



doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2016.12.005>

УДК 517.58/5892

Н.О. Вірченко, А.М. Пономаренко

НТУ України “Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського”

E-mail: smolya14@ukr.net

Нові узагальнення дзета-функції та функції Трікомі

(Представлено академіком НАН України М.О. Перестюком)

Запроваджено нові узагальнення дзета-функції, функції Трікомі, вивчено основні їх властивості. Ці нові узагальнення виконано за допомогою (τ, β) -узагальненої конфлюентної гіпергеометричної функції.

Ключові слова: дзета-функція, функція Трікомі, конфлюентна гіпергеометрична функція.

У зв'язку з широким використанням спеціальних функцій у теорії ймовірностей та математичній статистиці, механіці суцільного середовища, квантовій механіці, квантовій оптиці, астрофізиці, теорії дифракції, аеродинаміці, теорії кодування, біомедицині та ін. інтерес до теорії та застосувань спеціальних функцій значно посилюється [1–5].

За останні роки зростає увага до узагальнених гіпергеометричних функцій за Райтом [6].

Райтом було запроваджено узагальнення гіпергеометричної функції у вигляді ряду [6]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha_1 + \tau_1 n) \dots \Gamma(\alpha_p + \tau_p n) z^n}{\Gamma(\rho_1 + \beta_1 n) \dots \Gamma(\rho_q + \beta_q n) n!}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (1)$$

в якому параметри $\tau_i, \beta_j \in \overline{\mathbb{R}_+}$ ($i=1, p, j=1, q$) та виконується умова

$$1 + \sum_{k=0}^q \beta_k - \sum_{m=1}^p \tau_m > 0. \quad (2)$$

При умові (2) ряд (1) збігається для всіх z , а при умові

$$1 + \sum_{k=0}^q \beta_k - \sum_{m=1}^p \tau_m = 0 \quad (3)$$

ряд збігається для всіх $|z| < \frac{1}{r}$.

У даній роботі запроваджуються нові узагальнення дзета-функції, функції Трікомі та вивчаються основні їх властивості. Це відкриває шлях до глибшого, кращого застосування цих функцій як у теорії спеціальних функцій, так і в багатьох прикладних науках тощо.

© Н.О. Вірченко, А.М. Пономаренко, 2016

Ці нові узагальнення виконано за допомогою (τ, β) узагальненої конфлюентної гіпергеометричної функції [7]:

$${}_1\Phi_1^{\tau, \beta}(a; c; z) \equiv {}_1\Phi_1^{\tau, \beta}(z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} {}_1\Phi_1 \left[\begin{matrix} (c; \tau); \\ (c; \beta); \end{matrix} \middle| zt^\tau \right] dt, \quad (4)$$

де $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} a > 0$, $\tau \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, $\tau - \beta > 1$, $\Gamma(a)$ – класична гамма-функція, ${}_1\Phi_1$ – функція Фокса-Райта [6].

Раніше [8] було запроваджено узагальнені гамма-, бета-, пси-функції, функції Лагера, Вольєрра.

1. Узагальнена дзета-функція. Як відомо [9], дзета-функція Рімана має вигляд

$$\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \quad \alpha = \sigma + i\tau, \quad \sigma > 1, \quad (5)$$

була розглянута Ейлером у 1737 р. для дійсних α . Він довів і тотожність

$$\zeta(\alpha) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^\alpha} \right)^{-1}, \quad \alpha = \sigma + i\tau, \quad \sigma > 1. \quad (6)$$

Запровадимо узагальнення дзета-функції Рімана у вигляді

$$\zeta^r(\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{t^{\alpha-1} e^{-t}}{1-e^{-t}} {}_r\Phi_1^{\tau, \beta} \left(a; c; -\frac{r}{t} \right) dt, \quad (7)$$

де $\operatorname{Re} r > 0$; $r = 0$, $\sigma > 1$.

Вивчимо основні властивості $\zeta^r(\alpha)$.

Теорема 1. *Справедлива рівність*

$$\zeta^r(\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_{nr}(\alpha) n^{-\alpha}, \quad (8)$$

$\operatorname{Re} r > 0$; $r = 0$, $\sigma > 1$,

де Γ_{nr} – узагальнена гамма-функція [8].

Доведення. Розгорнувши $(1-e^{-t})^{-1}$ в ряд за степенями e^{-t} , одержимо

$$\zeta^r(\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-nt} {}_r\Phi_1^{\tau, \beta} \left(a; c; -\frac{r}{t} \right) dt. \quad (9)$$

Поміняємо порядок підсумовування та інтегрування у (9) (це законно, оскільки ряд збігається до інтегрованої функції). А далі після перетворень, враховуючи означення узагальненої гамма-функції, матимемо (8).

Примітки.

1. Використовуючи властивість узагальненої гамма-функції [8], отримуємо цікаву рівність:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_{nr}(\alpha) = r^\alpha \Gamma(-\alpha) \zeta^r(-\alpha), \quad \operatorname{Re} r > 0, \alpha \neq 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

2. Застосувавши рівність [9]

$$\Gamma_r(\alpha) = 2r^{\frac{\alpha}{2}} K_\alpha(2\sqrt{r}), \quad \operatorname{Re} r > 0, \quad \left| \arg \sqrt{r} \right| < \pi, \quad (11)$$

одержимо зв'язок узагальненої дзета-функції з функцією Макдональда:

$$\zeta^r(\alpha) = \frac{2r^{\frac{\alpha}{2}}}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{\alpha}{2}} K_{\alpha}(2\sqrt{nr}), \operatorname{Re} r > 0. \quad (12)$$

3. Замінивши t на $2t$ у (7) та використавши рівність

$$(e^{2t} - 1)^{-1} = e^{-t} \operatorname{csc} h(t) / 2, \quad (13)$$

отримаємо таке інтегральне зображення для функції $\zeta^r(\alpha)$:

$$\zeta^r(\alpha) = \frac{2^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} {}_1\Phi_1^{\tau, \beta} \left(a; c; -\frac{r}{2t} \right) \operatorname{csc} h(t) dt. \quad (14)$$

При $r = 0$ маємо відомий результат для класичної дзета-функції:

$$\zeta(\alpha) = \frac{2^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} \operatorname{csc} h(t) dt, \quad \sigma > 1. \quad (15)$$

Теорема 2. Для узагальненої дзета-функції справедлива формула

$$\zeta^r(\alpha) - 2^{1-\alpha} \zeta^{2r}(\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{t^{\alpha-1} e^{-t}}{1+e^{-t}} {}_1\Phi_1^{\tau, \beta} \left(a; c; -\frac{r}{t} \right) dt, \quad \operatorname{Re} r > 0; r = 0, \sigma > 0. \quad (16)$$

Доведення. Нехай $\alpha = n$ у формулі для узагальненої Γ -функції, тоді матимемо

$$n^{-\alpha} \Gamma_{nr}(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{-\alpha-1} e^{-nt} {}_1\Phi_1^{\tau, \beta} \left(a; c; -\frac{r}{t} \right) dt. \quad (17)$$

Помноживши на $(-1)^{n-1}$, просумувавши обидві частини за n , отримаємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\Gamma_{nr}(\alpha)}{n^{\alpha}} = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} (1+e^{-t})^{-1} e^{-t} {}_1\Phi_1^{\tau, \beta} \left(a; c; -\frac{r}{t} \right) dt. \quad (18)$$

Тепер із (18) та формули

$$\zeta^r(\alpha) - 2^{1-\alpha} \zeta^{2r}(\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \Gamma_{nr}(\alpha)}{n^{\alpha}}, \quad (19)$$

$$\operatorname{Re} r > 0; r = 0, \sigma > 0,$$

одержимо (16).

Наслідок. Із (16) при $r = 0$ випливає цікава формула для класичної дзета-функції:

$$\zeta(\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha) (1-2^{1-\alpha})} \int_0^{\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{1+e^t} dt, \quad \sigma > 0. \quad (20)$$

Значний інтерес становить зв'язок між узагальненою дзета-функцією та інтегральними перетвореннями.

Очевидно, що (7) можна записати у вигляді інтегрального перетворення Мелліна:

$$\zeta^r(\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} M \left\{ \frac{e^{-t} {}_1\Phi_1^{\tau, \beta} \left(a; c; -\frac{r}{t} \right)}{1-e^{-t}}; \alpha \right\}, \quad (21)$$

$$\operatorname{Re} r > 0; r = 0, \sigma > 1$$

Виконавши підстановку $t = e^{-x}$, одержимо інтегральне перетворення Лапласа:

$$\zeta^r(\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a; c; -re^x)}{\exp(e^{-x}) - 1} e^{-\alpha x} dx. \quad (22)$$

Підстановка $\alpha = \sigma + i\omega$ у (22) дає перетворення Фур'є:

$$\zeta^r(\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a; c; -re^x)}{\exp(e^{-x}) - 1} e^{-i\omega x} dx. \quad (23)$$

Друге узагальнення дзета-функції подамо у вигляді

$$*\zeta^r(\alpha) = \frac{1}{A(\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{t^{\alpha-1} e^{-t}}{1+e^{-t}} {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a; c; -\frac{r}{t}\right) dt, \quad (24)$$

де $\operatorname{Re} r > 0; r = 0, \sigma > 0, A(\alpha) = \Gamma(\alpha) (1 - 2^{1-\alpha})$.

Розгорнувши вираз $(1+e^{-t})^{-1}$ у ряд, одержимо

$$*\zeta^r(\alpha) = \frac{1}{A(\alpha)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-nt} {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a; c; -\frac{r}{t}\right) dt, \quad (25)$$

а після перетворень маємо

$$*\zeta^r(\alpha) = \frac{1}{A(\alpha)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} \Gamma_{nr}(\alpha), \quad (26)$$

$\operatorname{Re} r > 0; r = 0, \sigma > 0$.

Узагальнення дзета-функції Гурвіця [9]

$$\zeta(\alpha, q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+q)^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{t^{\alpha-1} e^{-qt}}{1-e^{-t}} dt, \quad (27)$$

$\sigma > 1, 0 < q \leq 1$,

подамо у вигляді

$$\zeta^r(\alpha, q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a; c; -\frac{r}{n+q}\right)}{(n+q)^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{t^{\alpha-1} e^{-qt}}{1-e^{-t}} {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a; c; -\frac{r}{t}\right) dt, \quad (28)$$

$$*\zeta^r(\alpha, q) = \frac{1}{A(\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{t^{\alpha-1} e^{-qt}}{1-e^{-t}} {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a; c; -\frac{r}{t}\right) dt, \quad (29)$$

$0 < q \leq 1, \operatorname{Re} r > 0; r = 0, \sigma > 0$.

Легко зауважити, що

$$\zeta_0^r(\alpha, q) = {}^r\zeta(\alpha, q), \quad \sigma > 1, \quad (30)$$

та

$$*\zeta^r(\alpha, q) = \frac{2^{1-\alpha} \zeta\left(\alpha, \frac{q}{2}\right) - \zeta^r(\alpha, q)}{1 - 2^{1-\alpha}}, \quad \sigma > 0, \quad 0 < q \leq 1. \quad (31)$$

Теорема 3. *Справедлива рівність*

$${}^*\zeta^r(\alpha, q) = \frac{2^{1-\alpha} \zeta^{2r}\left(\alpha, \frac{q}{2}\right) - \zeta^r(\alpha, q)}{1 - 2^{1-\alpha}}. \quad (32)$$

Доведення. Виконавши заміну q на $\frac{q}{2}$ у (28), t на $2t$, одержимо

$$\zeta^{2r}\left(\alpha, \frac{q}{2}\right) = \frac{2^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1} e^{-qt}}{1 - e^{-2t}} {}_1\Phi_1^{\tau, \beta}\left(a; c; -\frac{r}{2t}\right) dt. \quad (33)$$

Але

$$2(1 - e^{-2t}) = (1 - e^{-t})^{-1} + (1 + e^{-t})^{-1}. \quad (34)$$

Із (33) і (34) дістанемо

$$2^{1-\alpha} \zeta^{2r}\left(\alpha, \frac{q}{2}\right) - \zeta^r(\alpha, q) = (1 - 2^{1-\alpha}) {}^*\zeta^r(\alpha, q),$$

а звідси одержимо (32). Використавши співвідношення

$$\frac{1}{e^t + 1} = \frac{1}{e^t - 1} - \frac{2}{e^{2t} - 1}, \quad \int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{e^{2t} - 1} dt = 2^{-\alpha} \int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{e^t - 1} dt,$$

матимемо аналітичне продовження

$$\zeta^r(\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)(1 - 2^{1-\alpha})} \int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{e^{t+1}} dt. \quad (35)$$

2. Узагальнена функція Трікомі. Трікомі у 1927 р. запропонував функцію $\Psi(a, c; x)$ [10]:

$$\Psi(a, c; x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} (1+t)^{c-a-1} e^{-xt} dt, \quad (36)$$

яка визначає розв'язок рівняння [9]

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + (c-x) \frac{dy}{dx} - ay = 0 \quad (37)$$

у півплощині $\operatorname{Re} x > 0$. Область визначення можна розширити поворотом шляху інтегрування.

Запровадимо узагальнення функції Трікомі (36) у вигляді

$${}^r U^{\tau, \beta}(a, c; x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} (1+t)^{c-a-1} e^{-xt} {}_1\Phi_1^{\tau, \beta}\left(\alpha; \gamma; -\frac{r}{t^\delta}\right) dt, \quad (38)$$

де $\operatorname{Re} a > \operatorname{Re} c > 0$, $(\tau, \beta) \in \mathbb{R}_+$; $\tau > 0$; $\tau - \beta < 1$, $a, c \in \mathbb{C}$, $\delta > 0$, $r > 0$, $\operatorname{Re} \alpha > \operatorname{Re} \gamma > 0$, ${}_1\Phi_1^{\tau, \beta}(\dots)$ – r -узагальнена (τ, β) конфлюентна гіпергеометрична функція (4). Формули диференціювання для ${}^r U^{\tau, \beta}(a, c; x)$ одержуємо безпосереднім диференціюванням:

$$\frac{d}{dx} {}^r U^{\tau, \beta}(a, c; x) = -\frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty t^a (1+t)^{c-a-1} e^{-xt} {}_1\Phi_1^{\tau, \beta}\left(\alpha; \gamma; -\frac{r}{t^\delta}\right) dt, \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dx^n} rU^{\tau, \beta}(a, c; x) &= -\frac{(-1)^n}{\Gamma(a)} \int_0^\infty t^{a+n-1} (1+t)^{c-a-1} e^{-xt} r_1\Phi_1^{\tau, \beta}\left(\alpha; \gamma; -\frac{r}{t^\delta}\right) dt = \\ &= (-1)^n \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} rU^{\tau, \beta}(a+n, c+n; x). \end{aligned} \quad (40)$$

Справедливою є така теорема.

Теорема 4. При умовах існування функції $rU^{\tau, \beta}(a, c; x)$ справедливі такі функціональні співвідношення:

$$\begin{aligned} rU^{\tau, \beta}(a, c; \alpha+1; \gamma; \delta; x) &= (\gamma - \alpha - 1) rU^{\tau, \beta}(a, c; \alpha; \gamma; \delta; x) + \\ &+ \frac{r\tau(\alpha - \gamma + 1) \Gamma(a - \delta) \mathbf{B}(\alpha + \tau, \gamma + \beta - \alpha - \tau)}{\alpha \Gamma(a) \mathbf{B}(\alpha, \gamma - \alpha)} rU^{\tau, \beta}(a - \delta, c - \delta; \alpha + \tau; \gamma + \beta; \delta; x). \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} rU^{\tau - \alpha, \beta - \gamma}(a, c; \alpha + 1; \gamma; \delta; x) &= (\gamma - \alpha - 1) rU^{\tau - \alpha, \beta - \gamma}(a, c; \alpha; \gamma; \delta; x) + \\ &+ \frac{r(\tau - \alpha)(\alpha - \gamma + 1) \Gamma(a - \delta) \mathbf{B}(\tau, \beta - \tau)}{\alpha \Gamma(a) \mathbf{B}(\alpha, \gamma - \alpha)} rU^{\tau - \alpha, \beta - \gamma}(a - \delta, c - \delta; \tau; \beta; \delta; x). \end{aligned} \quad (42)$$

Доведення виконуємо за допомогою певних заміन $\alpha, \tau = \tau_1 + \alpha, \beta = \beta_1 + \gamma$ та простих, але громіздких перетворень.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Andrews L.G. Special Function for Engineers and Applied Mathematics. — New York: Macmillan, 1985. — 350 p.
2. Andrews G., Askey R., Roy R. Special Functions. — New York: Cambridge Univ. Press, 1999. — 410 p.
3. Edwards H.M. Riemann's Zeta Function. — New York: Academic Press, 1954. — 370 p.
4. Ewell J.A. A new series representation for $\zeta(3)$ // Amer. Math. Monthly. — 1990. — **97**. — P. 219–220.
5. Titchmarsh E.C. The Theory of Riemann Zeta-Function. — London: Oxford Univ. Press, 1951. — 320 p.
6. Wright E.M. The asymptotic expansion of the generalized hypergeometric function // Proc. London Math. Soc. — 1940. — **46**, No 2. — P. 389–408.
7. Virchenko N. On the generalized confluent hypergeometric function and its application // Fract. Calculus and App. Anal. — 2006. — **9**, No 2. — P. 101–108.
8. Вірченко Н. Узагальнені гіпергеометричні функції. — Київ: НТУУ “КПІ”, 2016. — 480 с.
9. Бейтмен Г., Эрдейи М. Высшие трансцендентные функции. — Москва: Наука, 1965. — Т. 1. — 296 с.
10. Tricomi F. Funzioni Ipergeometriche Confluenti. — Roma: Edizioni Cremonese, 1954. — 310 s. — (Monografie Matematiche, Bd. 1).

REFERENCES

1. Andrews L.G. Special Function for Engineers and Applied Mathematics, New York: Macmillan, 1985.
2. Andrews G., Askey R., Roy R. Special Function, New York: Cambridge Univ. Press, 1999.
3. Edwards H.M. Riemann's Zeta Function, New York: Academic Press, 1954.
4. Ewell J.A. Amer. Math. Monthly, 1990, **97**: 219-220.
5. Titchmarsh E.C. The Theory of Riemann Zeta-Function, London: Oxford Univ. Press, 1951.
6. Wright E.M. Proc. London Math. Soc, 1940, **46**, No 2: 389-408.
7. Virchenko N. Fract. Calculus and App. Anal., 2006, **9**, No 2: 101-108.
8. Virchenko N. The generalized hypergeometric functions, Kiev: NTU of Ukraine “KPI”, 2016 (in Ukrainian).
9. Bateman H., Erdelyi A. Higher Transcendental Functions, New York: McGraw-Hill, 1953, Vol. 1.
10. Tricomi F. Funzioni Ipergeometriche Confluenti, Monografie Matematiche, Bd. 1, Roma: Edizioni Cremonese, 1954.

Надійшло до редакції 06.06.2016

Н.А. Вирченко, А.Н. Пономаренко

НТУ Украины “Киевский политехнический институт им. Игоря Сикорского”

E-mail: smolya14@ukr.net

НОВЫЕ ОБОБЩЕНИЯ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ И ФУНКЦИИ ТРИКОМИ

Введены новые обобщения дзета-функции, функции Трикоми, изучены основные их свойства. Эти новые обобщения выполнены с помощью (τ, β) -обобщенной конфлюэнтной гипергеометрической функции.

Ключевые слова: *дзета-функция, функция Трикоми, конфлюэнтная гипергеометрическая функция.*

N.O. Virchenko, A.M. Ponomarenko

NTU of Ukraine “Igor Sikorsky Kiev Polytechnic Institute”

E-mail: smolya14@ukr.net

NEW GENERALIZATIONS OF THE ZETA-FUNCTION AND THE TRICOMI FUNCTION

New generalizations of the zeta-function and the Tricomi function are presented, and their main properties are studied. These new generalizations are realized with help of the (τ, β) -generalized confluent hypergeometric function.

Keywords: *zeta-function, Tricomi function, confluent hypergeometric function.*