doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2016.12.012

УДК 517.929.2

М.Ф. Городній, І.В. Гончар

Київський національний університет ім. Тараса Шевченка
E-mail: goncharinna@ukr.net

Про обмежені розв'язки різницевого рівняння зі змінним операторним коефіцієнтом

(Представлено академіком НАН України М.О. Перестюком)

Досліджується питання про існування єдиного обмеженого розв'язку одного різницевого рівняння зі змінним операторним коефіцієнтом у скінченновимірному банаховому просторі.

Ключові слова: *різницеве рівняння, скінченновимірний простір, лінійний оператор, обмежений розв'язок.*

Нехай X — скінченновимірний комплексний банахів простір з нормою $\|\cdot\|$ і нульовим елементом $\overline{0}$; A, B — лінійні оператори в X; I — одиничний оператор в X.

Розглянемо різницеве рівняння

$$x_{n+1} = A_n x_n + y_n, \ n \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

у якому $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$ — задана, а $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ — шукана послідовність елементів простору X, $A_n = A$, $n \geqslant 1$, $A_n = B$, $n \leqslant 0$.

Наша мета — отримати необхідні і достатні умови на оператори A, B, при виконанні яких справджується така умова.

Умова 1. Для довільної обмеженої в X послідовності $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$ рівняння (1) має єдиний обмежений розв'язок $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ у просторі X.

Аналогічне питання досліджувалося, зокрема, в [1—3] для різницевого рівняння зі сталими і в [2, 4—6] зі змінними операторними коефіцієнтами. У [6, с. 250] доведено, що для різницевого рівняння

$$x_{n+1} = T_n x_n + y_n, \ n \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

умова існування єдиного обмеженого розв'язку еквівалентна умові дискретної дихотомії для послідовності операторів $\{T_n, n \in \mathbb{Z}\}$. Останню умову важко перевіряти. Інший підхід до дослідження питання про існування єдиного обмеженого розв'язку рівняння (2) запропоновано в [2, с. 25]. Цей підхід розвивається і використовується в даній роботі.

Допоміжні твердження. Покладемо $Q_-^0 = \{z \in X \mid \sup_{n\geqslant 1} \| A^n z \| < \infty\}$, $Q_+^0 = \{z \in X \mid$ існує послідовність $\{a(\nu, 0, z), \nu \leqslant 0\}$ така, що $a(0,0,z) = z; Ba(\nu, 0, z) = a(\nu+1, 0, z), \nu \leqslant -1; \sup_{\nu\leqslant 0} \|a(\nu, 0, z)\| < \infty\}$.

Якщо $y_0 = y_+^0 \in Q_+^0, y_n = \overline{0}, n \neq 0$, то послідовність $\{\ldots, -a(-2, 0, y_+^0), \underbrace{-a(-1, 0, y_+^0)}_{0}, \overline{0}, \overline{0}, \ldots\}$ є відповідним послідовності $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$ обмеженим розв'язком рівняння (1). Тому виконується така лема.

Лема 1. *Якщо виконується умова 1, то для кожного* $z \in Q_+^0$ *існує єдина послідовність* $\{a(\nu, 0, z), \nu \leqslant 0\}$.

Лема 2. *Якщо виконується умова 1, то* $X = Q_-^0 \dot{+} Q_+^0$, *тобто* X *є прямою сумою* Q_-^0 *та* Q_+^0.

Доведення. Зафіксуємо $u \in X$ і доведемо, що знайдуться такі $\alpha \in Q_-^0$, $\beta \in Q_+^0$, що $u = \alpha + \beta$. Розглянемо рівняння

$$u_{n+1} = Au_n, n \geqslant 1; \quad u_1 = Bu_0 + u; \quad u_{n+1} = Bu_n, n \leqslant -1.$$

За умовою 1 воно має єдиний обмежений розв'язок $\{u_n, n \in \mathbb{Z}\}$. Тоді $u_1 \in Q_-^0$, оскільки $u_2 = Au_1$, $u_3 = A^2 u_1, \ldots, u_{n+1} = A^n u_1, \ldots$ — обмежена послідовність. Також $u_0 \in Q_+^0$, тому що $u_0 = Bu_{-1}$, $u_{-1} = Bu_{-2}, \ldots$, а отже, для u_0 маємо, що $a(0, 0, u_0) = u_{-1}$, $a(-1, 0, u_0) = u_{-2}$ і т. д. Тому і $Bu_0 \in Q_+^0$. Отже, $u = \alpha + \beta$, де $\alpha = u_1$, $\beta = -Bu_0$.

Доведемо єдиність розкладу. Якщо, від супротивного, для деякого $u \in X$ вказаний розклад не єдиний, то знайдеться $w \in Q_-^0 \cap Q_+^0, w \neq \overline{0}$. Але тоді послідовність $\{\ldots, a(-2, 0, w), \underbrace{a(-1, 0, w)}_{0}, w, Aw, A^2 w, \ldots\}$ є ненульовим обмеженим розв'язком однорідного рівняння (1). Протиріччя.

Лема 3. *Якщо виконується умова 1, то спектри* $\sigma(A)$, $\sigma(B)$ *операторів* A, B *не перетинаються з одиничним колом* $S = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$.

Доведення. Припустимо, від супротивного, що існує $\lambda \in S \cap \sigma(A)$, Зафіксуємо власний вектор w оператора A, відповідний власному числу λ. Внаслідок умови 1 різницеве рівняння (1) має єдиний обмежений розв'язок, відповідний обмеженій послідовності $\overline{y}^{(1)} = \{\ldots, \overline{0}, \underbrace{w}_{0}, \overline{0}, \ldots\}$. Цей розв'язок явно визначається і записується у вигляді $\overline{x}^{(1)} = \{\ldots, \overline{0}, \underbrace{w}_{1}, \lambda w, \lambda^2 w, \ldots\}$. Аналогічно для кожного $m \geqslant 1$ відповідний обмеженій послідовності $\overline{y}^{(m)} = \{\ldots, \overline{0}, \underbrace{w}_{0}, \lambda w, \ldots, \lambda^{m-1} w, \overline{0}, \ldots\}$ єдиний обмежений розв'язок рівняння (1) має вигляд $\overline{x}^{(m)} = \{\ldots, \overline{0}, \underbrace{w}_{1}, 2\lambda w, 3\lambda^2 w, \ldots, m\lambda^m w, m\lambda^{m+1} w, m\lambda^{m+2} w, \ldots\}$.

Відзначимо, що в банаховому просторі $l_\infty(\mathbb{Z}, X) = \{\overline{x} = \{x_n, n \in \mathbb{Z}\} \subset X \mid \|\overline{x}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|\overline{x_n}\| < \infty\}$ різницеве рівняння (1) записується у вигляді $T\overline{x} = \overline{y}$, де $T: l_\infty \to l_\infty$ — лінійний неперервний оператор, який кожному $\overline{x} = \{x_n, n \in \mathbb{Z}\} \in l_\infty$ ставить у відповідність такий елемент $T\overline{x} = \{(Tx)_n, n \in \mathbb{Z}\} \in l_\infty$, що $(Tx)_n = x_{n+1} - Ax_n$, $n \geqslant 1$, $(Tx)_n = x_{n+1} - Bx_n$, $n \leqslant 0$. З умови 1 і теореми Банаха про обернений оператор випливає, що T має неперервний обернений оператор T^{-1}. Але $\|T^{-1}\overline{y}^{(m)}\|_\infty = \|\overline{x}^{(m)}\|_\infty = m\|w\|$ для кожного $m \geqslant 1$, що суперечить обмеженості T^{-1}. Таким чином, $S \cap \sigma(A) = \varnothing$.

Аналогічно перевіряється, що $S \cap \sigma(B) = \varnothing$.

Нехай $\sigma_-(A)$, $\sigma_-(B)$ — частини спектрів операторів A, B, які лежать всередині, а $\sigma_+(A)$, $\sigma_+(B)$ — зовні кола S. Вважатимемо, що множини $\sigma_\pm(A)$, $\sigma_\pm(B)$ непорожні. Зауважимо, що всі отримані нижче результати залишаються справедливими і у випадку, коли серед цих множин є порожні, з очевидними змінами в отриманих формулах.

Внаслідок леми 3 при виконанні умови 1 простір X розкладається в пряму суму інваріантних відносно A підпросторів $X = X_+(A) \dotplus X_-(A)$ таким чином, що звуження A_-, A_+ оператора A на $X_-(A)$, $X_+(A)$ мають спектри $\sigma_-(A)$, $\sigma_+(A)$. Також $X = X_+(B) \dotplus X_-(B)$ і звуження B_-, B_+ оператора B на $X_-(B)$, $X_+(B)$ мають такі ж властивості. Відзначимо, що при цьому збігаються ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| A_+^{-n} \|, \sum_{n=1}^{\infty} \| A_-^{n} \|, \sum_{n=1}^{\infty} \| B_+^{-n} \|, \sum_{n=1}^{\infty} \| B_-^{n} \|. \tag{3}$$

Лема 4. *Якщо* $S \cap \sigma(A) = \varnothing$, $S \cap \sigma(B) = \varnothing$, *то* $Q_-^0 = X_-(\mathrm{A})$, $Q_+^0 = X_+(B)$.

Доведення. Доведемо, що $Q_-^0 = X_-(A)$. Внаслідок збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \| A_-^n \|$ послідовність $\{\| A^n z \|, n \geqslant 1\}$ обмежена для кожного $z \in X_-(A)$, а отже, $X_-(A) \subset Q_-^0$.

Також у випадку, коли $z \in X_+(A) \cap Q_-^0$, матимемо

$$\| z \| = \| A_+^{-n} A_+^n z \| \leqslant \| A_+^{-n} \| \cdot \sup_{k \geqslant 1} \| A_+^k z \| \to 0, \quad n \to \infty,$$

оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \| A_+^{-n} \|$ збігається. Таким чином, $z = \overline{0}$ і $Q_- = X_-(A)$.

Доведемо, що $Q_+^0 = X_+(B)$. Нехай $z \in X_+(B)$. Оскільки X_+ — інваріантний простір відносно оператора B, то $a(\nu, 0, z) = B_+^{\nu - 1} z$ для кожного $\nu \leqslant 0$, причому $\sup_{\nu \leqslant 0} \| B_+^{\nu - 1} z \| < \infty$. Тому $z \in Q_+^0$. Отже, $X_+(B) \subset Q_+^0$.

Нехай $z \in X_-(B) \cap Q_+^0$. Позначимо через P_-^B, P_+^B проектори в X на $X_-(B)$, $X_+(B)$, що відповідають зображенню $X = X_-(B) \dotplus X_+(B)$. Тоді для кожного $\nu \leqslant 0$

$$\| z \| = \| B_-^{|\nu| + 1} P_-^B a(\nu, 0, z) \| \leqslant \| B_-^{|\nu|} \| \cdot \| P_-^B \| \cdot \sup_{k \leqslant 1} \| a(k, 0, z) \| \to 0, \quad \nu \to -\infty,$$

оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \| B_-^n \|$ збігається. Тому $z = \overline{0}$. Отже, $Q_+^0 = X_+(B)$.

Основні результати. Нехай $X = Q_-^0 \dotplus Q_+^0$. Зафіксуємо обмежену послідовність $\overline{y} = \{\overline{y}_n, n \in \mathbb{Z}\}$ і покладемо $\| \overline{y} \|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \| y_n \|$. Внаслідок леми 2 елемент y_0 цієї послідовності єдиним чином зображується у вигляді $y_0 = y_0^- + y_0^+$, де $y_0^- \in Q_-^0$, $y_0^+ \in Q_+^0$. Позначимо через P_-^0, P_+^0 проектори в X на підпростори Q_-^0, Q_+^0, що відповідають зображенню $X = Q_-^0 \dotplus Q_+^0$, P_-^A, P_+^A — проектори в X на $X_-(A)$, $X_+(A)$, що відповідають зображенню $\mathrm{X} = X_-(A) \dotplus X_+(A)$.

Покладемо для кожного $n \geqslant 1$

$$P_+^n = A^n P_+^0 A_+^{-n} P_+^A, \quad P_-^n = I - P_+^n; \quad P_-^{-n} = B^{-n} P_- B_-^n P_-^B, \quad P_+^{-n} = I - P_-^{-n}; \tag{4}$$

$$x_1 = P_-^0 y_0 + \sum_{\nu = -\infty}^{-1} P_-^0 B_-^{|\nu|} P_-^B y_\nu - \sum_{\nu = 1}^{\infty} P_+^0 A_+^{-\nu} P_+^A y_\nu; \tag{5}$$

$$\forall n \geqslant 2 : x_n = \sum_{k=1}^{n-1} A^{n-1-k} P_-^k y_k + \sum_{\nu=-\infty}^{0} A_-^{n-1} P_-^0 B_-^{|\nu|} P_-^B y_\nu - \sum_{\nu=n}^{\infty} P_+^{n-1} A_+^{n-1-\nu} P_+^A y_\nu ; \tag{6}$$

$$\forall n \leqslant 0 : x_n = P_-^{n-1} y_{n-1} + \sum_{\nu=-\infty}^{n-2} P_-^{n-1} B_-^{|\nu|+n-1} P_-^{\mathrm{B}} y_\nu - B_+^{-|n|-1} P_+^0 y_0 -$$

$$- B_+^{-|n|} P_+^{-1} y_{-1} - \ldots - B_+^{-1} P_+^{-|n|} y_{-|n|} - \sum_{\nu=1}^{\infty} B_+^{n-1} P_+ A_+^{-\nu} P_+^A y_\nu . \tag{7}$$

Основні результати роботи містять нижчесформульовані твердження.

Лема 5. *Припустимо, що виконуються такі умови:*

(i) $\sigma(A) \cap S = \varnothing, \sigma(B) \cap S = \varnothing$;

(ii) $X = X_-(A) \dot{+} X_+(B)$.

Тоді $Q_-^0 = X_-(A), Q_+^0 = X_+(B)$ *і ряди з (5)—(7) абсолютно збігаються за нормою та задають відповідний обмеженій послідовності* $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$ *обмежений розв'язок* $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ *рівняння (1). Цей розв'язок єдиний у класі всіх обмежених в X послідовностей.*

Доведення. Рівності множин $Q_-^0 = X_-(A)$, $Q_+^0 = X_+(B)$ справджуються внаслідок леми 4. Доведемо, що для визначених за допомогою (4) проекторів послідовність $\{\| P_+^n \|, n \geqslant 1\}$ є обмеженою.

Справді, $P_+^0 + P_-^0 = I$, причому P_-^0 проектує на $X_-(A)$, а отже, $P_+^n = A^n (I - P_-^0) A_+^{-n} P_+^{\mathrm{A}} = P_+^{\mathrm{A}} - A_-^n P_-^0 A_+^{-n} P_+^{\mathrm{A}}$ для довільного $n \geqslant 1$, звідки

$$\| P_+^n \| \leqslant \| P_+^{\mathrm{A}} \| + \| P_-^0 \| \cdot \| P_+^{\mathrm{A}} \| \cdot \sup_{n \geqslant 1} \| A_-^n \| \cdot \sup_{n \geqslant 1} \| A_+^{-n} \| .$$

Тут $\sup_{n \geqslant 1} \| A_-^n \| < \infty$, $\sup_{n \geqslant 1} \| A_+^{-n} \| < \infty$ внаслідок збіжності рядів (3).

Аналогічно послідовність $\{\| P_-^{-n} \|, n \geqslant 1\}$ є обмеженою.

Тому, з урахуванням (3), ряди із (5)—(7) збігаються абсолютно за нормою і послідовність $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ є обмеженою.

Безпосередньою підстановкою перевіряється, що визначена за допомогою (5)—(7) послідовність $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ є розв'язком рівняння (1), відповідним обмеженій послідовності $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$.

Доведемо єдність цього розв'язку в класі обмежених у X послідовностей. Внаслідок лінійності різницевого рівняння (1) досить переконатися, що однорідне різницеве рівняння

$$x_{n+1} = A x_n, \quad n \geqslant 1; \quad x_{n+1} = B x_n, \quad n \leqslant 0 \tag{8}$$

має тільки нульовий обмежений розв'язок.

Перевіримо це. Нехай $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ — обмежений розв'язок рівняння (8), Доведемо спочатку, що $x_1 = \overline{0}$. Справді, оскільки послідовність $\{x_1, x_2 = Ax_1, x_3 = A^2 x_1, ...\}$ обмежена, то $x_1 \in Q_-^0$. Також $x_1 \in Q_+^0$, тому що $x_1 = Bx_0$, $x_0 = Bx_{-1}$, $x_{-1} = Bx_{-2}$, ..., причому послідовність $\{..., x_{-1}, x_0, x_1, ...\}$ обмежена. Внаслідок умови (ii) $X = Q_-^0 \dot{+} Q_+^0$, а отже, $x_1 = \overline{0}$.

Оскільки $x_1 = \overline{0}$, то $x_{n+1} = A^n x_1 = \overline{0}$ для кожного $n \geqslant 1$. Також відзначимо, що як і для x_1 при фіксованому $k \leqslant 0$ перевіряється включення $x_k \in Q_+^0 = X_+(B)$. При цьому $\overline{0} = x_1 =$

$= Bx_0 = B^2 x_{-1} = \ldots = B^{|k|+1} x_k$, звідки $x_k \in X_-(B)$. Тому $x_k \in X_-(B) \bigcap X_+(B)$, звідки випливає, що $x_k = \overline{0}$. Таким чином, рівняння (8) має лише нульовий обмежений розв'язок.

Теорема 1. *У скінченновимірному комплексному банаховому просторі X умова 1 виконується тоді і тільки тоді, коли виконуються умови (i), (ii) леми 5.*

Якщо умови (i), (ii) виконуються, то відповідний обмеженій послідовності $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$ єдиний обмежений розв'язок $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ різницевого рівняння (1) визначається формулами (5)—(7).

Теорема 1 є прямим наслідком лем 1—5.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. *Городний М.Ф.* Ограниченные и периодические решения одного разностного уравнения и его стохастического аналога в банаховом пространстве // Укр. матем. журн. — 1991. — **43**, № 1. — С. 42—46.
2. *Дороговцев А.Я.* Периодические и стационарные режимы бесконечномерных детерминированных и стохастических динамических систем. — Киев: Вища шк., 1992. — 319 с.
3. *Ким В.С.* Об условиях существования ограниченных решений разностного уравнения в банаховом пространстве // Дифференц. уравнения. — 1967. — **3**, № 12. — С. 2151—2160.
4. *Баскаков А.Г., Пастухов А.И.* Спектральный анализ оператора взвешенного сдвига с неограниченными операторными коэффициентами // Сиб. мат. журн. — 2001. — **42**, № 6. — С. 1231—1243.
5. *Слюсарчук В.Е.* Обратимость линейных неавтономных разностных операторов в пространстве ограниченных на $\mathbb{Z}$ функций // Матем. заметки. — 1985. — **37**, вып. 5. — С. 662—666.
6. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. — Москва: Мир, 1985.— 376 с.

REFERENCES

1. *Gorodnii M.F.* Ukr. Mat. J., 1991, **43**, No 1: 42-46 (in Russian).
2. *Dorogovtsev A.Ya.* Periodic and Stationary Regimes of Infinite-Dimensional Deterministic and Stochastic Dynamical Systems, Kiev: Vyshcha Shkola, 1992 (in Russian).
3. *Kim V.S.* Differ. Equations, 1967, **3**, No 12: 2151-2160 (in Russian).
4. *Baskakov A.G., Pastukhov A.I.* Sib. Math. J., 2001, **42**, Iss. 6: 1026-1035.
5. *Slyusarchuk V.E.* Math. Notes, 1985, **37**, Iss. 5: 360-363.
6. *Henry D.* Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations, Moscow: Mir, 1985 (in Russian).

Надійшло до редакції 02.06.2016

М.Ф. Городний, И.В. Гончар

Киевский национальный университет им. Тараса Шевченка
E-mail: goncharinna@ukr.net

ОБ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЯХ РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ
С ПЕРЕМЕННЫМ ОПЕРАТОРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Исследуется вопрос о существовании единственного ограниченного решения одного разностного уравнения с переменным операторным коэффициентом в конечномерном банаховом пространстве.

Ключевые слова: *разностное уравнение, конечномерное пространство, линейный оператор, ограниченное решение.*

M.F. Gorodnii, I.V. Gonchar

Taras Shevchenko National University of Kiev
E-mail: goncharinna@ukr.net

ON THE BOUNDED SOLUTIONS OF A DIFFERENCE EQUATION
WITH VARIABLE OPERATOR COEFFICIENT

We study the problem of existence of the unique bounded solution of a difference equation with variable operator coefficient in a finite-dimensional Banach space.

Keywords: *difference equation, finite-dimensional space, linear operator, bounded solution.*