УДК 512.554 http://dx.doi.org/10.15407/dopovidi2016.03.014

Л. А. Курдаченко, Х. Отал, О. О. Пипка

Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара
E-mail: lkurdachenko@i.ua, otal@unizar.es, pypka@ua.fm

Про деякі зв'язки між факторами канонічних центральних рядів в алгебрах Лейбніца

(Представлено членом-кореспондентом НАН України В. П. Моторним)

Доведено, що зі скінченності ковимірності деякого члена $\zeta_k(L)$ верхнього центрального ряду алгебри Лейбніца L випливає скінченність вимірності $\gamma_{k+1}(L)$, та отримано границю для цієї вимірності.

Ключові слова: алгебра Лейбніца, алгебра Лі, верхній центральний ряд, нижній центральний ряд.

Нехай L — алгебра над полем F, тоді L будемо називати *алгеброю Лейбніца* (більш точно, *лівою алгеброю Лейбніца*), якщо виконується така умова (*тотожність Лейбніца*):

$$[[a, b], c] = [a, [b, c]] - [b, [a, c]] \qquad \text{для всіх} \qquad a, b, c \in L.$$

Поняття алгебри Лейбніца ввів Ж. Лодей [1]. З того часу вони набули чималої популярності, в першу чергу через їх застосування у фізиці. Якщо L — така алгебра Лейбніца, що $[a, a] = 0$ для кожного елемента $a \in L$, то можна легко переконатися в тому, що L є алгеброю Лі. Інакше кажучи, ми можемо розглядати алгебри Лейбніца як не антисиметричний аналог алгебр Лі. Для багатьох важливих результатів теорії алгебр Лі були одержані аналоги в рамках теорії алгебр Лейбніца (див., наприклад, [2–8]). Досить часто такі аналоги прямі, проте іноді вони мають дещо специфічні відмінності.

Нагадаємо спочатку деякі стандартні означення та позначення.

Нехай L — алгебра Лейбніца над полем F. Якщо A, B — підпростори алгебри L, то через $[A, B]$ будемо позначати підпростір, породжений всіма елементами $[a, b]$, де $a \in A$, $b \in B$.

Як завжди, підпростір A алгебри L будемо називати *підалгеброю* алгебри L, якщо $[x, y] \in A$ для будь-яких елементів x, $y \in A$. З означення випливає, що $[A, A] \leqslant A$.

Підалгебра A називається *лівим* (відповідно *правим*) *ідеалом* алгебри L, якщо $[y, x] \in A$ (відповідно $[x, y] \in A$) для будь-яких елементів $x \in A$, $y \in L$. Іншими словами, якщо A є лівим (відповідно правим) ідеалом, то $[L, A] \leqslant A$ (відповідно $[A, L] \leqslant A$).

Підалгебра A алгебри L називається *ідеалом* алгебри L (більш точно, *двостороннім ідеалом*), якщо вона одночасно є і правим ідеалом, і лівим, тобто якщо $[x, y]$, $[y, x] \in A$ для будь-яких елементів $x \in A$, $y \in L$.

Слід відзначити, що якщо A, B — ідеали алгебри Лейбніца, то у загальному випадку $[A, B]$ не завжди буде ідеалом, відповідний приклад наведений у роботі [3].

Якщо A — ідеал алгебри L, то ми можемо говорити про фактор-алгебру L/A. Неважко переконатися в тому, що ця фактор-алгебра також є алгеброю Лейбніца.

Позначатимемо через $\mathrm{Leib}(L)$ підпростір, породжений елементами $[a, a]$, $a \in L$. Можна показати, що $\mathrm{Leib}(L)$ є ідеалом алгебри L. Більш того, якщо H — такий ідеал алгебри L, що L/H є алгеброю Лі, то $\mathrm{Leib}(L) \leqslant H$. Ідеал $\mathrm{Leib}(L)$ називається *ядром Лейбніца* алгебри L.

Відзначимо також таку дуже важливу властивість алгебр Лейбніца:

$$[[a, a], x] = 0 \qquad \text{для будь-яких елементів} \qquad a, x \in L.$$

Нехай L — алгебра Лейбніца над полем F, M — непорожня підмножина алгебри L, H — підалгебра алгебри L. Покладемо

$$\mathrm{Ann}_H^{\mathrm{left}}(M) = \{a \in H \mid [a, M] = \langle 0 \rangle\}, \qquad \mathrm{Ann}_H^{\mathrm{right}}(M) = \{a \in H \mid [M, a] = \langle 0 \rangle\}.$$

Підмножина $\mathrm{Ann}_H^{\mathrm{left}}(M)$ називається *лівим анулятором* або *лівим централізатором* підмножини M в підалгебрі H; підмножина $\mathrm{Ann}_H^{\mathrm{right}}(M)$ називається *правим анулятором* або *правим централізатором* підмножини M в підалгебрі H. Перетин

$$\mathrm{Ann}_H(M) = \mathrm{Ann}_H^{\mathrm{left}}(M) \bigcap \mathrm{Ann}_H^{\mathrm{right}}(M) = \{a \in H \mid [a, M] = \langle 0 \rangle = [M, a]\}$$

називається *анулятором* або *централізатором* підмножини M в підалгебрі H.

Легко переконатися в тому, що всі ці підмножини є підалгебрами алгебри L. Більш того, якщо M є лівим ідеалом алгебри L, то підмножина $\mathrm{Ann}_L^{\mathrm{left}}(M)$ також є ідеалом алгебри L. Якщо ж M — ідеал алгебри L, то підмножина $\mathrm{Ann}_L(M)$ є ідеалом алгебри L.

Лівий (відповідно *правий*) *центр* $\zeta^{\mathrm{left}}(L)$ (відповідно $\zeta^{\mathrm{right}}(L)$) алгебри L визначимо за таким правилом:

$$\zeta^{\mathrm{left}}(L) = \{x \in L \mid [x, y] = 0 \text{ для кожного елемента } y \in L\}$$

(відповідно

$$\zeta^{\mathrm{right}}(L) = \{x \in L \mid [y, x] = 0 \text{ для кожного елемента } y \in L\}).$$

Зазначимо, що лівий центр алгебри L є ідеалом. Більш того, $\mathrm{Leib}(L) \leqslant \zeta^{\mathrm{left}}(L)$, а тому фактор-алгебра $L/\zeta^{\mathrm{left}}(L)$ є алгеброю Лі.

Центром $\zeta(L)$ алгебри L будемо називати перетин ануляторів всіх елементів алгебри L. Інакше кажучи,

$$\zeta(L) = \{x \in L \mid [x, y] = 0 = [y, x] \text{ для кожного елементу} y \in L\}.$$

Іншими словами, центр — це анулятор всієї алгебри L, більш того, ідеал алгебри L. Зокрема, ми можемо говорити про фактор-алгебру $L/\zeta(L)$.

Правий центр є підалгеброю алгебри L. Зазначимо, що в загальному випадку лівий та правий центри різні, більш того, вони можуть мати різні вимірності. Це можна побачити в нижченаведеному прикладі.

Приклад 1. Нехай F — поле. Покладемо $L = Fe_1 \oplus Fe_2 \oplus Fe_3 \oplus Fe_4$ та визначимо операцію $[-, -]$ за таким правилом:

$$[e_1, e_1] = e_2, \qquad [e_1, e_2] = -e_2 - e_3, \qquad [e_1, e_3] = e_2 + e_3, \qquad [e_1, e_4] = 0,$$

$$[e_2, e_1] = 0, \qquad [e_3, e_1] = 0, \qquad [e_4, e_1] = e_2 + e_3,$$

$$[e_j, e_k] = 0 \qquad \text{для всіх} \qquad j, k \in \{2, 3, 4\}.$$

Можна перевірити, що ця операція визначає алгебру Лейбніца. В цьому випадку маємо $\zeta^{\mathrm{right}}(L) = Fe_4$, а тому підалгебра $\zeta^{\mathrm{right}}(L)$ не є ідеалом. Крім того, $\zeta^{\mathrm{left}}(L) = Fe_2 \oplus Fe_3$, а тому $\zeta^{\mathrm{right}}(L) \bigcap \zeta^{\mathrm{left}}(L) = \langle 0 \rangle$, $\dim_F(\zeta^{\mathrm{right}}(L)) = 1$, $\dim_F(\zeta^{\mathrm{left}}(L)) = 2$. Зазначимо також, що $[L, L] = \mathrm{Leib}(L) = \zeta^{\mathrm{left}}(L)$.

Нехай L — алгебра Лейбніца над полем F. Визначимо тепер нижній центральний ряд алгебри L

$$L = \gamma_1(L) \geqslant \gamma_2(L) \geqslant \ldots \gamma_\alpha(L) \geqslant \gamma_{\alpha+1}(L) \geqslant \ldots \gamma_\delta(L) = \gamma_\infty(L)$$

за таким правилом: $\gamma_1(L) = L$, $\gamma_2(L) = [L, L]$, а далі індуктивно $\gamma_{\alpha+1}(L) = [L, \gamma_\alpha(L)]$ для всіх порядкових чисел α, та $\gamma_\lambda(L) = \bigcap_{\mu<\lambda} \gamma_\mu(L)$ для всіх граничних порядкових чисел λ. Останній член $\gamma_\delta(L) = \gamma_\infty(L)$ цього ряду називається *нижнім гіпоцентром* алгебри L. Для нього ми маємо $\gamma_\delta(L) = [L, \gamma_\delta(L)]$. Якщо $\alpha = k$ є натуральним числом, то $\gamma_k(L) = [L, [L, [L, \ldots, L\underbrace{] \ldots]}_{k-1}$ — це лівонормований добуток k копій алгебри L. Визначимо тепер верхній центральний ряд

$$\langle 0 \rangle = \zeta_0(L) \leqslant \zeta_1(L) \leqslant \ldots \zeta_\alpha(L) \leqslant \zeta_{\alpha+1}(L) \leqslant \ldots \zeta_\gamma(L) = \zeta_\infty(L)$$

алгебри L за таким правилом: $\zeta_1(L) = \zeta(L)$ — центр алгебри L, $\zeta_{\alpha+1}(L)/\zeta_\alpha(L) = \zeta(L/\zeta_\alpha(L))$ для всіх порядкових чисел α, та $\zeta_\lambda(L) = \bigcup_{\mu<\lambda} \zeta_\mu(L)$ для всіх граничних порядкових чисел λ. За визначенням кожен член цього ряду є ідеалом алгебри L. Останній член $\zeta_\gamma(L) = \zeta_\infty(L)$ цього ряду називається *верхнім гіперцентром* алгебри L. Будемо позначати через $\mathrm{zl}(L)$ довжину верхнього центрального ряду.

Поняття верхнього та нижнього центральних рядів визначені не лише для алгебр Лейбніца. Вони відіграють важливу роль і в інших алгебраїчних структурах, наприклад, в алгебрах Лі та групах.

Алгебра Лейбніца L називається *нільпотентною*, якщо існує таке натуральне число k, що $\gamma_k(L) = \langle 0 \rangle$. Більш точно, L називається *нільпотентною класу нільпотентності* c, якщо $\gamma_{c+1}(L) = \langle 0 \rangle$, але $\gamma_c(L) \neq \langle 0 \rangle$. Будемо позначати через $\mathrm{ncl}(L)$ клас нільпотентності алгебри L.

Наведемо деякі властивості членів верхніх та нижніх центральних рядів в алгебрах Лейбніца.

Твердження 1. *Нехай L — алгебра Лейбніца над полем F та нехай L має скінченний центральний ряд*

$$\langle 0 \rangle = C_0 \leqslant C_1 \leqslant \ldots \leqslant C_n = L.$$

Тоді

[(i)] $\gamma_j(L) \leqslant C_{n-j+1}$, звідки отримуємо, що $\gamma_{n+1}(L) = \langle 0 \rangle$;

[(ii)] $C_j \leqslant \zeta_j(L)$, звідки отримуємо, що $\zeta_n(L) = L$.

Для нільпотентних алгебр Лі та груп добре відомо, що довжини верхнього та нижнього центральних рядів однакові. Для алгебр Лейбніца отримуємо

Наслідок 1. *Нехай L — алгебра Лейбніца над полем F, та нехай L має скінченний центральний ряд*

$$\langle 0 \rangle = C_0 \leqslant C_1 \leqslant \ldots \leqslant C_n = L.$$

Тоді L буде нільпотентною та $\mathrm{ncl(L)} \leqslant \mathrm{n}$. *Більш того, верхній центральний ряд L також буде скінченним, $\zeta_\infty(L) = L$, $\mathrm{zl}(L) \leqslant n$, та маємо* $\mathrm{ncl}(L) = \mathrm{zl}(L)$.

Цей наслідок показує, що алгебра Лейбніца L буде нільпотентною тоді і тільки тоді, коли існує таке натуральне число k, що $L = \zeta_k(L)$. Найменше натуральне число, що має таку властивість, збігається з класом нільпотентності L.

Наступним природним кроком є вивчення ситуації, коли верхній (відповідно нижній) центральний ряд має скінченну довжину. Для цього випадку природним є дослідження зв'язків між $L/\zeta_k(L)$ та $\gamma_{k+1}(L)$.

Якщо L — така алгебра Лі, що фактор-алгебра $L/\zeta_k(L)$ має скінченну вимірність, то $\gamma_{k+1}(L)$ також має скінченну вимірність, що випливає з теореми 5.2 роботи Я. Стюарта [9]. Для груп відповідний результат був отриманий раніше Р. Бером [10]. Основним результатом нашої роботи є нижчесформульовані аналоги цих теорем для алгебр Лейбніца.

Теорема A. *Нехай L — алгебра Лейбніца над полем F. Припустимо, що ковимірність* $\mathrm{codim}_F(\zeta_k(L)) = d$ *скінченна. Тоді $\gamma_{k+1}(L)$ має скінченну вимірність. Більш того,* $\dim_F(\gamma_{k+1}(L)) \leqslant 2^{k-1}d^{k+1}$, $k \geqslant 1$.

Як наслідок, отримуємо границю для вимірності $\gamma_{k+1}(L)$ для випадку, коли L — алгебра Лі.

Наслідок A1. *Нехай L — алгебра Лі над полем F. Припустимо, що ковимірність* $\mathrm{codim}_F(\zeta_k(L)) = d$ *скінченна. Тоді $\gamma_{k+1}(L)$ також має скінченну вимірність. Більш того,* $\dim_F(\gamma_{k+1}(L)) \leqslant d^{k-1}(d-1)/2$.

Важливим частинним випадком є ситуація, коли центр алгебри Лейбніца має скінченну ковимірність. Для алгебр Лі цей результат є добре відомим (див., наприклад, [11]).

Нехай L — алгебра Лі над полем F. Якщо фактор-алгебра $L/\zeta(G)$ має скінченну вимірність d, то $[L, L]$ також має скінченну вимірність. Більш того, $\dim_F([L, L]) \leqslant d(d+1)/2$.

Для груп відповідний результат був отриманий значно раніше.

Нехай G — група, C — така підгрупа центру $\zeta(G)$ групи G, що G/C скінченна. Тоді підгрупа $[G, G]$ також скінченна.

У такому вигляді цей результат вперше з'явився в роботі Б. Неймана [12]. Також ця теорема була доведена і Р. Бером [10].

Для алгебр Лейбніца ми одержали такий аналог цих теорем.

Теорема B. *Нехай L — алгебра Лейбніца над полем F. Припустимо, що ковимірності* $\mathrm{codim}_F(\zeta^{\mathrm{left}}(L)) = d$ *та* $\mathrm{codim}_F(\zeta^{\mathrm{right}}(L)) = r$ *скінченні. Тоді $[L, L]$ також має скінченну вимірність. Більш того,* $\dim_F([L, L]) \leqslant d(d + r)$.

У зв'язку з цим результатом виникає питання: *чи випливає зі скінченності лише* $\mathrm{codim}_F(\zeta^{\mathrm{left}}(L))$ *скінченність* $\dim_F([L, L])$? Відповідь на це питання негативна. Нами було побудовано відповідні приклади.

Наслідок B1. *Нехай L — алгебра Лейбніца над полем F. Припустимо, що ковимірність* $\mathrm{codim}_F(\zeta(L)) = d$ *скінченна. Тоді $[L, L]$ також має скінченну вимірність. Більш того,* $\dim_F([L, L]) \leqslant d^2$.

Наслідок B2. *Нехай L — алгебра Лейбніца над полем F. Припустимо, що ковимірність* $\mathrm{codim}_F(\zeta(L)) = d$ *скінченна. Тоді ядро Лейбніца алгебри L також має скінченну вимірність, яка не перевищує* $d(d-1)/2$.

Цитована література

1. *Loday J. L.* Une version non commutative des algèbres de Lie: les algèbras de Leibniz // Enseign. Math. – 1993. – **39**. – P. 269–293.
2. *Albeverio S. A., Ayupov Sh. A., Omirov B. A.* On nilpotent and simple Leibniz algebras // Commun. Algebra. – 2005. – **33**. – P. 159–172.
3. *Barnes D.* Some theorems on Leibniz algebras // Commun. Algebra. – 2011. – **39**. – P. 2463–2472.
4. *Barnes D.* On Levi's Theorem for Leibniz algebras // Bull. Australian Math. Soc. – 2012. – **86**. – P. 184–185.
5. *Barnes D.* On Engel's Theorem for Leibniz algebras // Commun. Algebra – 2012. – **40**. – P. 1388–1389.

6. *Barnes D.* Schunck classes of soluble Leibniz algebras // Commun. Algebra – 2013. – **41**. – P. 4046–4065.
7. *Patsourakos A.* On nilpotent properties of Leibniz algebras // Commun. Algebra. – 2007. – **35**. – P. 3828–3834.
8. *Ray C. B., Combs A., Gin N., Hedges A., Hird J. T., Zack L.* Nilpotent Lie and Leibniz Algebras // Commun. algebra. – 2014. – **42**. – P. 2404–2410.
9. *Stewart I. N.* Verbal and marginal properties of non-associative algebras in the spirit of infinite group theory // Proc. London Math. Soc. – 1974. – **28**. – P. 129–140.
10. *Baer R.* Endlichkeitskriterien für Kommutatorgruppen // Math. Ann. – 1952. – **124**. – P. 161–177.
11. *Vaughan-Lee M. R.* Metabelian BFC p-groups // J. London Math. Soc. – 1972. – **5**. – P. 673–680.
12. *Neumann B. H.* Groups with finite classes of conjugate elements // Proc. London Math. Soc. – 1951. – **1**. – P. 178–187.

References

1. *Loday J. L.* Enseign. Math., 1993, **39**: 269–293.
2. *Albeverio S. A., Ayupov Sh. A., Omirov B. A.* Commun. Algebra, 2005, **33**: 159–172.
3. *Barnes D.* Commun. Algebra, 2011, **39**: 2463–2472.
4. *Barnes D.* Bull. Australian Math. Soc, 2012, **86**: 184–185.
5. *Barnes D.* Commun. Algebra, 2012, **40**: 1388–1389.
6. *Barnes D.* Commun. Algebra, 2013, **41**: 4046–4065.
7. *Patsourakos A.* Commun. Algebra, 2007, **35**: 3828–3834.
8. *Ray C. B., Combs A., Gin N., Hedges A., Hird J. T., Zack L.* Commun. algebra, 2014, **42**: 2404–2410.
9. *Stewart I. N.* Proc. London Math. Soc., 1974, **28**: 129–140.
10. *Baer R.* Math. Ann., 1952, **124**: 161–177.
11. *Vaughan-Lee M. R.* J. London Math. Soc., 1972, **5**: 673–680.
12. *Neumann B. H.* Proc. London Math. Soc., 1951, **1**: 178–187.

Надійшло до редакції 08.07.2015

Л. А. Курдаченко, Х. Отал, А. А. Пыпка

Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара
E-mail: lkurdachenko@i.ua, otal@unizar.es, pypka@ua.fm

О некоторых связях между факторами канонических центральных рядов в алгебрах Лейбница

Доказано, что из конечности коразмерности некоторого члена $\zeta_k(L)$ верхнего центрального ряда алгебры Лейбница L вытекает конечность размерности $\gamma_{k+1}(L)$, и получена граница для этой размерности.

Ключевые слова: алгебра Лейбница, алгебра Ли, верхний центральный ряд, нижний центральный ряд.

L. A. Kurdachenko, J. Otal, A. A. Pypka

Oles Honchar Dnipropetrovs'k National University
E-mail: lkurdachenko@i.ua, otal@unizar.es, pypka@ua.fm

On some relationships between the factors of the canonical central series of Leibniz algebras

We have proved that the finiteness of the codimension of some member $\zeta_k(L)$ of the upper central series of the Leibniz algebra L yields the finiteness of the dimension of $\gamma_{k+1}(L)$ and give the bounds of this finiteness.

Keywords: Leibniz algebra, Lie algebra, upper central series, lower central series.