http://dx.doi.org/10.15407/dopovidi2016.10.015
УДК 517.927

О.О. Мурач, В.О. Солдатов

Інститут математики НАН України, Київ
E-mail: murach@imath.kiev.ua, soldatovvo@ukr.net

Неперервність за параметром розв'язків лінійних крайових задач у просторах Гельдера–Зігмунда

(Представлено членом-кореспондентом НАН України А.Н. Кочубеєм)

Введено і досліджено найбільш широкий клас лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язки яких належать до комплексного простору Гельдера–Зігмунда. Для таких задач встановлено конструктивний критерій неперервності за параметром розв'язків у цьому просторі.

Ключові слова: *система диференціальних рівнянь, крайова задача, простір Гельдера–Зігмунда, неперервність за параметром.*

Питання щодо обґрунтування граничного переходу в системах диференціальних рівнянь виникають у різних задачах сучасної математики. Найбільш ґрунтовно ці питання досліджено стосовно задачі Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку. У роботах І.І. Гіхмана [1], М.А. Красносельського і С.Г. Крейна [2], Я. Курцвейля і З. Ворела [3], А.М. Самойленка [4] встановлено фундаментальні теореми про умови неперервної залежності за параметром її розв'язків. Більшість із цих результатів характеризується спільним підходом до дослідження лінійних і нелінійних систем.

Крайові задачі, залежні від параметра, істотно менш вивчені, ніж задача Коші. У роботах І.Т. Кігурадзе [5, 6] і М. Ашордіа [7] введено і досліджено клас загальних лінійних крайових задач для систем диференціальних рівнянь першого порядку. Ці задачі характеризуються тим, що їх розв'язки є абсолютно неперервними на відрізку $[a, b]$ функціями, диференціальні рівняння виконуються майже скрізь на $[a, b]$, а крайові умови мають вигляд $By = q$, де $B : C([a, b], \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}^m$ є довільний неперервний лінійний оператор (m — число диференціальних рівнянь у системі). У цих роботах встановлено умови неперервної залежності за параметром розв'язків у просторі $C([a, b], \mathbb{R}^m)$. Недавно ці результати були уточнені та узагальнені на комплекснозначні функції і системи диференціальних рівнянь довільного порядку [8—10].

У цій роботі ми вводимо і досліджуємо новий клас крайових задач для систем диференціальних рівнянь першого порядку, пов'язаний із класичною шкалою комплексних функціональних просторів Гельдера—Зігмунда $C^s := C^s([a, b], \mathbb{C})$, де дійсне $s > 0$. Припускається, що коефіцієнти і праві частини цих систем належать до C^s. Оскільки розв'язки кожної такої системи пробігають увесь простір $(C^{s+1})^m$, то для неї ставиться найбільш загальна крайова умова вигляду $By = q$, де

$B : (C^{s+1})^m \to \mathbb{C}^m$ є довільний неперервний лінійний оператор. Ця умова охоплює як усі відомі типи класичних крайових умов, так і різні некласичні крайові умови. Останні можуть містити похідні шуканих функцій до порядку $[s] + 1$ включно. Ці крайові задачі називаємо тотальними щодо простору C^{s+1}.

Основний результат роботи — конструктивний критерій неперервності за параметром їх розв'язків у просторі $(C^{s+1})^m$. Буде також показано, що похибка і нев'язка цих розв'язків мають однаковий порядок.

Відзначимо, що тотальні крайові задачі щодо інших важливих класів функцій — просторів Соболєва і просторів $C^{(n+1)}$ — введено і досліджено в роботах [11—13] і [14] відповідно. Там встановлено достатні умови неперервності за параметром розв'язків цих задач.

1. Крайові задачі, тотальні щодо простору Гельдера—Зігмунда. Нехай довільним чином вибрано (скінченний) відрізок $[a, b] \subset \mathbb{R}$, натуральне число m і дійсне число $s > 0$. Будемо використовувати комплексні простори Гельдера—Зігмунда $(C^s)^m := C^s([a, b], \mathbb{C}^m)$ та $(C^s)^{m\times m} := C^s([a, b], \mathbb{C}^{m\times m})$. Вони складаються відповідно з усіх вектор-функцій та матриць-функцій порядку m, елементи яких належать до простору C^s, і наділені нормами, що є сумою норм у C^s усіх компонентів цих функцій. Означення простору Гельдера—Зігмунда C^s порядку s нагадаємо наприкінці цього пункту.

Розглянемо таку крайову задачу для системи m лінійних диференціальних рівнянь першого порядку:

$$Ly(t) \equiv y'(t) + A(t)y(t) = f(t), \quad a \leqslant t \leqslant b, \tag{1}$$

$$By = q. \tag{2}$$

Тут вектор-функція $y \in (C^{s+1})^m$ є шуканою і довільним чином задано матрицю-функцію $A \in (C^s)^{m\times m}$, вектор-функцію $f \in (C^s)^m$, лінійний неперервний оператор $B : (C^{s+1})^m \to \mathbb{C}^m$ та вектор $q \in \mathbb{C}^m$. У роботі вектори інтерпретуємо як стовпці. Цю крайову задачу називаємо тотальною щодо простору C^{s+1}.

Перепишемо її у вигляді $(L, B)y = (f, q)$ за допомогою лінійного неперервного оператора

$$(L, B) : (C^{s+1})^m \to (C^s)^m \times \mathbb{C}^m. \tag{3}$$

Теорема 1. *Оператор* (3) *є фредгольмовим.*

Нагадаємо, що лінійний неперервний оператор $T : E_1 \to E_2$, де E_1 і E_2 — банахові простори, називають фредгольмовим, якщо його ядро $\ker T$ і коядро $E_2 = T(E_1)$ скінченновимірні та мають однакову вимірність. Якщо цей оператор фредгольмів, то його область значень $T(E_1)$ замкнена в E_2, а індекс $\dim\ker T - \dim(E_2/T(E_1))$ дорівнює нулю.

Дамо критерій оборотності оператора (3). Виберемо довільним чином точку $t_0 \in [a, b]$. Позначимо через $Y = Y = (y_{j,k})_{j,k=1}^m$ єдиний розв'язок матричної задачі Коші

$$Y'(t) = -A(t)Y(t), \; a \leqslant t \leqslant b, \; Y(t_0) = I_m, \tag{4}$$

де I_m — одинична матриця порядку m. Зауважимо, що $Y \in (C^{s+1})^{m\times m}$. Покладемо

$$[BY] := \left(B\begin{pmatrix} y_{1,1} \\ \vdots \\ y_{m,1} \end{pmatrix} \ldots B\begin{pmatrix} y_{1,m} \\ \vdots \\ y_{m,m} \end{pmatrix} \right).$$

Теорема 2. *Оператор* (3) *оборотний тоді і тільки тоді, коли* $\det[BY] \neq 0$.

Наприкінці цього пункту нагадаємо означення просторів Гельдера–Зігмунда на $[a, b]$ й обговоримо деякі поняття і позначення, пов'язані з цими просторами (див., наприклад, [15, пп. 2.7, 4.5]). Банахів простір $C^{(l)} := C^{(l)}([a, b], \mathbb{C})$ усіх l разів неперервно диференційовних функцій $x : [a, b] \to \mathbb{C}$, де ціле $l \geqslant 0$, наділяємо нормою

$$\|x\|_{(l)} := \sum_{j=0}^{l} \max_{a\leqslant t\leqslant b} |x^{(j)}(t)|.$$

Дійсне число $s > 0$ зображається єдиним чином у вигляді $s = [s]^{-} + \{s\}^{+}$, де $[s]^{-} \in \mathbb{Z}$ і $0 < \{s\}^{+} \leqslant 1$. За означенням, комплексний лінійний простір $C^s := C^s([a, b], \mathbb{C})$ складається з усіх функцій $x \in \in C^{([s]^{-})}$ таких, що

$$\left\| x^{([s]^{-})} \right\|'_{\{s\}^{+}} := \sup_{a \leqslant t_1 < t_2 \leqslant b} \frac{\left| x^{([s]^{-})}(t_2) - 2x^{([s]^{-})}((t_1 + t_2)/2) + x^{([s]^{-})}(t_1) \right|}{\left| t_2 - t_1 \right|^{\{s\}^{+}}} < \infty.$$

Цей простір є банаховим відносно норми

$$\| x \|_s := \| x \|_{([s]^{-})} + \left\| x^{([s]^{-})} \right\|'_{\{s\}^{+}}.$$

Якщо число s неціле, то вона еквівалентна нормі

$$\|x\|_{([s])} + \sup_{a \leqslant t_1 < t_2 \leqslant b} \frac{\left| x^{([s])}(t_2) - x^{([s])}(t_1) \right|}{\left| t_2 - t_1 \right|^{\{s\}}}, \tag{5}$$

причому $x \in C^s$ тоді і лише тоді, коли величина (5) скінченна. (У цьому випадку ціла $[s]$ і дробова $\{s\}$ частини числа s збігаються з числами $[s]^{-}$ і $\{s\}^{+}$ відповідно.) Зазначимо, що для кожного дійсного $s > 0$ простір Гельдера–Зігмунда C^s є банаховою алгеброю відносно деякої норми, еквівалентної $\|\cdot\|_s$. Норми в просторах $(C^s)^m$ і $(C^s)^{m \times m}$ також позначаємо через $\|\cdot\|_s$. З контексту завжди буде зрозуміло, у якому саме просторі Гельдера–Зігмунда порядку s (скалярних, вектор- чи матриць-функцій) розглядається ця норма.

2. Неперервність розв'язків за параметром. Припустимо, що крайова задача (1), (2) залежить від числового параметра $\varepsilon \in [0; \varepsilon_0)$, де фіксоване число $\varepsilon_0 > 0$. Встановимо критерій неперервності її розв'язку $y = y(\cdot, \varepsilon)$ за цим параметром у просторі $(C^{s+1})^m$ при $\varepsilon \to 0+$.

Отже, розглядаємо крайову задачу

$$L(\varepsilon)y(t,\varepsilon) = y'(t,\varepsilon) + A(t,\varepsilon)y(t,\varepsilon) = f(t,\varepsilon), \ a \leqslant t \leqslant b; \tag{6}$$

$$B(\varepsilon)y(\cdot,\varepsilon) = q(\varepsilon), \tag{7}$$

залежну від $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$. Припускаємо, що для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ ця задача є тотальною щодо простору C^{s+1}, тобто шукана вектор-функція $y(\cdot, \varepsilon)$ належить до $(C^{s+1})^m$ і довільно задано матрицю-функцію $A(\cdot, \varepsilon) \in (C^s)^{m \times m}$, вектор-функцію $f(\cdot, \varepsilon) \in (C^s)^m$, лінійний неперервний оператор $B(\varepsilon) : (C^{s+1})^m \to \mathbb{C}^m$ і вектор $q(\varepsilon) \in \mathbb{C}^m$.

Для крайової задачі (6), (7) розглянемо такі чотири умови.

Граничні умови при $\varepsilon \to 0+$:

(I) $A(\cdot, \varepsilon) \to A(\cdot, 0)$ в $(C^s)^{m \times m}$;

(II) $B(\varepsilon)y \to B(0)y$ в $\mathbb{C}^m$ для кожного $y \in (C^{s+1})^m$;

(III) $f(\cdot, \varepsilon) \to f(\cdot, 0)$ в $(C^s)^m$;

(IV) $q(\varepsilon) \to q(0)$ в $\mathbb{C}^m$.

Розглянемо ще одну умову.

Умова (0). Гранична однорідна крайова задача

$$L(0)y(t, 0) = 0, \ a \leqslant t \leqslant b, \ B(0)y(\cdot, 0) = 0$$

має лише тривіальний розв'язок.

Тепер сформулюємо наше

Базове означення. Говоримо, що розв'язок крайової задачі (6), (7) неперервно залежить від параметра ε при $\varepsilon = 0$, якщо виконуються такі дві умови:

(*) існує додатне число $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$ таке, що для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1)$ і будь-яких правих частин $f(\cdot, \varepsilon) \in (C^s)^m$ і $q(\varepsilon) \in \mathbb{C}^m$ ця задача має єдиний розв'язок $y(\cdot, \varepsilon) \in (C^{s+1})^m$;

(**) граничні умови (III) і (IV) тягнуть за собою збіжність

$$y(\cdot, \varepsilon) \to y(\cdot, 0) \text{ в } (C^{s+1})^m \text{ при } \varepsilon \to 0+. \tag{8}$$

Основна теорема. *Розв'язок крайової задачі* (6), (7) *неперервно залежить від параметра* ε *при* $\varepsilon = 0$ *тоді і тільки тоді, коли вона задовольняє умову* (0) *і граничні умови* (I) *і* (II).

Основну теорему доповнює такий результат.

Теорема 3. *Нехай крайова задача* (6), (7) *задовольняє умову* (0) *і граничні умови* (I) *і* (II). *Тоді існують додатні числа* $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ *і* $\varkappa_1, \varkappa_2$ *такі, що для кожного* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$ *виконується двобічна оцінка*

$$\varkappa_1(\|L(\varepsilon)\, y(\cdot, 0) - f(\cdot, \varepsilon)\|_s + \|B(\varepsilon)\, y(\cdot, 0) - q(\varepsilon)\|_{\mathbb{C}^m}) \leqslant \|y(\cdot, 0) - y(\cdot, \varepsilon)\|_{s+1} \leqslant$$
$$\leqslant \varkappa_2(\|L(\varepsilon)\, y(\cdot, 0) - f(\cdot, \varepsilon)\|_s + \|B(\varepsilon)\, y(\cdot, 0) - q(\varepsilon)\|_{\mathbb{C}^m}). \qquad (9)$$

Тут числа $\varepsilon_2, \varkappa_1$ і $\varkappa_2$ *не залежать від* $y(\cdot, 0), y(\cdot, \varepsilon), f(\cdot, \varepsilon)$ і $q(\varepsilon)$.

Згідно з теоремою 3 похибка і нев'язка розв'язку $y(\cdot, \varepsilon)$ крайової задачі (6), (7) мають однаковий порядок. При цьому $y(\cdot, 0)$ розглядаємо як наближений розв'язок цієї задачі.

3. Обґрунтування результатів. Теорема 1 випливає з того, що оператор (3) є компактним збуренням оборотного оператора, який відповідає задачі Коші для диференціального рівняння (1).

Обґрунтуємо теорему 2. За теоремою 1 оператор (3) оборотний тоді і тільки тоді, коли його ядро тривіальне. Тому теорема 2 буде доведена, якщо ми покажемо, що $\ker(L, B) \neq \{0\} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \det[BY] = 0$. Умова $\ker(L, B) \neq \{0\}$ еквівалентна існуванню нетривіального розв'язку $y \in (C^s)^m$ однорідної крайової задачі $(L, B)y = (0,0)$. Записавши цей розв'язок у вигляді $y = Y\,p$ для деякого вектора $p \in \mathbb{C}^m \setminus \{0\}$, отримаємо рівність $By = B(Yp) = [BY]p$. Тому рівняння $(L, B)y = (0,0)$ еквівалентне рівності $[BY]p = 0$. Остання рівносильна умові $\det[BY] = 0$. Теорема 2 доведена.

Перейдемо до обґрунтування основної теореми. Доведення достатності проводиться за схемою, подібною до [12, п. 3], і спирається на такий результат. Для фіксованої точки $t_0 \in [a, b]$ позначимо через $Y^{s+1}_{t_0}$ множину всіх матриць-функцій $Y \in (C^{s+1})^{m\times m}$ таких, що $Y(t_0) = I_m$ і $\det Y(t) \neq 0$ для кожного $t \in [a, b]$. Наділимо цю множину метрикою з банахового простору $(C^{s+1})^{m\times m}$.

Лема 1. *Розглянемо нелінійне відображення* $\Upsilon : A \mapsto Y$, *яке кожному* $A \in (C^s)^{m\times m}$ *ставить у відповідність єдиний розв'язок* $Y \in (C^{s+1})^{m\times m}$ *задачі Коші* (4). *Це відображення є гомеоморфізмом банахового простору* $(C^s)^{m\times m}$ *на метричний простір* $Y^{s+1}_{t_0}$.

Обґрунтуємо цю лему. Для $A \in (C^s)^{m\times m}$ і $Y \in Y^{s+1}_{t_0}$ рівність $Y = \Upsilon A$ рівносильна тому, що $A(t) = -Y'(t)(Y(t))^{-1}$ для довільного $t \in [a; b]$. Тому відображення $\Upsilon : (C^s)^{m\times m} \to Y^{s+1}_{t_0}$ є бієкцією. Покажемо, що воно неперервне. Припустимо, що $A_k \to A$ у просторі $(C^s)^{m\times m}$ при $k \to \infty$. Означимо інтегральні оператори на матрицях-функціях $Y \in (C^{s+1})^{m\times m}$ за формулами $(V_{A_k}Y)(t) := \int_{t_0}^{t} A_k(s)Y(s)$ і $(V_A Y)(t) := \int_{t_0}^{t} A(s)Y(s)$, праві частини яких є матрицями-функціями аргументу $t \in [a, b]$. Ці оператори є обмеженими і квазінільпотентними на просторі $(C^{s+1})^{m\times m}$ (останнє випливає з відомої їх квазінільпотентності на просторі $C^{(0)}$). За припущенням, маємо збіжність $I + V_{A_k} \to \to I + V_A$ при $k \to \infty$ за нормою операторів, обмежених на $(C^{s+1})^{m\times m}$; тут I є тотожний оператор. Тому послідовність $\Upsilon A_k = (I + V_{A_k})^{-1} I_m$ збігається до $(I + V_A)^{-1} I_m = \Upsilon A$ у просторі $(C^{s+1})^{m\times m}$ при $k \to \infty$. Отже, оператор $\Upsilon : (C^s)^{m\times m} \to Y^{s+1}_{t_0}$ неперервний. Обернений до нього також неперервний. Справді, якщо $Y_k \to Y$ у просторі $Y^{s+1}_{t_0}$ при $k \to \infty$, то $Y'_k \to Y'$ в $(C^s)^{m\times m}$ і $Y_k^{-1} \to Y^{-1}$ в $(C^{s+1})^{m\times m}$ при $k \to \infty$. Тому послідовність $\Upsilon^{-1} Y_k = -Y'_k Y_k^{-1}$ збігається до $-Y'Y^{-1} = \Upsilon^{-1} Y$ у просторі $(C^s)^{m\times m}$ при $k \to \infty$. Лема 1 доведена.

Обґрунтуємо тепер достатність в основній теоремі. Припустимо, що крайова задача (6), (7) задовольняє умову (0) і граничні умови (I) і (II). З умови (0) на підставі теореми 1 випливає, що ця крайова задача при $\varepsilon = 0$ має єдиний розв'язок $y(\cdot, 0) \in (C^{s+1})^m$ для довільних правих частин

$f(\cdot, 0) \in (C^s)^m$ і $q(0) \in \mathbb{C}^m$. Покажемо, що крайова задача (6), (7) задовольняє умову $(*)$ базового означення. Згідно з умовою (I) і на підставі леми 1 маємо збіжність $Y(\cdot, \varepsilon) := \Upsilon A(\cdot, \varepsilon)$ до $\Upsilon A(\cdot, 0) =:$ $=: Y(\cdot, 0)$ у просторі $(C^{s+1})^{m\times m}$ при $\varepsilon \to 0+$. Вона з огляду на умову (II) тягне за собою збіжність $[B(\varepsilon)Y(\cdot, \varepsilon)] \to [B(0)Y(\cdot, 0)]$ у $\mathbb{C}^{m\times m}$ при $\varepsilon \to 0+$. Оскільки $\det[B(0)Y(\cdot, 0)] \neq 0$ за умовою (0) і теоремою 2 то існує число $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_0)$ таке, що $\det[B(\varepsilon)Y(\cdot, \varepsilon)] \neq 0$ для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1)$. Тому на підставі теореми 2 крайова задача (6), (7) задовольняє умову $(*)$.

Покажемо тепер, що ця задача задовольняє і умову $(**)$. Отож, припустимо, що виконуються граничні умови (III) і (IV), і виведемо з них властивість (8). Спочатку дослідимо випадок, коли $f(t, \varepsilon) = 0$ для усіх $t \in [a, b]$ і $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$. У цьому випадку можемо подати єдиний розв'язок $y(\cdot, \varepsilon) \in (C^{s+1})^m$ крайової задачі (6), (7) при $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1)$ у вигляді $y(\cdot, \varepsilon) = Y(\cdot, \varepsilon)p(\varepsilon)$ для деякого вектора $p(\varepsilon) \in \mathbb{C}^m$. За умовою (IV) маємо збіжність вектора $[B(\varepsilon)Y(\cdot, \varepsilon)]p(\varepsilon) = q(\varepsilon)$ до $q(0) =$ $= [B(0)Y(\cdot, 0)]p(0)$ в $\mathbb{C}^m$ при $\varepsilon \to 0+$. Оскільки, як було показано, $\det[B(\varepsilon)Y(\cdot, \varepsilon)] \neq 0$ для кожного $\varepsilon \in [0; \varepsilon_1)$, то остання збіжність тягне за собою властивість $p(\varepsilon) \to p(0)$. Тому $y(\cdot, \varepsilon) = Y(\cdot, \varepsilon)p(\varepsilon)$ прямує до $Y(\cdot, 0)p(0) = y(\cdot, 0)$ в $(C^{s+1})^m$ при $\varepsilon \to 0+$, тобто виконується властивість (8).

Тепер виведемо її у загальній ситуації зі щойно розглянутого випадку. Для кожного $\varepsilon \in$ $\in [0; \varepsilon_1)$ запишемо розв'язок крайової задачі (6), (7) у вигляді $y(\cdot, \varepsilon) = x(\cdot, \varepsilon) + \hat{y}(\cdot, \varepsilon)$. Тут $x(\cdot, \varepsilon) \in (C^{s+1})^m$ — єдиний розв'язок задачі Коші, яка складається з неоднорідного диференціального рівняння $L(\varepsilon)x(t, \varepsilon) = f(t; \varepsilon)$, $a \leqslant t \leqslant b$, і початкової умови $x(a, \varepsilon) = 0$, а $\hat{y}(\cdot, \varepsilon) \in (C^{s+1})^m$ — єдиний розв'язок крайової задачі, яка складається з однорідного диференціального рівняння $L(\varepsilon)\,\hat{y}(t, \varepsilon) = 0$, $a \leqslant t \leqslant b$, і крайової умови $B(\varepsilon)\,\hat{y}(\cdot, \varepsilon) = \hat{q}(\varepsilon)$, де $\hat{q}(\varepsilon) := q(\varepsilon) - B(\varepsilon)x(\cdot, \varepsilon)$. Покладемо $Cx := x(a)$ для довільного $x \in (C^{s+1})^m$. Оскільки задача Коші для диференціального рівняння (6) має єдиний розв'язок у класі $(C^{s+1})^m$, то за теоремою Банаха про обернений оператор маємо ізоморфізм $(L(\varepsilon), C) : (C^{s+1})^m \leftrightarrow (C^s)^m \times \mathbb{C}^m$ для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$. Згідно з умовою (I) маємо збіжність $L(\varepsilon) \to L(0)$ при $\varepsilon \to 0+$ за нормою обмежених операторів, що діють з простору $(C^{s+1})^m$ у простір $(C^s)^m$. Звідси випливає збіжність $(L(\varepsilon), C)^{-1} \to (L(0), C)^{-1}$ при $\varepsilon \to 0+$ за нормою обмежених операторів, які діють з простору $(C^s)^m \times \mathbb{C}^m$ у простір $(C^{s+1})^m$. Тому на підставі умови (III) отримаємо, що $x(\cdot, \varepsilon) = (L(\varepsilon), C)^{-1}(f(\cdot, \varepsilon), 0)$ прямує до $(L(0), C)^{-1}(f(\cdot, 0), 0) = x(\cdot, 0)$ в $(C^{s+1})^m$ при $\varepsilon \to 0+$. Звідси випливає, що $\hat{q}(\varepsilon) = q(\varepsilon) - B(\varepsilon)x(\cdot, \varepsilon)$ прямує до $q(0) - B(0)x(\cdot, 0) =$ $= \hat{q}(0)$ у $\mathbb{C}^m$. Тому, за доведеним у попередньому абзаці, $\hat{y}(\cdot, \varepsilon) \to \hat{y}(\cdot, 0)$ у просторі $(C^{s+1})^m$. Таким чином, $y(\cdot, \varepsilon) = x(\cdot, \varepsilon) + \hat{y}(\cdot, \varepsilon)$ прямує до $y(\cdot, 0) = x(\cdot, 0) + \hat{y}(\cdot, 0)$ у тому ж самому просторі при $\varepsilon \to 0+$. Отже, крайова задача (6), (7) задовольняє умову $(**)$. Достатність в основній теоремі доведена.

Обґрунтуємо необхідність. Припустимо, що ця крайова задача задовольняє базове означення. Звісно, тоді для неї виконується умова (0). Залишається показати, що ця задача задовольняє і граничні умови (I) і (II). Для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1)$ розглянемо крайову задачу, яка складається з диференціального рівняння $Y'(t, \varepsilon) + A(t, \varepsilon)Y(t, \varepsilon) = 0 \cdot I_m$, $a \leqslant t \leqslant b$, і крайової умови $[BY(\cdot, \varepsilon)] = I_m$. Ця крайова задача є сукупністю m крайових задач (6), (7) із правими частинами, не залежними від ε. Тому, за припущенням, вона має єдиний розв'язок $Y(\cdot, \varepsilon) \in (C^{s+1})^{m\times m}$ і він задовольняє умову $Y(\cdot, \varepsilon) \to Y(\cdot, 0)$ у просторі $(C^s)^{m\times m}$ при $\varepsilon \to 0+$. Відзначимо, що $\det Y(t, \varepsilon) \neq 0$ для довільного $t \in [a; b]$, бо інакше ствопці-функції матриці $Y(\cdot, \varepsilon)$ будуть лінійно залежними, що суперечитиме умові $[BY(\cdot, \varepsilon)] = I_m$. Тому матриця-функція $A(\cdot, \varepsilon) =$ $= -Y'(\cdot, \varepsilon)(Y(\cdot, \varepsilon))^{-1}$ прямує до $-Y'(\cdot, 0)(Y(\cdot, 0))^{-1} = A(\cdot, 0)$ у просторі $(C^s)^{m\times m}$ при $\varepsilon \to 0+$, тобто виконується умова (I).

Покажемо, що і умова (II) виконується. Попередньо доведемо, що $\|B(\varepsilon)\| = O(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0+$, де $\|\cdot\|$ — норма обмеженого оператора $B(\varepsilon) : (C^{s+1})^m \to \mathbb{C}^m$. Припустимо супротивне: існує числова послідовність $(\varepsilon^{(k)})^{\infty}_{k=1} \subset (0, \varepsilon_1)$ така, що $\varepsilon^{(k)} \to 0$ і $0 < \|B(\varepsilon^{(k)})\| \to \infty$ при $\varepsilon \to 0+$. Для кожного номера k виберемо функцію $z_k \in (C^{s+1})^m$ таку, що $\|z_k\|_{s+1} = 1$ і $\|B(\varepsilon^{(k)})z_k\|_{\mathbb{C}^m} \geqslant \|B(\varepsilon^{(k)})\|/2$. Покладемо $y(\cdot, \varepsilon^{(k)}) := \|B(\varepsilon^{(k)})\|^{-1}z_k$, $f(\cdot, \varepsilon^{(k)}) := L(\varepsilon^{(k)})\,y(\cdot, \varepsilon^{(k)})$ та $q(\varepsilon^{(k)}) := B(\varepsilon^{(k)})\,y(\cdot, \varepsilon^{(k)})$.

Оскільки $y(\cdot, \varepsilon^{(k)}) \to 0$ у просторі $(C^{s+1})^m$ при $\varepsilon \to 0+$, то $f(\cdot, \varepsilon^{(k)}) \to 0$ в $(C^s)^m$, бо, за доведеним, $A(\cdot, \varepsilon)$ задовольняє умову (I). Оскільки $1/2 \leqslant \| q(\varepsilon^{(k)})\|_{\mathbb{C}^m} \leqslant 1$, то, перейшовши до підпослідовності чисел $\varepsilon^{(k)}$, можна вважати, що $q(\varepsilon^{(k)}) \to q(0)$ при $k \to \infty$, де $q(0)$ — деякий ненульовий вектор в $\mathbb{C}^m$. Таким чином, для кожного номера k вектор-функція $y(\cdot, \varepsilon^{(k)}) \in (C^{s+1})^m$ є єдиним розв'язком крайової задачі, яка складається з диференціального рівняння $L(\varepsilon^{(k)})\, y(t, \varepsilon^{(k)}) = f(t, \varepsilon^{(k)})$, $a \leqslant t \leqslant b$, і крайової умови $B(\varepsilon^{(k)})\, y(\cdot, \varepsilon^{(k)}) = q(\varepsilon^{(k)})$. Тут, нагадаємо, $f(\cdot, \varepsilon^{(k)}) \to 0$ в $(C^s)^m$ і $q(\varepsilon^{(k)}) \to q(0) \neq 0$ при $k \to \infty$. Тому на підставі умови $(**)$ базового означення функція $y(\cdot, \varepsilon^{(k)})$ збігається у просторі $(C^{s+1})^m$ до єдиного розв'язку $y(\cdot, 0)$ граничної крайової задачі, яка складається з диференціального рівняння $L(0)\, y(t, 0) = 0$, $a \leqslant t \leqslant b$, і неоднорідної крайової умови $B(0)\, y(\cdot, 0) = q(0)$. Але, згадаємо, $y(\cdot, \varepsilon^{(k)}) \to 0$ у тому ж просторі. Отож, $y(\cdot, 0) \equiv 0$, що суперечить крайовій умові. Тому зроблене припущення є хибним, тобто $\|B(\varepsilon)\| = O(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0+$.

Тепер можемо показати, що виконується умова (II). За доведеним у попередніх двох абзацах, існують числа $\varkappa' > 0$ і $\varepsilon' \in (0; \varepsilon_1)$ такі, що $\|(L(\varepsilon), B(\varepsilon))\| \leqslant \varkappa'$ для усіх $\varepsilon \in [0, \varepsilon')$, де $\|\cdot\|$ — норма обмеженого оператора, що діє з простору $(C^{s+1})^m$ у простір $(C^s)^m \times \mathbb{C}^m$. Виберемо функцію $y \in (C^{s+1})^m$ довільним чином та покладемо $f(\cdot, \varepsilon) := L(\varepsilon) y$ і $q(\varepsilon) := B(\varepsilon) y$ для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$. Тоді при $\varepsilon \to 0+$ маємо

$$\|B(\varepsilon) y - B(0) y\|_{\mathbb{C}^m} \leqslant \|(f(\cdot, \varepsilon), q(\varepsilon)) - (f(\cdot, 0), q(0))\|_{(C^s)^m \times \mathbb{C}^m} \leqslant$$
$$\leqslant \varkappa' \|(L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1}((f(\cdot, \varepsilon), q(\varepsilon)) - (f(\cdot, 0), q(0)))\|_{s+1} =$$
$$= \varkappa' \|(L(0), B(0))^{-1}(f(\cdot, 0), q(0)) - (L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1}(f(\cdot, 0), q(0))\|_{s+1} \to 0$$

за умовою $(**)$. Отже, крайова задача (6), (7) задовольняє умову (II).

Таким чином, основна теорема доведена.

Обґрунтуємо теорему 3. Згідно з граничними умовами (I) і (II) оператор $(L(\varepsilon), B(\varepsilon))$ збігається сильно до оператора $(L(0), B(0))$ при $\varepsilon \to 0+$. При цьому останні розглядаються як неперервні оператори з простору $(C^{s+1})^m$ у простір $(C^s)^m \times \mathbb{C}^m$. Тому їх норми обмежені деяким числом $\varkappa' > 0$ при $0 \leqslant \varepsilon \ll 1$. Звідси негайно випливає ліва частина двобічної оцінки (9) із $\varkappa' := 1/\varkappa'$. Далі, на підставі основної теореми оператор $(L(\varepsilon), B(\varepsilon))$ оборотний при $0 \leqslant \varepsilon \ll 1$, причому обернений оператор $(L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1}$ збігається сильно до $(L(0), B(0))^{-1}$ при $\varepsilon \to 0+$. Тому норми цих обернених операторів обмежені деяким числом $\varkappa_2 > 0$ при $0 \leqslant \varepsilon \ll 1$. Звідси негайно випливає права частина двобічної оцінки (9). Теорема 3 доведена.

Автори висловлюють подяку В.А. Михайлецю за обговорення роботи.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. *Гихман И.И.* По поводу одной теоремы Н.Н. Боголюбова // Укр. мат. журн. — 1952. — **4**, № 2. — С. 215—219.
2. *Красносельский М.А., Крейн С.Г.* О принципе усреднения в нелинейной механике // Успехи мат. наук. — 1955. — **10**, вып. 3. — С. 147—153
3. *Курцвейль Я., Ворел З.* О непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметра // Чехосл. мат. журн. — 1957. — **7**, № 4. — С. 568—583.
4. *Самойленко А.М.* Об одном случае непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметра // Укр. мат. журн. — 1962. — **14**, № 3. — С. 289—298.
5. *Кигурадзе И.Т.* Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. — Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1975. — 352 с.
6. *Кигурадзе И.Т.* Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Нов. достиж. — Москва: ВИНИТИ, 1987. — Т. 30. — С. 3—103.
7. *Ashordia M.* Criteria of correctness of linear boundary value problems for systems of generalized ordinary differential equations // Czech. Math. J. — 1996. — **46**, No 3. — P. 385—404.
8. *Михайлец В.А., Рева Н.В.* Обобщения теоремы Кигурадзе о корректности линейных краевых задач // Доп. НАН України. — 2008. — № 9. — С. 23—27.
9. *Кодлюк Т.И., Михайлец В.А., Рева Н.В.* Предельные теоремы для одномерных краевых задач // Укр. мат. журн. — 2013. — **65**, № 1. — С. 70—81.

10. *Mikhailets V.A., Chekhanova G.A.* Limit theorems for general one-dimensional boundary-value problems // J. Math. Sci. — 2015. — **204**, No 3. — P. 333—342.
11. *Михайлец В.А., Рева Н.В.* Предельный переход в системах линейных дифференциальных уравнений // Доп. НАН України. — 2008. — № 8. — С. 28—30.
12. *Kodlyuk T.I., Mikhailets V.A.* Solutions of one-dimensional boundary-value problems with a parameter in Sobolev spaces // J. Math. Sci. — 2013. — **190**, No 4. — P. 589—599.
13. *Гнып Е.В., Кодлюк Т.И., Михайлец В.А.* Фредгольмовые краевые задачи с параметром на пространствах Соболева // Укр. мат. журн. — 2015. — **67**, № 5. — С. 584—591.
14. *Михайлец В.А., Чеханова Г.А.* Фредгольмовые краевые задачи с параметром на пространствах $C^{(n)}[a; b]$ // Доп. НАН України. — 2014. — № 7. — С. 24—28.
15. *Трибель Х.* Теория интерполяции функциональных пространств, дифференциальные операторы. — Москва: Мир, 1980. — 664 с.

REFERENCES

1. *Gikhman I.I.* Ukr. Mat. Zh., 1952, **4**, No 2: 215-219 (in Russian).
2. *Krasnosel'skii M.A., Krein S.G.* Uspekhi Mat. Nauk, 1955, **10**, No 3: 147-153 (in Russian).
3. *Kurzweil J., Vorel Z.* Czechoslovak Math. J., 1957, **7**, No 4: 568-583 (in Russian).
4. *Samoilenko A.M.* Ukr. Mat. Zh., 1962, **14**, No 3: 289—298 (in Russian).
5. *Kiguradze I.T.* Some singular boundary-value problems for ordinary differential equations, Tbilisi: Izd-vo Tbilisi University, 1975 (in Russian).
6. *Kiguradze I.T.* J. Soviet Math., 1988, **43**, Iss. 2: 2259-2339.
7. *Ashordia M.* Czechoslovak Math. J., 1996, **46**, No 3: 385—404.
8. *Mikhailets V.A., Reva N.V.* Dopov. Nac. acad. nauk Ukr. 2008, No 9: 23-27 (in Russian).
9. *Kodlyuk T.I., Mikhailets V.A., Reva N.V.* Ukr. Math. J., 2013, **65**, No 1: 77-90.
10. *Mikhailets V.A., Chekhanova G.A.* J. Math. Sci., 2015, **204**, No 3: 333-342.
11. *Mikhailets V.A., Reva N.V.* Dopov. Nac. akad. nauk Ukr. 2008, No 8: 28-30 (in Russian).
12. *Kodlyuk T.I., Mikhailets V.A.* J. Math. Sci., 2013, **190**, No 4: 589-599.
13. *Gnyp E.V., Kodlyuk T.I., Mikhailets V.A.* Ukr. Math. J., 2015, **67**, No 5: 658-667.
14. *Mikhailets V.A., Chekhanova G.A.* Dopov. Nac. akad. nauk Ukr. 2014, No 7: 24-28 (in Russian).
15. *Triebel H.* Interpolation theory, function spaces, differential operators, 2-nd ed., Heidelberg: Johann Ambrosius Barth, 1995.

Надійшло до редакції 17.05.2016

А.А. Мурач, В.А. Солдатов

Институт математики НАН Украины, Киев
E-mail: murach@imath.kiev.ua, soldatovvo@ukr.net

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ПО ПАРАМЕТРУ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ
КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В ПРОСТРАНСТВАХ ГЕЛЬДЕРА—ЗИГМУНДА

Введен и исследован наиболее широкий класс линейных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, решения которых принадлежат комплексному пространству Гельдера–Зигмунда. Для таких задач установлен конструктивный критерий непрерывности по параметру решений в этом пространстве.

Ключевые слова: *система дифференциальных уравнений, краевая задача, пространство Гельдера–Зигмунда, непрерывность по параметру.*

A.A. Murach, V.O. Soldatov

Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kyiv
E-mail: murach@imath.kiev.ua, soldatovvo@ukr.net

CONTINUITY IN A PARAMETER OF SOLUTIONS TO LINEAR
BOUNDARY-VALUE PROBLEMS IN HÖLDER—ZYGMUND SPACES

We introduce and investigate the broadest class of linear boundary-value problems for the systems of first-order ordinary differential equations, whose solutions belong to the complex Hölder–Zygmund space. For these problems, we establish a constructive criterion, under which their solutions are continuous in a parameter in this space.

Keywords: *system of differential equations, boundary-value problem, Hölder–Zygmund space, continuity in a parameter.*