, $s' \leqslant s$, $l' \leqslant l$. Позначимо $\mathcal{S}_+ = \{\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \mid \operatorname{supp}\varphi \in \in \mathbb{R}_+\}$, $\mathcal{S}'_+$ — двоїстий простір для $\mathcal{S}_+$, $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$.

Нехай $\mathcal{F}\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ є оператором перетворення Фур'є. Для $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ маємо $(\mathcal{F}\varphi)(\sigma) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x,\sigma\rangle}\varphi(x)dx$, для $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ — $\langle \mathcal{F}f, \psi\rangle = \langle f, \mathcal{F}^{-1}\psi\rangle$. Добре відомо [14, гл. 1], що $\mathcal{F}$ є ізометричним ізоморфізмом $H_0^s(\mathbb{R}^n)$ та $H_s^0(\mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{R}$.

Нехай $n = 2$. Для $s,\ l \in \mathbb{R}$ позначимо через $\widetilde{H}_l^s(\mathbb{R}^2)$ підпростір непарних відносно x_1 розподілів у $H_l^s(\mathbb{R}^2)$ та позначимо $\widetilde{\mathbf{H}}^s = \widetilde{H}_0^s(\mathbb{R}^2) \times \widetilde{H}_0^{s-1}(\mathbb{R}^2)$.

Нехай $s = \overline{0,3}$. Позначимо також $\mathcal{H}_0^s = \{\varphi \in L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) \mid \exists \widetilde{\varphi} \in \widetilde{H}_0^s(\mathbb{R}^2) \varphi(x) = \widetilde{\varphi}(x)$ м. с. на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}\}$ з нормою $[\![\varphi]\!]_0^s = \|\widetilde{\varphi}\|_0^s/\sqrt{2}$, $\varphi \in \mathcal{H}_0^s$, $\widetilde{\varphi} \in \widetilde{H}_0^s(\mathbb{R}^2)$, $\varphi(x) = \widetilde{\varphi}(x)$ м. с. на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, та $\mathcal{H}_0^{-s} = (\mathcal{H}_0^s)'$ з нормою $[\![f]\!]_0^s = \sup\{|\langle f, \varphi\rangle|/[\![\varphi]\!]_0^s \mid [\![\varphi]\!]_0^s \neq 0\}$, $f \in \mathcal{H}_0^{-s}$.

Ми розглядаємо рівність (2), як значення розподілу w на $x_1 = 0$ (див. означення у [8]).

Розглянемо керовану систему (1), (2) за початкових умов

$$w(x,0) = w_0^0(x), \qquad w_t(x,0) = w_1^0, \qquad x_1 > 0, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

у просторах $\mathcal{H}_0^{-s}$, $s = 1, 2, 3$. Тут $w_0^0 \in \mathcal{H}_0^0$, $w_1^0 \in \mathcal{H}_0^{-1}$, $\left(\dfrac{d}{dt}\right)^s w\colon [0,T] \to \mathcal{H}_0^{-s-1}$, $s = 1, 2, 3$, $\Delta\colon \mathcal{H}_0^{-1} \to \mathcal{H}_0^{-3}$. Позначимо через $\mathrm{W}(\cdot,t) = \begin{pmatrix}\mathrm{W}_0(\cdot,t)\\ \mathrm{W}_1(\cdot,t)\end{pmatrix}$ та $\mathrm{W}^0 = \begin{pmatrix}\mathrm{W}_0^0\\ \mathrm{W}_1^0\end{pmatrix}$ непарне продовження відносно x_1 для $\begin{pmatrix} w\\ w_t\end{pmatrix}$ та $\begin{pmatrix} w_0^0\\ w_1^0\end{pmatrix}$ відповідно, $t \in [0,T]$. Тоді $\left(\dfrac{d}{dt}\right)^s \mathrm{W}\colon [0,T] \to \widetilde{\mathbf{H}}^{-s-1}$, $s = 1, 2$, $\mathrm{W}^0 \in \widetilde{\mathbf{H}}^0$. Отже, w є розв'язком задачі (1)–(3) тоді і лише тоді, коли W є розв'язком задачі

$$\frac{d}{dt}\mathrm{W} = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ \Delta & 0\end{pmatrix}\mathrm{W} - 2\delta'(x_1)\delta(x_2)u(t)\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}, \qquad t \in (0,T), \tag{4}$$

$$\mathrm{W}(\cdot,0) = \mathrm{W}^0, \tag{5}$$

де $\delta \in H_0^{-2}(\mathbb{R}^2)$ — розподіл Дірака. Далі ми вивчаємо керовану систему (4), (5) замість (1)–(3).

Простори та оператори. Нехай $n = 1$. Для $s,\ l \in \mathbb{R}$ позначимо $H_l^s = H_l^s(\mathbb{R})$, $\widetilde{H}_l^s = \widetilde{H}_l^s(\mathbb{R})$. Далі до кінця цього пункту вважатимемо, що $s \in \mathbb{R}$.

Розглянемо простір $H_{s[-1/2]}^0 = \{\varphi \in H_{s-1/2}^0 \mid \exists \overline{\varphi} \in H_s^0 \varphi = \sqrt{|\rho|}\overline{\varphi}\}$ з нормою $|\varphi|_{s[-1/2]}^0 = \|\varphi/\sqrt{|\rho|}\|_s^0$, $\varphi \in H_{s[-1/2]}^0$, та його двоїстий простір $H_{-s[1/2]}^0 = (H_{s[-1/2]}^0)'$ із сильною топологією, тобто $|f|_{-s[1/2]}^0 = \sup\{|\langle f, \varphi\rangle|/|\varphi|_{s[-1/2]}^0 \mid |\varphi|_{s[-1/2]}^0 \neq 0\}$, $f \in H_{-s[1/2]}^0$. Очевидно, $|f|_{-s[1/2]}^0 = \|\sqrt{|\rho|}f\|_{-s}^0$, $f \in H_{-s[1/2]}^0$. Ці простори було введено та досліджено у [8]. Зокрема, доведено, що простори $H_{s[-1/2]}^0$ та $H_{-s[1/2]}^0$ є повними і $H_{s[-1/2]}^0 \subset H_{s-1/2}^0$ та $H_{-s+1/2}^0 \subset H_{-s[1/2]}^0$ є неперервними вкладеннями. Також там було доведено, що якщо $f \in H_{-s[1/2]}^0$, то $f \in H_{-s+1/2}^{-3/2}$.

Розглянемо простори $H_0^{s[-1/2]} = \mathcal{F}H_{s[-1/2]}^0$ та $H_0^{-s[1/2]} = \mathcal{F}H_{-s[1/2]}^0$ з нормами $|\varphi|_0^{s[-1/2]} = |\mathcal{F}\varphi|_{s[-1/2]}^0$, $\varphi \in H_0^{s[-1/2]}0$, та $|f|_0^{-s[1/2]} = |\mathcal{F}f|_{-s[1/2]}^0$, $f \in H_0^{-s[1/2]}$. Очевидно, $H_0^{-s[1/2]} = (H_0^{s[-1/2]})'$. З властивостей просторів $H_{s[-1/2]}^0$ та $H_{-s[-1/2]}^0$ випливає, що $H_0^{s[-1/2]}$ та $H_0^{-s[1/2]}$ є повними, $H_0^{s[-1/2]} \subset H_0^{s-1/2}$ та $H_0^{-s+1/2} \subset H_0^{-s[1/2]}$ є неперервними вкладеннями і якщо

$f \in H_0^{-s[1/2]}$, то $f \in H_{-3/2}^{-s+1/2}$. Позначимо через $\widetilde{H}_0^{-s[1/2]}$ підпростір непарних розподілів $H_0^{-s[1/2]}$.

Введемо підпростори

$$\mathbb{H}^s = \left\{G \in H_0^s(\mathbb{R}^2) \mid \exists g \in \mathcal{S}'_+ G(x) = \frac{\partial}{\partial x_1} g(|x|)\right\},$$

$$\mathbb{H}_s = \{F \in H_s^0(\mathbb{R}^2) \mid \exists f \in \mathcal{S}'_+ F(\sigma) = i\sigma_1 f(|\sigma|)\}$$

просторів $H_0^s(\mathbb{R}^2)$ та $H_s^0(\mathbb{R}^2)$ відповідно. Очевидно, $\mathbb{H}_s = \mathcal{F}\mathbb{H}^s$. Якщо $f \in \mathbb{H}_s$, то існує функція f така, що $F(\sigma) = i\sigma_1 f(|\sigma|)$, $\sigma \in \mathbb{R}^2$, та

$$\|F\|_s^0 = \sqrt{\pi}\||\rho|^{3/2} f\|_s^0. \tag{6}$$

Отже, простір $\mathbb{H}_s$ є повним. Оскільки перетворення Фур'є $\mathcal{F}$ є ізометричним ізоморфізмом $H_0^s(\mathbb{R}^2)$ і $H_s^0(\mathbb{R}^2)$ [14, гл. 1], то воно є ізометричним ізоморфізмом $\mathbb{H}^s$ і $\mathbb{H}_s$. Отже, простір $\mathbb{H}^s$ є також повним. Позначимо $\widetilde{\mathbb{H}}^s = \mathbb{H}^s \times \mathbb{H}^{s-1}$. Бачимо, що цей простір є підпростором $\widetilde{\mathbf{H}}^s$.

Позначимо $\mathbf{\Psi}\colon \widetilde{H}_0^{-3[1/2]} \to \mathbb{H}^{-3}$, $D(\mathbf{\Psi}) = \widetilde{H}_0^{-3[1/2]}$,

$$\mathbf{\Psi} f = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\sigma_1}{|\sigma|}(\mathcal{F}f)(|\sigma|)\right), \qquad f \in D(\mathbf{\Psi}).$$

Для оператора $\mathbf{\Psi}$ справедливі такі теореми.

Теорема 1. *Оператор $\mathbf{\Psi}$ є ізоморфізмом $\widetilde{H}_0^{s[1/2]}$ та $\mathbb{H}_0^s$. Крім того, $\|\mathbf{\Psi} f\|_0^s = \sqrt{\pi}|f|_0^{-s[1/2]}$, $f \in D(\mathbf{\Psi})$, $s \geqslant -3$.*

Теорема 2. *Маємо $\Delta\mathbf{\Psi} f = \mathbf{\Psi}(f'')$, $f \in \widetilde{H}_0^{s[1/2]}$, $s \geqslant -3$.*

Теорема 3. *Нехай $\alpha > 0$. Якщо $f \in \widetilde{H}_0^{0[1/2]}$ та $G = \mathbf{\Psi} f$, то $\operatorname{supp} f \subset [-\alpha, \alpha]$ у тому і лише тому випадку, коли $\operatorname{supp} G \subset D_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leqslant \alpha\}$.*

Перетворення між двовимірною та одновимірною керованими системами. Розглянемо керовану систему (4), (5) та допоміжну керовану систему

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Z}(\cdot,t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (d/d\xi)^2 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{Z}(\cdot,t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\delta'(\xi)u(t), \qquad t \in (0,T), \tag{7}$$

$$\mathrm{Z}(\cdot,0) = \mathrm{Z}^0, \tag{8}$$

з тими самими $T > 0$ та $u \in L^\infty(0,T)$. Тут $\delta \in H_0^{-2[1/2]}$ є розподілом Дірака, $\left(\frac{d}{dt}\right)^s \mathrm{Z}\colon [0,T] \to \to \widetilde{\mathbf{H}}^{-(s+1)[1/2]}$, $s = 0, 1$, $\mathrm{Z}^0 \in \widetilde{\mathbf{H}}^{0[1/2]}$.

Для заданих $T > 0$ та $\mathrm{W}^0 \in \widetilde{\mathbf{H}}^0$ ($\mathrm{Z}^0 \in \widetilde{\mathbf{H}}^{0[1/2]}$) позначимо через $\mathcal{R}_T^2(\mathrm{W}^0)$ ($\mathcal{R}_T^1(\mathrm{Z}^0)$, відповідно) множину кінцевих станів $\mathrm{W}^T \in \widetilde{\mathbf{H}}^0$ ($\mathrm{Z}^T \in \widetilde{\mathbf{H}}^{0[1/2]}$, відповідно), для яких існує керування $u \in L^\infty(0,T)$ таке, що (4), (5) ((7), (8), відповідно) має єдиний розв'язок W (Z, відповідно) і $\mathrm{W}(\cdot,T) = \mathrm{W}^T$ ($\mathrm{Z}(\cdot,T) = \mathrm{Z}^T$, відповідно). Позначимо також $\mathcal{R}_\infty^j(\mathrm{Z}^0) = \bigcup_{T>0} \mathcal{R}_T^j(\mathrm{Z}^0)$, $j = 1, 2$.

Означення 1. Стан $\mathrm{W}^0 \in \widetilde{\mathbf{H}}^0$ ($\mathrm{Z}^0 \in \widetilde{\mathbf{H}}^{0[1/2]}$) називається L^∞-керованим відносно системи (4), (5) ((7), (8), відповідно) за заданий час $T > 0$, якщо 0 належить $\mathcal{R}_T^2(\mathrm{W}^0)$ ($\mathcal{R}_T^1(\mathrm{Z}^0)$, відповідно), та наближено L^∞-керованим відносно цієї системи за заданий час $T > 0$, якщо 0 належить замиканню $\mathcal{R}_T^2(\mathrm{Z}^0)$ в $\widetilde{\mathbf{H}}^0$ (замиканню $\mathcal{R}_T^1(\mathrm{Z}^0)$ в $\widetilde{\mathbf{H}}^{0[1/2]}$, відповідно).

Означення 2. Стан $\mathrm{W}^0 \in \widetilde{\mathbf{H}}^0$ ($\mathrm{Z}^0 \in \widetilde{\mathbf{H}}^{0[1/2]}$) називається наближено L^∞-керованим відносно системи (4), (5) ((7), (8), відповідно) за вільний час, якщо 0 належить замиканню $\mathcal{R}^2_\infty(\mathrm{Z}^0)$ в $\widetilde{\mathbf{H}}^0$ (замиканню $\mathcal{R}^1_\infty(\mathrm{Z}^0)$ в $\widetilde{\mathbf{H}}^{0[1/2]}$, відповідно).

Аналогічно теоремі 4.1 у [8] доводимо нижченаведену теорему і одержуємо висновок.

Теорема 4. *Нехай керування $u_n(t)$, $t \in [0, T_n]$, $n = \overline{1, \infty}$, розв'язують проблему наближеної L^∞-керованості відносно системи* (4), (5) *для стану* $\mathrm{W}^0 \in \widetilde{\mathbf{H}}^0$. *Нехай* W^n *є розв'язком* (4), (5) *з* $u = u_n$, $T = T_n$, $n = \overline{1, \infty}$. *Тоді цей розв'язок є єдиним,* $\mathrm{W}^n(\cdot, t) \in \widetilde{\mathbb{H}}^{-1}$, $t \in [0, T_n]$, $n = \overline{1, \infty}$, *та* $\mathrm{W}^0 \in \widetilde{\mathbb{H}}^0$.

Висновок 1. *Нехай* $T > 0$, $u \in L^\infty(0, T)$ *та* $\mathrm{W}^0 \in \widetilde{\mathbb{H}}^0$. *Нехай* W *є розв'язком* (4), (5). *Тоді* $\mathrm{W}(\cdot, t) \in \widetilde{\mathbb{H}}^{-1}$, $t \in [0, T]$.

Враховуючи теорему 4 та висновок 1, ми можемо розглядати проблеми керованості відносно системи (4), (5) в просторах $\widetilde{\mathbb{H}}^{-s}$ замість просторів $\widetilde{\mathbf{H}}^{-s}$, $s = 1, 2$. Аналогічно теоремам 4.3 та 4.4 у [8] доводимо такі дві теореми.

Теорема 5. *Нехай* $T > 0$, $u \in L^\infty(0, T)$, $\mathrm{Z}^0 \in \widetilde{\mathbf{H}}^{0[1/2]}$, $\mathrm{W}^0 = \mathbf{\Psi}\mathrm{Z}^0$. *Нехай* Z *є розв'язком* (7), (8) *та* $\mathrm{W}(\cdot, T) = \mathbf{\Psi}\mathrm{Z}(\cdot, t)$, $t \in [0, T]$. *Тоді* W *є розв'язком* (4), (5), $\mathrm{W}^0 \in \widetilde{\mathbb{H}}^0$ *та* $\mathrm{W}(\cdot, t) \in \widetilde{\mathbb{H}}^{-1}$, $t \in [0, T]$.

Теорема 6. *Нехай* $T > 0$, $u \in L^\infty(0, T)$, $\mathrm{W}^0 \in \widetilde{\mathbb{H}}^0$, $\mathrm{Z}^0 = \mathbf{\Psi}^{-1}\mathrm{W}^0$. *Нехай* W *є розв'язком* (4), (5) *та* $\mathrm{Z}(\cdot, T) = \mathbf{\Psi}^{-1}\mathrm{W}(\cdot, t)$, $t \in [0, T]$. *Тоді* Z *є розв'язком* (7), (8), $\mathrm{Z}^0 \in \widetilde{\mathbf{H}}^{0[1/2]}$ *та* $\mathrm{Z}(\cdot, t) \in \widetilde{\mathbf{H}}^{-1[1/2]}$, $t \in [0, T]$.

З теорем 1, 6 і теорем 4.3, 4.4 у [8] одержуємо

Висновок 2. *Нехай* $\mathrm{W}^0 \in \widetilde{\mathbb{H}}^0$ *та* $\mathrm{Z}^0 = \mathbf{\Psi}^{-1}\mathrm{W}^0$. *Тоді* $\mathrm{Z}^0 \in \widetilde{\mathbf{H}}^{0[1/2]}$ *і виконано такі твердження.*

1. Стан W^0 *є* L^∞*-керованим відносно системи* (4), (5) *за заданий час* $T > 0$ *тоді і лише тоді, коли* Z^0 *є* L^∞*-керованим відносно системи* (7), (8) *за той самий час.*

2. Стан W^0 *є наближено* L^∞*-керованим відносно системи* (4), (5) *за заданий час* $T > 0$ *тоді і лише тоді, коли* Z^0 *є наближено* L^∞*-керованим відносно системи* (7), (8) *за той самий час.*

3. Стан W^0 *є наближено* L^∞*-керованим відносно системи* (4), (5) *за вільний час тоді і лише тоді, коли* Z^0 *є наближено* L^∞*-керованим відносно системи* (7), (8) *за вільний час.*

Таким чином, двовимірна керована система (4), (5) відтворює властивості керованості одновимірної керованої системи (7), (8) і навпаки.

Допоміжна керована система. Керовану систему (7), (8) в класичних просторах Соболєва H_0^s було вивчено в [11]. Оскільки топологія просторів $H_0^{s[1/2]}$ досить суттєво відрізняється від топології H_0^s, нам доводиться наново вивчати цю систему в модифікованих просторах Соболєва $H_0^{s[1/2]}$. З тієї ж причини керування будується іншим способом.

Нижченаведені три твердження одержуємо аналогічно теоремам 5.3, 5.5 та висновку 5.4 у [8].

Теорема 7. *Стан* $\mathrm{Z}^0 \in \widetilde{\mathbf{H}}^{0[1/2]}$ *є* L^∞*-керованим відносно системи* (7), (8) *за заданий час* $T > 0$ *тоді і лише тоді, коли*

$$\mathrm{Z}_1^0 = (\operatorname{sgn} \xi \mathrm{Z}_0^0)', \tag{9}$$

$$\operatorname{supp} \mathrm{Z}_0^0 \subset [-T, T], \tag{10}$$

$$\mathrm{Z}_0^0 \in L^\infty(\mathbb{R}). \tag{11}$$

Крім того, за умов (9)–(11) *керування* $u(t) = \mathrm{Z}_0^0(t)$, $t \in [0, T]$, *розв'язує проблему* L^∞*-керованості відносно системи* (7), (8) *для* Z^0 *за час* $T > 0$.

Теорема 8. *Стан* $\mathrm{Z}^0 \in \widetilde{\mathbf{H}}^{0[1/2]}$ *є наближено* L^∞*-керованим відносно системи* (7), (8) *за заданий час* $T > 0$ *тоді і лише тоді, коли виконано умови* (9), (10). *Крім того, за цих умов керування* $u_n(t) = \mathrm{Z}_0^0(tn/(n-1)) * n\varphi(tn)$, $t \in [0,T]$, $n = \overline{2,\infty}$, *розв'язують проблему наближеної* L^∞*-керованості відносно системи* (7), (8) *за час* $T > 0$ *для стану* Z^0, *де* $\varphi(\xi) = 0$ *для* $|\xi| \geqslant 1$, $\varphi(\xi) = 4(1-|\xi|)/3$ *для* $1/2 \leqslant |\xi| < 1$ *та* $\varphi(\xi) = 2/3$ *для* $|\xi| < 1/2$.

Теорема 9. *Стан* $\mathrm{Z}^0 \in \widetilde{\mathbf{H}}^{0[1/2]}$ *є наближено* L^∞*-керованим відносно системи* (7), (8) *за вільний час тоді і лише тоді, коли виконано умову* (9).

Головна керована система. У цьому пункті ми досліджуємо керовану систему (4), (5), застосовуючи результати попередніх двох пунктів. З теорем 3, 4, 7, 9 та висновків 1, 2, 8 випливають такі три теореми.

Теорема 10. *Стан* $\mathrm{W}^0 \in \widetilde{\mathbf{H}}^0$ *є* L^∞*-керованим відносно системи* (4), (5) *за заданий час* $T > 0$ *тоді і лише тоді, коли*

$$\mathrm{W}^0 \in \widetilde{\mathbb{H}}^1, \tag{12}$$

$$\mathrm{W}_1^0 = \mathbf{\Psi}(\operatorname{sgn} x(\mathbf{\Psi}^{-1}\mathrm{W}_0^0)'), \tag{13}$$

$$\operatorname{supp} \mathrm{W}_0^0 \in \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leqslant T\}, \tag{14}$$

$$\mathbf{\Psi}^{-1}\mathrm{W}_0^0 \subset L^\infty(\mathbb{R}). \tag{15}$$

Крім того, за умов (12)–(15) *керування* $u(t) = (\mathbf{\Psi}^{-1}\mathrm{W}_0^0)(t)$, $t \in [0,T]$, *розв'язує проблему* L^∞*-керованості відносно системи* (4), (5) *для* Z^0 *за час* $T > 0$.

Теорема 11. *Стан* $\mathrm{W}^0 \in \widetilde{\mathbf{H}}^0$ *є наближено* L^∞*-керованим відносно системи* (4), (5) *за заданий час* $T > 0$ *тоді і лише тоді, коли виконано умови* (12)–(14). *Крім того, за цих умов керування* $u_n(t) = (\mathbf{\Psi}^{-1}\mathrm{W}_0^0)(tn/(n-1)) * n\varphi(tn)$, $t \in [0,T]$, $n = \overline{2,\infty}$, *розв'язують проблему наближеної* L^∞*-керованості відносно системи (4), (5) за час* $T > 0$ *для стану* W^0, *де* $\varphi(\xi) = 0$ *для* $|\xi| \geqslant 1$, $\varphi(\xi) = 4(1-|\xi|)/3$ *для* $1/2 \leqslant |\xi| < 1$ *та* $\varphi(\xi) = 2/3$ *для* $|\xi| < 1/2$.

Теорема 12. *Стан* $\mathrm{W}^0 \in \widetilde{\mathbf{H}}^0$ *є наближено* L^∞*-керованим відносно системи* (4), (5) *за вільний час тоді і лише тоді, коли виконано умови* (12) *та* (13).

Цитована література

1. *Белишев М. И., Вакуленко А. Ф.* Об одной задаче управления для волнового уравнения в $\mathbb{R}^3$ // Зап. научн. сем. ПОМИ. – 2006. – **332**. – С. 19–37.
2. *Castro C.* Exact controllability of the 1-D wave equation from a moving interior point // ESAIM: Control, Optim. Calc. Var. – 2013. – **19**. – P. 301–316.
3. *Fardigola L. V.* On controllability problems for the wave equation on a half-plane // J. Math. Phys., Anal., Geom. – 2005. – **1**. – P. 93–115.
4. *Fardigola L. V.* Controllability problems for the 1-d wave equation on a half-axis with the Dirichlet boundary control // ESAIM: Control, Optim. Calc. Var. – 2012. – **18**. – P. 748–773.
5. *Fardigola L. V.* Transformation operators of the Sturm-Liouville problem in controllability problems for the wave equation on a half-axis // SIAM J. Control Optim. – 2013. – **51**. – P. 1781–1801.
6. *Fardigola L. V.* Controllability problems for the 1-d wave equations on a half-axis with Neumann boundary control // Math. Control and Related Fields. – 2013. – **3**. – P. 161–183.
7. *Fardigola L. V.* Transformation operators in controllability problems for the wave equations with variable coefficients on a half-axis controlled by the Dirichlet boundary condition // Math. Control and Related Fields. – 2015. – **5**. – P. 31–53.
8. *Fardigola L. V.* Modified Sobolev spaces in controllability problems for the wave equation on a half-plane // J. Math. Phys., Anal., Geom. – 2015. – **11**. – P. 18–44.

9. *Gugat M., Sokolowski J.* A note on the approximation of Dirichlet boundary control problems for the wave equation on curved domains // Appl. Anal. – 2012. – **92**. – P. 2200–2214.
10. *Lui Y.* Some sufficient conditions for the controllability of the wave equation with variable coefficients // Acta Appl. Math. – 2013. – **128**. – P. 181–191.
11. *Sklyar G. M., Fardigola L. V.* The Markov power moment problem in problems of controllability and frequency extinguishing for the wave equation on a half-axis // J. Math. Anal. Appl. – 2002. – **276**. – P. 109–134.
12. *Privat Y., Trélat E., Zuazua E.* Optimal location of controllers for the one-dimensional wave equation // Ann. Inst. Poincaré (C). Non Linéair Analysis. – 2013. – **30**. – P. 1097–1126.
13. *Seck Ch., Bayili G., Séne A., Niane M. T.* Contrôlabilité exacte de l'équation des ondes dans des espaces de Sobolev non réguliers pour un ouvert polygonal // Afr. Mat. – 2012. – **23**. – P. 1–9.
14. *Gindikin S. G., Volevich L. R.* Distributions and Convolution Equations. – Philadelphia: Gordon and Breach, 1992. – 465 p.

References

1. *Belishev M. I., Vakulenko A.F.* J. Math. Sci, 2007, **142**, Iss. 6: 2528–2539.
2. *Castro C.* ESAIM: Control, Optim. Calc. Var, 2013, **19**: 301–316.
3. *Fardigola L. V.* J. Math. Phys., Anal., Geom, 2005, **1**: 93–115.
4. *Fardigola L. V.* ESAIM: Control, Optim. Calc. Var, 2012, **18**: 748–773.
5. *Fardigola L. V.* SIAM J. Control Optim, 2013, **51**: 1781–1801.
6. *Fardigola L. V.* Math. Control and Related Fields, 2013, **3**: 161–183.
7. *Fardigola L. V.* Math. Control and Related Fields, 2015, **5**: 31–53.
8. *Fardigola L. V.* J. Math. Phys., Anal., Geom, 2015, **11**: 18–44.
9. *Gugat M., Sokolowski J.* Appl. Anal., 2012, **92**: 2200–2214.
10. *Lui Y.* Acta Appl. Math, 2013, **128**: 181–191.
11. *Sklyar G. M., Fardigola L. V.* J. Math. Anal. Appl, 2002, **276**: 109–134.
12. *Privat Y., Trélat E., Zuazua E.* Ann. Inst. Poincaré (C). Non Linéair Analysis, 2013, **30**: 1097–1126.
13. *Seck Ch., Bayili G., Séne A., Niane M. T.* Afr. Mat., 2012, **23**: 1–9.
14. *Gindikin S. G., Volevich L. R.* Distributions and Convolution Equations, Philadelphia: Gordon and Breach, 1992.

Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б. І. Веркіна НАН України, Харків

Надійшло до редакції 31.03.2015

Л. В. Фардигола

Проблемы управляемости для волнового уравнения на полуплоскости и модифицированные пространства Соболева

Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины, Харьков

Двумерное волновое уравнение $w_{tt} = \Delta w$, $t \in (0, T)$, на полуплоскости $x_1 > 0$, управляемое краевым условием Дирихле $w(0, x_2, t) = \delta(x_2)u(t)$, исследовано в пространствах Соболева, где $T > 0$ — некоторая постоянная, а $u \in L^\infty(0, T)$ — управление. Эта управляемая система трансформирована в некоторую управляемую систему для одномерного волнового уравнения в модифицированных пространствах Соболева. Эти пространства играют важную роль в исследовании. Для одномерной задачи управления получены необходимые и достаточные условия (приближенной) L^∞-управляемости. Также доказано, что двумерная управляемая *система воспроизводит свойства управляемости одномерной управляемой системы и наоборот. Наконец, необходимые и достаточные условия (приближенной) L^∞-управляемости получены для исходной двумерной задачи управления.*

Ключевые слова: модифицированные пространства Соболева, волновое уравнение, проблема управляемости, полуплоскость, управление краевыми условиями Дирихле.

L. V. Fardigola

Controllability problems for the wave equation on a half-plane and modified Sobolev spaces

B. I. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the NAS of Ukraine, Kharkiv

The 2-d wave equation $w_{tt} = \Delta w$, $t \in (0, T)$, on the half-plane $x_1 > 0$ controlled by the Dirichlet boundary condition $w_{x_1}(0, x_2, t) = \delta(x_2)u(t)$ is considered in Sobolev spaces, where $T > 0$ is a constant and $u \in L^\infty(0, T)$ is a control. This control system is transformed to a control system for the 1-d wave equation in modified Sobolev spaces. These spaces play an important role in the study. Necessary and sufficient conditions of (approximate) L^∞-controllability are obtained for the 1-d control problem. It is also proved that the 2-d control system replicates the controllability properties of the 1-d control system and vice versa. Finally, necessary and sufficient conditions of (approximate) L^∞-controllability are obtained for the original 2-d control problem.

Keywords: modified Sobolev spaces, wave equation, controllability problem, half-plane, Dirichlet boundary control.