

doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2016.11.010>

УДК 517.5

А.С. Сердюк, Т.А. Степанюк

Інститут математики НАН України, Київ

Східноєвропейський національний університет, ім. Лесі Українки, Луцьк

E-mail: serdyuk@imath.kiev.ua, tania_stepaniuk@ukr.net

Рівномірні наближення сумами Фур'є на класах згорток з узагальненими ядрами Пуассона

(Представлено членом-кореспондентом НАН України М.Л. Горбачуком)

Знайдено асимптотично непокритувані оцінки верхніх меж наближень сумами Фур'є в рівномірній метриці на класах 2π -періодичних функцій, які зображуються згортками функцій φ , що належать одиничним кулям просторів L_p , з узагальненими ядрами Пуассона. Для одержаних асимптотичних рівностей наведено оцінку залишкового члена, яка виражається в явному вигляді через абсолютні сталі та параметри задачі, що може бути корисним для практичного застосування.

Ключові слова: суми Фур'є, асимптотична рівність, узагальнені ядра Пуассона, задача Колмогорова—Нікольського.

Нехай L_p , $1 \leq p < \infty$, — простір 2π -періодичних сумовних в p -му степені на $[0, 2\pi)$ функцій f , в якому норма задана формулою

$$\|f\|_p = \left(\int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt \right)^{1/p};$$

L_∞ — простір 2π -періодичних вимірних і суттєво обмежених функцій f з нормою

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_t |f(t)|;$$

C — простір 2π -періодичних неперервних функцій f , у якому норма задається за допомогою рівності

$$\|f\|_C = \max_t |f(t)|.$$

Позначимо через $C_{\beta,p}^{\alpha,r}$, $\alpha > 0$, $r > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$, множину всіх 2π -періодичних функцій, які при всіх $x \in \mathbb{R}$ зображуються за допомогою згортки (див., наприклад, [1, с. 144])

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_{\alpha,r,\beta}(x-t)\varphi(t)dt, \quad a_0 \in \mathbb{R}, \quad \|\varphi\|_p \leq 1, \quad \varphi \perp 1,$$

© А.С. Сердюк, Т.А. Степанюк, 2016

з фіксованими твірними ядрами:

$$P_{\alpha,r,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha k^r} \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right),$$

які називають узагальненими ядрами Пуассона. При $r=1$ і $\beta=0$ ядра $P_{\alpha,r,\beta}(t)$ є звичайними ядрами Пуассона гармонічних функцій.

При довільних $r > 0$ класи $C_{\beta,p}^{\alpha,r}$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$, належать до множини D^∞ нескінченно диференційовних 2π -періодичних функцій (див., наприклад, [1, с. 139], [2, с. 1408]). Більше того, як випливає з теореми 1 роботи [3], при довільному $r > 0$ має місце вкладення $C_{\beta,p}^{\alpha,r} \subset T_{1/r}$, де T_a , $a > 0$, – відомі класи Жевре

$$T_a = \left\{ f \in D^\infty : \sup_{k \in \mathbb{N}} \left(\frac{\|f^{(k)}\|_C}{(k!)^a} \right)^{1/k} < \infty \right\}.$$

Розглянемо величини

$$\mathcal{E}_n(C_{\beta,p}^{\alpha,r})_C = \sup_{f \in C_{\beta,p}^{\alpha,r}} \|f(\cdot) - S_{n-1}(f; \cdot)\|_C, \quad r > 0, \quad \alpha > 0, \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad (1)$$

де $S_{n-1}(f; \cdot)$ – частинні суми Фур'є порядку $n-1$ функції f .

У даній роботі розглядається задача про знаходження асимптотичних при $n \rightarrow \infty$ рівностей для величин $\mathcal{E}_n(C_{\beta,p}^{\alpha,r})_C$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, при $0 < r < 1$ і $1 \leq p \leq \infty$.

У випадку $r=1$ і $p=\infty$ асимптотичні рівності для величин (1) встановлено в роботах С.М. Нікольського [4, с. 221] та С.Б. Стечкіна [5, с. 139]. У роботі [6, с. 1095] знайдено асимптотичні при $n \rightarrow \infty$ рівності для величин $\mathcal{E}_n(C_{\beta,p}^{\alpha,r})_C$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, при $r=1$ і довільних $1 \leq p \leq \infty$.

Крім того, як випливає з [7, с. 186] при $p=2$ та всіх $r > 0$, мають місце рівності

$$\mathcal{E}_n(C_{\beta,2}^{\alpha,r})_C = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\sum_{k=n}^{\infty} e^{-2\alpha k^r} \right)^{1/2}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

У випадку $r > 1$ і $p=\infty$ асимптотичні рівності для величин $\mathcal{E}_n(C_{\beta,p}^{\alpha,r})_C$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, були одержані О.І. Степанцем [8, с.131] та С.О. Теляковським [9].

При $r > 1$ і довільних $1 \leq p \leq \infty$ задачу про точну асимптотику величин $\mathcal{E}_n(C_{\beta,p}^{\alpha,r})_C$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, при $n \rightarrow \infty$ розв'язано в [6, с. 1094].

Що ж стосується випадку $0 < r < 1$, то асимптотичні рівності для величин $\mathcal{E}_n(C_{\beta,p}^{\alpha,r})_C$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, за винятком наведеного випадку $p=2$, були відомі лише у випадку $p=\infty$ завдяки роботі О.І. Степанця [10, с. 758], який показав, що

$$\mathcal{E}_n(C_{\beta,\infty}^{\alpha,r})_C = \frac{4}{\pi^2} e^{-\alpha n^r} \ln n^{1-r} + O(1)e^{-\alpha n^r}, \quad (3)$$

де $O(1)$ – величина, що рівномірно обмежена відносно n і β .

Зауважимо, що при довільних $0 < r < 1$ і $1 \leq p < \infty$ для величин $\mathcal{E}_n(C_{\beta,p}^{\alpha,r})_C$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, виконуються порядкові оцінки (див., наприклад, [11, с. 111], [12, с. 278])

$$\mathcal{E}_n(C_{\beta,p}^{\alpha,r})_C \asymp e^{-\alpha n^r} n^{(1-r)/p}.$$

Щоб сформулювати основні результати роботи введемо такі позначення.

При довільних $v > 0$ і $1 \leq s \leq \infty$ покладемо

$$J_s(v) := \left\| \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} \right\|_{L_s[0, v]},$$

де

$$\|f\|_{L_s[a, b]} = \begin{cases} \left(\int_a^b |f(t)|^s dt \right)^{1/s}, & 1 \leq s < \infty, \\ \text{ess sup}_{t \in [a, b]} |f(t)|, & s = \infty. \end{cases}$$

Також при довільних $\alpha > 0$, $r \in (0, 1)$ і $1 \leq p \leq \infty$ покладемо $n_0 = n_0(\alpha, r, p)$ – найменший з номерів n такий, що

$$\frac{1}{\alpha r} \frac{1}{n^r} + \frac{\alpha r \chi(p)}{n^{1-r}} \leq \begin{cases} \frac{1}{14}, & p = 1, \\ \frac{p-1}{(3\pi)^3 p}, & 1 < p < \infty, \\ \frac{1}{(3\pi)^3}, & p = \infty, \end{cases} \quad (4)$$

де $\chi(p) = p$ при $1 \leq p < \infty$ і $\chi(p) = 1$ при $p = \infty$.

У прийнятих позначеннях має місце нижчесформульоване твердження, яке є основним результатом роботи.

Теорема 1. Нехай $0 < r < 1$, $1 \leq p \leq \infty$, $\alpha > 0$ і $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді при $n \geq n_0(\alpha, r, p)$ справедлива оцінка

$$\mathcal{E}_n(C_{\beta, p}^{\alpha, r})_C = e^{-\alpha n^r} n^{(1-r)/p} \left(\frac{\|\cos t\|_{p'}}{\pi^{1+1/p'} (\alpha r)^{1/p}} J_{p'} \left(\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r} \right) + \gamma_{n, p}^{(1)} \left(\frac{1}{(\alpha r)^{1+1/p}} J_{p'} \left(\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r} \right) \frac{1}{n^r} + \frac{1}{n^{(1-r)/p}} \right) \right), \quad (5)$$

де $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, а для величини $\gamma_{n, p}^{(1)} = \gamma_{n, p}^{(1)}(\alpha, r, \beta)$ виконується нерівність $|\gamma_{n, p}^{(1)}| \leq (14\pi)^2$.

Ключовим твердженням, на якому ґрунтується доведення теореми 1, є така лема.

Лема. Нехай $1 \leq s \leq \infty$, а 2π -періодичні функції $g(t)$ і $h(t)$ мають скінченні похідні і задовольняють умови

$$r(t) := \sqrt{g^2(t) + h^2(t)} \neq 0,$$

$$M := \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{\sqrt{(g'(t))^2 + (h'(t))^2}}{\sqrt{g^2(t) + h^2(t)}} < \infty.$$

Тоді для функції

$$\phi(t) = g(t) \cos(nt + \gamma) + h(t) \sin(nt + \gamma), \quad \gamma \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N},$$

при всіх натуральних n таких, що

$$n \geq \begin{cases} 4\pi s M, & 1 \leq s < \infty, \\ 1, & s = \infty, \end{cases}$$

мають місце оцінки

$$\begin{aligned} \|\phi\|_s &= \|r\|_s \left(\frac{\|\cos t\|_s}{(2\pi)^{1/s}} + \delta_{s,n}^{(1)} \frac{M}{n} \right), \\ \inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \|\phi(t) - \lambda\|_s &= \|r\|_s \left(\frac{\|\cos t\|_s}{(2\pi)^{1/s}} + \delta_{s,n}^{(2)} \frac{M}{n} \right), \\ \sup_{h \in \mathbb{R}} \frac{1}{2} \|\phi(t+h) - \phi(t)\|_s &= \|r\|_s \left(\frac{\|\cos t\|_s}{(2\pi)^{1/s}} + \delta_{s,n}^{(3)} \frac{M}{n} \right), \end{aligned}$$

в яких $|\delta_{s,n}^{(i)}| < 14\pi$, $i = 1, 3$.

Наведена лема дає можливість довести, що при довільних $r \in (0,1)$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$, $i \in \mathbb{N}$ таких, що $n \geq n_0(\alpha, r, p)$ мають місце співвідношення

$$\begin{aligned} \inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \|P_{\alpha, r, \beta}^{(n)}(t) - \lambda\|_s &= \\ &= e^{-\alpha n^r} n^{(1-r)/p} \left(\frac{\|\cos t\|_{p'}}{\pi^{1/p'} (\alpha r)^{1/p}} J_{p'} \left(\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r} \right) + \delta_{n,p} \left(\frac{1}{(\alpha r)^{1+1/p}} J_{p'} \left(\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r} \right) \frac{1}{n^r} + \frac{1}{n^{(1-r)/p}} \right) \right), \end{aligned} \quad (6)$$

в яких $P_{\alpha, r, \beta}^{(n)}(t) = \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\alpha k^r} \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right)$, а для величини $\delta_{n,p} = \delta_{n,p}(\alpha, r, \beta)$ виконується нерівність $|\delta_{n,p}| \leq 196\pi$.

Зауваження. Оцінка (6) при вказаних вище значеннях розглядуваних параметрів залишається вірною, якщо в лівій її частині замість $\inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \|P_{\alpha, r, \beta}^{(n)}(t) - \lambda\|_{p'}$ покласти $\|P_{\alpha, r, \beta}^{(n)}\|_{p'}$, або

$$\sup_{h \in \mathbb{R}} \frac{1}{2} \|P_{\alpha, r, \beta}^{(n)}(t+h) - P_{\alpha, r, \beta}^{(n)}(t)\|_{p'}.$$

Оскільки з урахуванням співвідношення двоїстості

$$\mathcal{E}_n(C_{\beta, p}^{\alpha, r})_C = \sup_{\varphi \in B_p^0} \int_{-\pi}^{\pi} P_{\alpha, r, \beta}^{(n)}(t) \varphi(t) dt = \inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \|P_{\alpha, r, \beta}^{(n)}(t) - \lambda\|_{p'}, \quad (7)$$

де $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $1 \leq p \leq \infty$, то при $n \geq n_0(\alpha, r, p)$ з (6) і (7) випливає (5).

При $1 \leq p < \infty$ з теореми 1 випливає таке твердження.

Теорема 2. Нехай $0 < r < 1$, $1 \leq p < \infty$, $\alpha > 0$ і $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді при $1 < p < \infty$ і $n \geq n_0(\alpha, r, p)$ справедлива оцінка

$$\mathcal{E}_n(C_{\beta,p}^{\alpha,r})_C = e^{-\alpha n^r} n^{(1-r)/p} \left[\frac{\|\cos t\|_{p'}}{\pi^{1+1/p'} (\alpha r)^{1/p'} \left(\int_0^\infty \frac{dt}{(t^2+1)^{p'/2}} \right)^{1/p'}} + \right. \\ \left. + \gamma_{n,p}^{(2)} \left(\frac{1}{p'-1} \frac{(\alpha r)^{(p'-1)/p}}{n^{(1-r)(p'-1)}} + \frac{p^{1/p'}}{(\alpha r)^{1+1/p}} \frac{1}{n^r} + \frac{1}{n^{(1-r)/p}} \right) \right], \quad (8)$$

а при $p=1$ і $n \geq n_0(\alpha, r, 1)$ – оцінка

$$\mathcal{E}_n(C_{\beta,1}^{\alpha,r})_C = e^{-\alpha n^r} n^{1-r} \left(\frac{1}{\pi \alpha r} + \gamma_{n,1}^{(2)} \left(\frac{1}{(\alpha r)^2} \frac{1}{n^r} + \frac{1}{n^{1-r}} \right) \right), \quad (9)$$

де $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, а для величини $\gamma_{n,p}^{(2)} = \gamma_{n,p}^{(2)}(\alpha, r, \beta)$ виконується нерівність $|\gamma_{n,p}^{(2)}| \leq (14\pi)^2$.

При $p=2$, виходячи з (8), отримуємо таке твердження.

Наслідок 1. Нехай $0 < r < 1$, $\alpha > 0$ і $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді при $n \geq n_0(\alpha, r, 2)$ справедлива оцінка

$$\mathcal{E}_n(C_{\beta,2}^{\alpha,r})_C = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\sum_{k=n}^\infty e^{-2\alpha k^r} \right)^{1/2} = \frac{e^{-\alpha n^r}}{\sqrt{2\pi \alpha r}} n^{(1-r)/2} \left(1 + \gamma_n^{(1)} \left(\frac{1}{\alpha r} \frac{1}{n^r} + \frac{\sqrt{\alpha r}}{n^{(1-r)/2}} \right) \right), \quad (10)$$

де для величини $\gamma_n^{(1)} = \gamma_n^{(1)}(\alpha, r, \beta)$ виконується нерівність $|\gamma_n^{(1)}| \leq 392\pi^{5/2}$.

Зауважимо, що виходячи з рівності (2) при $\alpha > 0$, $r \in (0, 1)$, $\beta \in \mathbb{R}$ і $n \geq n_0(\alpha, r, 2)$ можна показати справедливість оцінки

$$\mathcal{E}_n(C_{\beta,2}^{\alpha,r})_C = \frac{e^{-\alpha n^r}}{\sqrt{2\pi \alpha r}} n^{(1-r)/2} \left(1 + \gamma_n^{(2)} \left(\frac{1}{2\alpha r} \frac{1}{n^r} + \frac{\alpha r}{n^{1-r}} \right) \right), \quad (11)$$

де для величини $\gamma_n^{(2)} = \gamma_n^{(2)}(\alpha, r, \beta)$ виконується нерівність $|\gamma_n^{(2)}| \leq \sqrt{\frac{54\pi^3}{54\pi^3 - 1}}$.

Формула (11) містить більш точну порівняно з (10) оцінку залишкового члена.

Покладемо $n_1 = n_1(\alpha, r)$ – найменший з номерів n такий, що

$$\frac{1}{\alpha r} \frac{1}{n^r} \left(1 + \ln \left(\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r} \right) \right) + \frac{\alpha r}{n^{1-r}} < \frac{1}{(3\pi)^3}.$$

Тоді при $p=\infty$ з теореми 1 випливає таке твердження.

Теорема 3. Нехай $0 < r < 1$, $\alpha > 0$ і $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді при $n \geq n_1(\alpha, r)$ справедлива оцінка

$$\mathcal{E}_n(C_{\beta,\infty}^{\alpha,r})_C = \frac{4}{\pi^2} e^{-\alpha n^r} \ln \left(\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r} \right) + \gamma_{n,\infty}^{(2)} e^{-\alpha n^r}, \quad (12)$$

де для величини $\gamma_{n,\infty}^{(2)} = \gamma_{n,\infty}^{(2)}(\alpha, r, \beta)$ виконується нерівність $|\gamma_{n,\infty}^{(2)}| \leq 20\pi^4$.

Співвідношення (12) уточнює встановлену О.І. Степанцем в [10] асимптотичну рівність (3).

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. *Степанец А.И.* Методы теории приближений: В 2 ч., Ч. I. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — 427 с. — (Праці Інституту математики НАН України; Т. 40).
2. *Степанець О.І., Сердюк А.С., Шидлич А.Л.* Про деякі нові критерії нескінченної диференційовності періодичних функцій // Укр. мат. журн. — 2007. — **59**, № 10. — С. 1399—1409.
3. *Степанец А.И., Сердюк А.С., Шидлич А.Л.* О связи классов (ψ, β) -дифференцируемых функций с классами Жевре // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, № 1. — С. 140—145.
4. *Никольский С.М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1946. — **10**, № 3. — С. 207—256.
5. *Стечкин С.Б.* Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций // Тр. МИАН СССР. — 1980. — **145**. — С. 126—151.
6. *Сердюк А.С.* Наближення класів аналітичних функцій сумами Фур'є в рівномірній метриці // Укр. мат. журн. — 2005. — **57**, № 8. — С. 1079—1096.
7. *Сердюк А.С., Соколенко І.В.* Рівномірні наближення класів $(\psi, \bar{\beta})$ -диференційовних функцій лінійними методами // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2011. — **8**, № 1. — С. 181—189.
8. *Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функций. — Киев: Наук. думка, 1987. — 268 с.
9. *Теляковский С.А.* О приближении суммами Фурье функций высокой гладкости // Укр. мат. журн. — 1989. — **41**, № 4. — С. 510—518.
10. *Степанец А.И.* Уклонение сумм Фурье на классах бесконечно дифференцируемых функций // Укр. мат. журн. — 1984. — **36**, № 6. — С. 750—758.
11. *Темляков В. Н.* Об оценках поперечников классов бесконечно дифференцируемых функций // Докл. расш. засед. семин. Ин-та прикл. математики им. И.Н. Векуа. — 1990. — **5**, № 2. — С. 111—114.
12. *Сердюк А.С., Степанюк Т.А.* Порядкові оцінки найкращих наближень і наближень сумами Фур'є класів нескінченно диференційовних функцій // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2013. — **10**, № 1. — С. 255—282.

REFERENCES

1. *Stepanets A.I.* Methods of Approximation Theory, Vol. 1, Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kiev, 2002 (in Russian).
2. *Stepanets' A.I., Serdyuk A.S., Shidlich A.L.* Ukr. Math. J., 2007, **59**, No 10: 1569—1580.
3. *Stepanets A.I., Serdyuk A.S., Shidlich A.L.* Ukr. Math. J., 2009, **61**, No 1: 171—177.
4. *Nikol'skii S.M.* Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat., 1946, **10**, No 3: 207-256 (in Russian).
5. *Stechkin S.B.* Tr. Mat. Instituta im. V.A. Steklova, 1980, **145**: 126—151 (in Russian).
6. *Serdyuk A.S.* Ukr. Math. J., 2005, **57**, No 8: 1275—1296.
7. *Serdyuk A.S., Sokolenko I.V.* Zb. Pr. Instytutu Matematyky NAN Ukrainy, 2011, **8**, No 1: 181-189 (in Ukrainian).
8. *Stepanets A.I.* Classification and Approximation of Periodic Functions, Kiev: Naukova Dumka, 1987 (in Russian).
9. *Telyakovskii S.A.* Ukr. Math. J., 1989, **41**, No 4: 444—451.
10. *Stepanets A.I.* Ukr. Mat. J., 1984, **36**, No 6: 567—573.
11. *Temlyakov V.N.* Dokl. razsh. zased. semin. Instituta Prykl. Matematiki im. I.N. Vekua, 1990, **5**, No 2: 111—114 (in Russian).
12. *Serdyuk A.S., Stepanyuk T.A.* Zb. Pr. Instytutu Matematyky NAN Ukrainy, 2013, **10**, No 1: 255—282 (in Ukrainian).

Надійшло до редакції 25.04.2016

A.C. Сердюк, Т.А. Степанюк

Институт математики НАН Украины, Киев

Восточноевропейский национальный университет им. Леси Украинки, Луцк

E-mail: serdyuk@imath.kiev.ua, tania_stepaniuk@ukr.net

РАВНОМЕРНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ СУММАМИ ФУРЬЕ НА КЛАССАХ СВЕРТОК С ОБОБЩЕННЫМИ ЯДРАМИ ПУАССОНА

Найдены асимптотически неулучшаемые оценки верхних граней приближений суммами Фурье в равномерной метрике на классах 2π -периодических функций, представляющихся свертками функций φ , принадлежащих единичным шарам пространств L_p , с обобщенными ядрами Пуассона. Для полученных асимптотических равенств приведена оценка остаточного члена, выражающаяся в явном виде через абсолютные постоянные и параметры задачи, что может быть полезным для практического применения.

Ключевые слова: *суммы Фурье, асимптотическое равенство, обобщенные ядра Пуассона, задача Колмогорова—Никольского.*

A.S. Serdyuk, T.A. Stepanyuk

Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kiev

Lesya Ukrainka Eastern European National University, Lutsk

E-mail: serdyuk@imath.kiev.ua, tania_stepaniuk@ukr.net

UNIFORM APPROXIMATIONS BY FOURIER SUMS ON CLASSES OF CONVOLUTIONS WITH GENERALIZED POISSON KERNELS

We find asymptotic unimprovable equalities for exact upper bounds of approximations by Fourier sums in a uniform metric on the classes of 2π -periodic functions representable in the form of convolutions of functions φ , which belong to unit balls of spaces L_p , with generalized Poisson kernels. For the obtained asymptotic equalities, we introduce the estimate of a remainder, which is expressed in the explicit form via absolute constants and parameters of the problem. This can be useful for practical application.

Keywords: *Fourier sums, asymptotic equality, generalized Poisson kernels, Kolmogorov—Nicol'skii problem.*