ОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

12 • 2016

doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2016.12.022
УДК 532.528

Академик НАН Украины **В.Д. Кубенко**

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины, Киев
E-mail: vdk@inmech.kiev.ua

О нестационарной осесимметричной задаче для упругого полупространства при смешанных граничных условиях

Рассматривается задача определения напряженно-деформированного состояния упругого полупространства, на границе которого действует нестационарная нормальная нагрузка. Формулируется смешанная краевая задача, решение которой строится с применением интегральных преобразований Лапласа и Ханкеля. Выполнено точное обращение преобразований. Как результат, получено аналитическое решение задачи, которое определяет перемещение в произвольной точке оси симметрии в произвольный момент времени.

Ключевые слова: *нестационарные упругие волны, интегральные преобразования, смешанные граничные условия.*

В задачах теории упругости граничные условия принадлежат к одному из следующих типов (см., например, [1]): задается вектор напряжений (первая краевая задача); задается вектор перемещений (вторая краевая задача); задается нормальная составляющая вектора перемещения и касательные составляющие вектора напряжения (третья краевая задача); задается нормальная составляющая вектора напряжения и касательные составляющие вектора перемещения (четвертая краевая задача). Первые два типа условий являются основными, два последних называют “смешанными”. Как показывает опыт, тип граничных условий существенно влияет на возможность получения аналитического решения нестационарных задач. В частности, в публикации [2] методами интегральных преобразований дано решение нестационарной первой краевой задачи теории упругости для упругой полуплоскости. Полученное аналитическое решение позволяет определить напряжение (перемещение) только вдоль оси симметрии для некоторых конкретных видов нагрузки. Связанные с ударными процессами постановки и исследования в рамках третьей краевой задачи изложены в обзорной статье [3]. Наконец, в работе [4] строится точное аналитическое решение плоской задачи о действии нестационарной нагрузки на поверхность упругой полуплоскости в условиях четвертой краевой задачи.

В данной публикации получено точное решение нестационарной осесимметричной задачи для упругого полупространства при смешанных граничных условиях четвертой краевой задачи, когда на плоскости границы задана нормальная составляющая вектора напряжения и касательная составляющая вектора перемещения. Полученное решение определяет характеристики волнового процесса в произвольной точке объекта. Для решения задачи применяются интегральные преобразования Лапласа и Бесселя, обращение которых удается выполнить для достаточно широкого ассортимента действующих нестационарных нагрузок и получить выражение для упругого перемещения в явном виде.

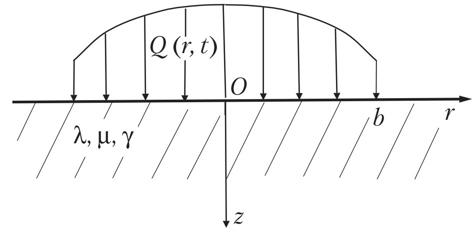

Рис. 1. Система координат

Общий случай. Рассматривается нестационарная осесимметричная задача для упругого полупространства. Отнесем полупространство к цилиндрическим координатам r, z, ось r которых направлена вдоль границы, ось z — вглубь (рис.1).

Нагрузка в виде нормального напряжения σ_{zz}, осесимметричная относительно оси z, возникает в некоторый начальный момент времени $t = 0$ и в общем случае является функцией времени и координаты x.

Задача формулируется в безразмерных обозначениях

$$\bar{r} = \frac{x}{R};\ \bar{z} = \frac{z}{h};\ \bar{u}_j = \frac{u_j}{h};\ \bar{t} = \frac{c_p t}{h};\ \bar{\sigma}_{jk} = \frac{\sigma_{jk}}{\lambda + 2\mu};\ \alpha = \frac{c_p}{c_0};\ \beta = \frac{c_s}{c_0};$$

$$b = \frac{\beta}{\alpha};\ j,k = r,z;\ c_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\gamma}};\ c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\gamma}},$$

черта над которыми ниже будет опущена. Здесь h, c_0 — некоторые характерные линейный размер и скорость; γ — плотность материала; λ, μ — упругие постоянные Ламе, c_p, c_s — соответственно скорости распространения волн расширения и волн сдвига; σ_{jk} — компоненты напряженного состояния; u_j — компоненты вектора перемещений.

Поведение упругой среды описывается скалярными волновыми потенциалами Φ и Ψ, которые в случае осесимметричной задачи теории упругости удовлетворяют волновым уравнениям [5]

$$\Delta\Phi - \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0,\ \Delta\Psi - \frac{1}{\beta^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 0,\ \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{1}$$

и связаны с упругими перемещениями и напряжениями соотношениями

$$\begin{gathered} u_r = \frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial r\partial z};\ u_z = \frac{\partial\Phi}{\partial z} - \frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r}; \\ \sigma_{zz} = (1 - 2\frac{\beta^2}{\alpha^2})\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + 2\beta^2\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^3\Psi}{\partial r^2\partial z} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2\Psi}{\partial r\partial z}\right); \\ \sigma_{rr} = (1 - 2\frac{\beta^2}{\alpha^2})\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + 2\beta^2\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{\partial^3\Psi}{\partial r^2\partial z}\right); \\ \sigma_{rz} = 2\beta^2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} - \frac{1}{2\beta^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}\right). \end{gathered} \tag{2}$$

В качестве граничных условий при $z=0$ будем рассматривать смешанные условия четвертой краевой задачи теории упругости, согласно которой на границе $z=0$ задается нормальное напряжение и касательное перемещение

$$\sigma_{zz}\big|_{z=0} = Q(x,t),\ u_r\big|_{z=0} = 0. \tag{3}$$

Кроме того, имеют место условия затухания порожденных нестационарной нагрузкой волновых возмущений на бесконечности. Начальные условия для потенциалов нулевые.

В пространстве изображений по Лапласу и Бесселю (Ханкелю) [6, 7] волновые уравнения приобретут вид

$$\frac{\partial^2\Phi^{LB}}{\partial z^2} - \left(\frac{s^2}{\alpha^2}+\xi^2\right)\Phi^{LB} = 0, \quad \frac{\partial^2\Psi^{LB}}{\partial z^2} - \left(\frac{s^2}{\beta^2}+\xi^2\right)\Psi^{LB} = 0. \tag{4}$$

Здесь s — параметр преобразования Лапласа по t, ξ — параметр преобразования Бесселя по r. Верхние индексы L и B при функциях обозначают, соответственно, изображение данной функции в пространстве преобразований Лапласа и преобразований Бесселя. Операторы прямого и обратного преобразований обозначаются $L()$ и $L^{-1}()$, $B\{\}$ и $B^{-1}()$.

Общее решение уравнений (4), затухающее при $z\to\infty$, записывается в виде

$$\Phi^{LB} = A(s,\xi)e^{-\frac{z}{\alpha}P};\ \Psi^{LB} = C(s,\xi)e^{-\frac{z}{\beta}S};\ P=\sqrt{s^2+\alpha^2\xi^2};\ S=\sqrt{s^2+\beta^2\xi^2}. \tag{5}$$

Здесь $A(s,\xi)$, $C(s,\xi)$ — неизвестные функции.

В результате удовлетворения граничным условиям (3) получим в пространстве изображений выражение для нормального перемещения u_z

$$u_z^{LB} = Q^{LB}(s,\xi)\left[-\frac{1}{\alpha}\left(1+\frac{\alpha^2\xi^2}{s^2}\right)\frac{e^{-\frac{z}{\alpha}P}}{P} + \beta\frac{\xi^2}{s^2}\frac{e^{-\frac{z}{\beta}S}}{S}\right] \tag{6}$$

и для напряжения σ_{zz}

$$\sigma_{zz}^{LB} = Q^{LB}(s,\xi)\left[\left(1+2\beta^2\frac{\xi^2}{s^2}\right)e^{-zP} - 2\beta^2\frac{\xi^2}{s^2}e^{-zS}\right]. \tag{7}$$

Ограничимся вычислением перемещения u_z и сосредоточимся на достаточно типичном случае внешнего воздействия, когда область приложения нагрузки является фиксированным кругом радиуса b, а ее зависимость от времени задается единичной функцией Хевисайда $H(t)$

$$Q(t,r) = Q(r)H(b-r)H(t). \tag{8}$$

Функция $Q(r)$ задает характер распределения напряжения вдоль оси r.

Перепишем u_z^{LB} в виде, удобном для последующих манипуляций

$$\begin{gathered} u_z^{LB}(s,\xi,z) = \tilde{Q}^B(\xi)\chi^{LB}(s,\xi,z);\ \ \tilde{Q}^B(\xi) = B\{H(b-r)Q(r)\}, \\ \chi^{LB}(s,\xi,z) = -\frac{1}{\alpha s}\frac{e^{-\frac{z}{\alpha}P}}{P} - \alpha\frac{\xi^2}{s^3}\frac{e^{-\frac{z}{\alpha}P}}{P} + \beta\frac{\xi^2}{s^3}\frac{e^{-\frac{z}{\beta}S}}{S}. \end{gathered} \tag{9}$$

Задача теперь состоит в обращении интегральных преобразований. Если удастся определить оригинал функции $\chi^{LF}(s,\xi,z)$, т. е. функцию $\chi(t,x,z)$, то для получения перемещеия $u_z(t,z,x)$ можно применить свертку преобразования Фурье функций $G(x)$ и $\chi(t,x,z)$ [8]. Здесь и ниже предполагается возможность перемены порядка обращения интегральных преобразований.

Для инверсии преобразования Бесселя отдельных слагаемых в χ^{LB} привлечем табличное соотношение [7]

$$B^{-1}\left(\frac{e^{-\frac{z}{\alpha}\sqrt{s^2+\alpha^2\xi^2}}}{\sqrt{s^2+\alpha^2\xi^2}}\right)=\frac{e^{-\frac{s}{\alpha}\sqrt{r^2+z^2}}}{\alpha\sqrt{r^2+z^2}}$$

и известное свойство

$$B^{-1}\{\xi^2 f^B(\xi)\}=-\left(\frac{d^2 f(r)}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{df(r)}{dr}\right).$$

Обращение преобразования Лапласа выполним, воспользовавшись формулой [6]

$$L^{-1}\left(s^{-1}e^{-s\frac{\sqrt{r^2+z^2}}{\alpha}}\right)=H(\alpha t-\sqrt{r^2+z^2})$$

и ее следствиями, вытекающими из правила интегрирования оригинала. В результате оригинал $\chi(t,r,z)$ записывается в виде

$$\begin{aligned}\chi(t,r,z)&=\frac{1}{2}\left(\frac{r^2-2z^2}{(r^2+z^2)^{5/2}}t^2-\frac{r^2}{\alpha^2(r^2+z^2)^{3/2}}\right)H(\alpha t-\sqrt{r^2+z^2})\\&-\frac{1}{2}\left(\frac{r^2-2z^2}{(r^2+z^2)^{5/2}}t^2+\frac{r^2+2z^2}{\beta^2(r^2+z^2)^{3/2}}\right)H(\beta t-\sqrt{r^2+z^2}),\ r=\sqrt{x^2+y^2}.\end{aligned}\tag{10}$$

Возвратимся теперь к выражению (9). Заметим, что инверсия преобразования Лапласа для $u_z^{LB}(s,\xi,z)$ уже произведена, так как функция $\tilde{Q}^B(\xi)$ не зависит от s. Инверсию преобразования Бесселя запишем в виде свертки, которая реализуется при помощи двойной свертки Фурье (ниже x, y — декартовы координаты в плоскости $z=0$) [8]

$$\begin{aligned}&u_z(t,r,z)=B^{-1}(\tilde{Q}^B(\xi)\chi^B(t,\xi,z))=\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}H\left(b-\sqrt{(x-\lambda)^2+(y-\zeta)^2}\right)\tilde{Q}\left(\sqrt{(x-\lambda)^2+(y-\zeta)^2}\right)\chi\left(t,\sqrt{\lambda^2+\zeta^2},z\right)d\lambda d\zeta,\\&\chi(t,\rho,z)=H\left(t-\frac{1}{\alpha}\sqrt{\rho^2+z^2}\right)u^{(\alpha)}(t,\rho,z)+H\left(t-\frac{1}{\beta}\sqrt{\rho^2+z^2}\right)u^{(\beta)}(t,\rho,z),\\&u^{(\alpha)}=\frac{\rho^2-2z^2}{2(\rho^2+z^2)^{5/2}}t^2-\frac{\rho^2}{2(\rho^2+z^2)^{3/2}\alpha^2},\\&u^{(\beta)}=-\frac{1}{2}\frac{\rho^2-2z^2}{(\rho^2+z^2)^{5/2}}t^2-\frac{1}{2}\frac{\rho^2+2z^2}{(\rho^2+z^2)^{3/2}\beta^2},\\&\rho=\sqrt{\lambda^2+\zeta^2}.\end{aligned}\tag{11}$$

Формулы (11) формально дают решение искомой задачи. Удобное в практическом отношении решение получим, если удастся конкретизировать область интегрирования.

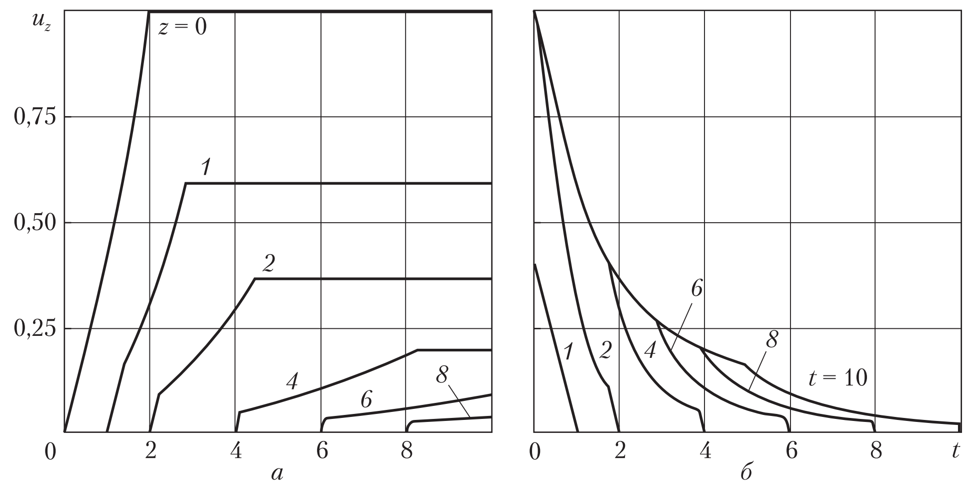

Рис. 2. Характер развития преремещения u_z на оси z в зависимости от времени (*а*) и от расстояния до границы (*б*)

Случай $r = 0$. Для точек, лежащих на оси z, перемещение u_z определим, положив в выражении (11) $x = y = 0$:

$$u_z(t, 0, z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H(b - \sqrt{\lambda^2 + \zeta^2})\tilde{Q}(\sqrt{\lambda^2 + \zeta^2})\chi(t, \sqrt{\lambda^2 + \zeta^2}, z)\, d\lambda d\zeta.$$

Перейдя далее в плоскости λ, ζ к полярным координатам ρ, θ, так что $\rho = \sqrt{\lambda^2 + \zeta^2}$, $\theta = \mathrm{arctg}\dfrac{\zeta}{\xi}$, будем иметь

$$u_z(t, 0, z) = \int_0^{\infty} H(b - \rho)\tilde{Q}(\rho)\chi(t, \rho, z)\rho d\rho, \tag{12}$$

где

$$\begin{aligned}
&\chi(t, \rho, z) = H\left(t - \frac{1}{\alpha}\sqrt{\rho^2 + z^2}\right)u^{(\alpha)}(t, \rho, z) + H\left(t - \frac{1}{\beta}\sqrt{\rho^2 + z^2}\right)u^{(\beta)}(t, \rho, z),\\
&u^{(\alpha)} = \frac{\rho^2 - 2z^2}{2(\rho^2 + z^2)^{5/2}}t^2 - \frac{\rho^2}{2(\rho^2 + z^2)^{3/2}\alpha^2},\\
&u^{(\beta)} = -\frac{1}{2}\frac{\rho^2 - 2z^2}{(\rho^2 + z^2)^{5/2}}t^2 - \frac{1}{2}\frac{\rho^2 + 2z^2}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}\beta^2}.
\end{aligned} \tag{13}$$

Из (12), (13) с учетом свойств функции Хевисайда получим окончательно выражение для перемещения u_z на оси z

$$\begin{aligned}
u_z(t, 0, z) = H(\alpha t - z)&\left[\begin{gathered} H(\sqrt{b^2 + z^2} - \alpha t)\int_0^{\sqrt{\alpha^2 t^2 - z^2}}\tilde{Q}(\rho)u^{(\alpha)}(t, \rho, z)\rho d\rho + \\ + H(\alpha t - \sqrt{b^2 + z^2})\int_0^b \tilde{Q}(\rho)u^{(\alpha)}(t, \rho, z)\rho d\rho \end{gathered}\right] + \\
+ H(\beta t - z)&\left[\begin{gathered} H(\sqrt{b^2 + z^2} - \beta t)\int_0^{\sqrt{\beta^2 t^2 - z^2}}\tilde{Q}(\rho)u^{(\beta)}(t, \rho, z)\rho d\rho + \\ + H(\beta t - \sqrt{b^2 + z^2})\int_0^b \tilde{Q}(\rho)u^{(\beta)}(t, \rho, z)\rho d\rho \end{gathered}\right].
\end{aligned} \tag{14}$$

Выражение (14) позволяет вычислить перемещение при произвольном распределении нагрузки вдоль r, $0 < r < b.$ В подавляющем большинстве практически актуальных случаев интегрирование в (14) может быть выполнено аналитически. В частности, если распределение нагрузки однородное, т. е. $\tilde{Q}(r) = 1,$ из (13) и (14) получим

$$u_z(t,0,z) = \begin{cases} -\dfrac{\alpha t - z}{\alpha^2}, \ \dfrac{z}{\alpha} \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{\alpha}\sqrt{b^2+z^2}, \\ \dfrac{z}{\alpha^2} - \dfrac{b^2t^2}{2\left(b^2+z^2\right)^{3/2}} - \dfrac{1}{2\alpha^2}\dfrac{b^2+2z^2}{\sqrt{b^2+z^2}}, \ \dfrac{1}{\alpha}\sqrt{b^2+z^2} < t < \dfrac{1}{\beta}\sqrt{b^2+z^2}, \\ \dfrac{z}{\alpha^2} - \dfrac{b^2t^2}{2\left(b^2+z^2\right)^{3/2}} - \dfrac{1}{2\alpha^2}\dfrac{b^2+2z^2}{\sqrt{b^2+z^2}} + \dfrac{1}{2}b^2\dfrac{\beta^2t^2-b^2-z^2}{\beta^2\left(b^2+z^2\right)^{3/2}}, \ t > \dfrac{1}{\beta}\sqrt{b^2+z^2}. \end{cases} \tag{15}$$

Отсюда имеем предельное значение $u_z(t,0,z)\big|_{t\to\infty} = \dfrac{z}{\alpha^2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{b^2(\alpha^2+\beta^2)+2\beta^2z^2}{\alpha^2\beta^2\sqrt{b^2+z^2}}.$

На рис. 2 приведены результаты вычисления перемещения при $\tilde{Q}(r) = -1$. Параметр b, определяющий размер области приложения нагрузки, выбран равным 1. Кроме того, принято $\alpha = 1$, $\beta = 0{,}5$, $h = 1$. Значение перемещения отнесено к его статическому значению на поверхности $z = 0$, а именно $u_z(t,0,0)\big|_{t\to\infty} = 2^{-1}\alpha^{-2}\beta^{-2}b(\alpha^2+\beta^2) = 2{,}5.$

Рис. 2, *а* иллюстрирует развитие перемещения со временем в фиксированных точках оси $z : z = 0$; 1; 2; 4; 6; 8. Как видно из графиков, упомянутое статическое значение достигается в момент времени, когда в рассматриваемую точку приходит фронт волны искажения, возбуждаемой на краю области $r = b$. Излом кривой в ее начальной области (хорошо видно при $z = 2$; 4) обусловлен приходом в рассматриваемую точку волны расширения, генерируемой там же. Рис. 2, *б* представляет распределение перемещения вдоль оси z в фиксированные моменты времени: $t = 1$; 2; 4; 6; 8; 10.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Поручиков В.Б.* Методы динамической теории упругости. — Москва: Наука,1986. — 328 с.
2. *Кубенко В.Д.* Нестационарная нагрузка на поверхности упругой полуплоскости// Доп. НАН України, 2011 — № 10 — С. 67—72.
3. *Кубенко В.Д.* Удар затупленных тел о поверхность жидкости или упругой среды// Успехи механики (в 6-ти томах). — Т. 5 : Киев, Літера Лтд, 2009. — С. 566—607.
4. *Kubenko V.D.* On a non-stationary load on the surface of a semiplane with mixed boundary conditions// ZAMM . — 2015. — **95**, No. 12. — P. 1448—1460.
5. *ГузьА.Н.,Кубенко В.Д., Черевко М.А.* Дифракция упругих волн. — Киев: Наук. думка, 1978. — 308 с.
6. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований в 2-х т. Т. 1. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. — Москва: Наука, ГИФМЛ, 1969. — 344с.
7. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований в 2-х т. Т. 2. Преобразование Бесселя. — Москва: Наука, ГИФМЛ, 1970. — 328 с.
8. *Диткин В.А., Прудников А.П* Интегральные преобразования и операционное исчисление. — Москва: ГИФМЛ, 1961. — 524 с.

REFERENCES

1. *Poruchikov V.B.* Methods of Dynamic Theory of Elasticity, Moscow: Nauka, 1986 (in Russian).
2. *Kubenko V.D.* Nonstationary loads at surface of an elastic half –plane // Dopov. NAS of Ukraine, 2011, No 10: 67-72 (in Russian).

3. *Kubenko V.D.* Impact of blunted bodies against surface of liquid or elastic medium. Advanced in Mechanics (in 6 vol.), V. 5. Kiev: Litera Ltd, 2009: P. 566-677 (in Russian).
4. *Kubenko V.D* ZAMM 2015, **95**, No. 12: 1448-1460.
5. *Guz A.N., Kubenko V.D., Cherevko M.A* Diffraction of Eelastic Waves, Kiev:Nauk. Dumka, 1978 (in Russian).
6. *Bateman G* and *Erdelyi A.* Tables of Integral Transforms (in 2 vol.). V. 1:Transforms of Fourier, Laplace and Melline. McGraw-Hill book Com. Inc., NY, 1954.
7. *Bateman G.* and *Erdelyi A.* Tables of Integral Transforms (in 2 vol.). V. 2: Transform of Bessel. McGraw-Hill book Com. Inc., NY, 1954.
8. *Ditkin V.A., Prudnikov A.P.* Integral Transforms and Operational Calculation. Moskow: GIFML, 1961 (in Russian).

Поступило в редакцию 06.04.2016

Академік НАН України *В.Д. Кубенко*

Інститут механіки ім.. С.П.Тимошенка НАН України, Київ
E-mail: vdk@inmech.kiev.ua

ПРО НЕСТАЦІОНАРНУ ОСЕСИМЕТРИЧНУ ЗАДАЧУ
ДЛЯ ПРУЖНОГО ПІВПРОСТОРУ
ПРИ ЗМІШАНИХ ГРАНИЧНИХ УМОВАХ

Розглядається задача визначення напружено-деформівного стану пружного півпростору, на границі якого діє нестаціонарне нормальне навантаження. Формулюється змішана крайова задача, рішення якої будується з застосуванням інтегральних перетворень Лапласа і Ханкеля. Виконано точне обертання перетворень. Як результат, отримано аналітичний розв'язок задачі, що визначає переміщення в довільній точці осі симетрії в довільний момент часу.

Ключові слова: *нестаціонарні пружні хвилі, інтегральні перетворення, змішані граничні умови*

Academician of the NAS of Ukraine *V.D. Kubenko*

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev
E-mail: vdk@inmech.kiev.ua

ON A NONSTATIONARY AXISYMMETRIC PROBLEM
FOR THE ELASTIC HALF-SPACE UNDER MIXED
BOUNDARY CONDITIONS

The problem of determining a stress-strain state of the elastic half-space under a nonstationary normal loading is considered. A mixed boundary-value problem is formulated, and its solution is constructed with the use of the Laplace and Hankel integral transformations. The exact inversion of the transformations is executed. As a result, the analytical solution is obtained, and it determines a normal displacement at an arbitrary point of the axis of symmetry at an arbitrary moment of time.

Keywords: *integral transformations, mixed boundary conditions.*