УДК 517-9 http://dx.doi.org/10.15407/dopovidi2016.03.019

В. І. Скрипник

Інститут математики НАН України, Київ

E-mail: volodymyr_skrypnyk@ukr.net

Кулонівська плоска періодична динаміка однакових зарядів у полі притягальних центрів та постійному магнітному полі

(Представлено членом-кореспондентом НАН України А. Г. Нікітіним)

Розглядається кулонівська нейтральна плоска система n негативних зарядів у постійному магнітному полі та полі n однакових фіксованих позитивних зарядів і будується періодичний розв'язок рівняння руху такий, що кожен негативний заряд є близьким до свого позитивного фіксованого заряду.

Ключові слова: рівняння руху Кулона, негативні заряди, зовнішні поля.

Побудова розв'язків рівняння руху точкових зарядів Максвелла–Лоренца класичної електродинаміки є фундаментальною задачею математики. Найпростіші наближення його — рівняння Кулона та Дарвіна, які не враховують випромінення зарядів, мають розв'язки на обмеженому проміжку часу, на якому немає зіткнень зарядів. Їх існування для першого та другого встановлено відповідно в [1] та [2].

Якщо два однакові позитивні заряди зафіксовані симетрично на однакових відстанях від першої координатної осі та ще два чи три негативні заряди рухаються тільки по іншій координатній осі, то для такої системи існують рівноважна конфігурація, а також періодичні розв'язки рівнянь руху Кулона. Теореми Ляпунова, Мозера, Вейнстейна були використані автором для встановлення цього в [3]. Перші дві з них вимагають виключення резонансів, що обмежує значення зарядів, і дозволяють отримати ці розв'язки у вигляді збіжних рядів.

У цій роботі ми розглядаємо плоску кулонівську систему n негативних зарядів у постійному магнітному полі та полі n однакових фіксованих позитивних зарядів (j-й заряд розташований в $r_j \in \mathbb{R}^2$) та будуємо періодичний розв'язок рівняння руху такий, що кожен негативний заряд є близьким до свого додатного фіксованого заряду. Цей розв'язок поданий збіжним рядом. Ми використовуємо техніку Зігеля розв'язку задачі трьох тіл небесної механіки.

Потенціальна енергія нашої кулонівської системи n однакових негативних зарядів (значення заряду e_0) з координатами $x_j \in \mathbb{R}^2$ дається виразом

$$U(x_{(n)}) = e_0^2\left[\frac{1}{2}\sum_{1\leqslant j\neq k\leqslant n}\frac{1}{|x_j - x_k|} - \sum_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{1}{|x_j - r_k|}\right],$$

$$x_j = (x_j^1, x_j^2), \qquad r_j = (r_j^1, r_j^2) \in \mathbb{R}^2,$$

де $|x|$ — евклідова норма x та $x_{(n)} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{2n}$, $r_0 = \min |r_j - r_k| > 0$. Рівняння руху цих зарядів масою m у постійному магнітному полі h, перпендикулярному до площини з зарядами, задано виразом

$$m\frac{d^2x_j}{dt^2} = -\frac{\partial U(x_{(n)})}{\partial x_j} + e_0\frac{dx_j}{dt} \times h, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

де $(v \times h)^1 = h^0x^2$, $(v \times h)^2 = -h^0x^1$, $h^0 \in \mathbb{R}$. Воно має такий явний вигляд:

$$\frac{d^2x_j}{dt^2} = \frac{e_0^2}{m}\left[\sum_{1\leqslant k\leqslant n,\, k\neq j} \frac{x_j - x_k}{|x_j - x_k|^3} - \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{x_j - r_k}{|x_j - r_k|^3}\right] + e_0\frac{dx_j}{dt} \times h.$$

Введемо тепер нові різницеві змінні x_j'

$$x_j(t) = r_j + gx_j'(t), \qquad g^3 = \frac{e_0^2}{m}.$$

Якщо зняти з них штрих, то рівняння для них задано так:

$$\frac{d^2x_j}{dt^2} = -\frac{x_j}{|x_j|^3} + g^2\left(\sum_{1\leqslant k\leqslant n,\, k\neq j} \frac{r_j - r_k + g(x_j - x_k)}{|r_j - r_k + g(x_j - x_k)|^3} - \sum_{1\leqslant k\leqslant n,\, k\neq j} \frac{r_j - r_k + gx_j}{|r_j - r_k + gx_j|^3}\right) +$$
$$+ e_0\frac{dx_j}{dt} \times h.$$

Якщо $x_j = x_j^1 + ix_j^2$, $\widetilde{x}_j = \widetilde{x}_j^1 + i\widetilde{x}_j^2 \in \mathbb{C}$, то це рівняння в комплексній формі перепишеться так:

$$\frac{d^2x_j}{dt^2} = -x_j^{-1/2}\widetilde{x}_j^{-3/2} + g^2 \sum_{1\leqslant k\leqslant n,\, k\neq j} [(r_j - r_k + g(x_j - x_k))^{-1/2}(|r_j^* - r_k^* + g(\widetilde{x}_j - \widetilde{x}_k)|)^{-3/2} -$$
$$- (r_j - r_k + g\widetilde{x}_j)^{-1/2}(|r_j^* - r_k^* + gx_j|)^{-3/2}] + ih^0e_0\frac{dx_j}{dt},$$

якщо покласти $x_j^1 - ix_j^2 = x_j^* = \widetilde{x}_j$, то

$$\frac{d^2\widetilde{x}_j}{dt^2} = -\widetilde{x}_j^{-1/2}x_j^{-3/2} + g^2 \sum_{1\leqslant k\leqslant n,\, k\neq j} [(r_j - r_k + g(\widetilde{x}_j - \widetilde{x}_k))^{-1/2}(|r_j^* - r_k^* + g(x_j - x_k)|)^{-3/2} -$$
$$- (r_j - r_k + g\widetilde{x}_j)^{-1/2}(|r_j^* - r_k^* + gx_j)^{-3/2}] - ih^0e_0\frac{d\widetilde{x}_j}{dt}. \tag{1}$$

Отже,

$$\frac{d^2x_j}{dt^2} = -x_j^{-1/2}\widetilde{x}_j^{-3/2} + f_j, \qquad \frac{d^2\widetilde{x}_j}{dt^2} = -\widetilde{x}_j^{-1/2}x_j^{-3/2} + \widetilde{f}_j.$$

Другим кроком для отримання розв'язку рівняння руху є введення комплексних змінних Зігеля ξ, η таких, що

$$\frac{d\xi}{dt} = \alpha\xi, \qquad \frac{d\eta}{dt} = -\alpha\eta, \qquad \alpha = \frac{i}{4}(\xi\eta)^{-3} \tag{2}$$

та

$$x_j = \xi^4 \left(1 + \sum_{k,l} a_{j,kl}\zeta_{k,l}\right) = \xi^4(1 - A_j), \qquad 3k - |4l| \geqslant 0, k > 0, \tag{3}$$

$$\widetilde{x}_j = \eta^4 \left(1 + \sum_{k,l} a_{j,kl}\zeta_{k,-l}\right) = \eta^4(1 - B_j), \qquad \zeta_{k,l} = \zeta_{kl} = \xi^{3k+4l}\eta^{3k-4l}. \tag{4}$$

Рівняння в (2) мають періодичні розв'язки при $\eta = \xi^*$

$$\xi = e^{\alpha t}\xi_0, \qquad \eta = e^{-\alpha t}\eta_0, \qquad \alpha = \frac{i}{4}(\xi_0\eta_0)^{-3}, \qquad \eta = \xi^*,$$

бо $\xi\eta$ не залежить від часу. Тобто ми шукаємо розв'язки рівняння руху (1) за допомогою рівностей (3), (4), в яких змінні ξ, η підкоряються рівнянням (2). Щоб досягти цієї мети, необхідно обчислити перші та другі похідні координат в (3), (4), підставити їх у (1), отримати рівняння для дійсних коефіцієнтів $a_{j,kl}$ та довести існування такого його розв'язку, що координати зарядів будуть голоморфними функціями ξ, η в околі нуля.

Розрахуємо тепер ці похідні:

$$\frac{dx_j}{dt} = 4\alpha\xi^4 \left(1 + \sum_{k,l}(2l+1)a_{j,kl}\zeta_{kl}\right), \qquad \frac{d^2x_j}{dt^2} = (4\alpha)^2\xi^4 \left(1 + \sum_{k,l}(2l+1)^2 a_{j,kl}\zeta_{kl}\right),$$

$$\frac{d\widetilde{x}_j}{dt} = -(4\alpha)\eta^4 \left(1 + \sum_{k,l}(2l+1)a_{j,kl}\zeta_{k,-l}\right), \quad \frac{d^2\widetilde{x}_j}{dt^2} = (4\alpha)^2\eta^4 \left(1 + \sum_{k,l}(2l+1)^2 a_{j,kl}\zeta_{k,-l}\right).$$

У результаті маємо

$$-i\xi^2\eta^6\frac{dx_j}{dt} = -\zeta_{10}\left(1 + \sum_{k,l}(2l+1)a_{j,k,l}\zeta_{kl}\right),$$

$$\xi^2\eta^6\frac{d^2x_j}{dt^2} = -\left(1 + \sum_{k,l}(2l+1)^2 a_{j,kl}\zeta_{kl}\right),$$

$$\xi^2\eta^6 x_j^{-1/2}\widetilde{x}_j^{-3/2} = (1 - A_j)^{-1/2}(1 - B_j)^{-3/2} = \left(1 + \frac{1}{2}A_j + \ldots\right)\left(1 + \frac{3}{2}B_j + \ldots\right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}A_j + \frac{3}{2}B_j + \ldots.$$

Останні рівності та (1) дають

$$\sum_{k,l}(2l+1)^2 a_{j,kl}\zeta_{kl} - \frac{1}{2}A_j - \frac{3}{2}B_j = D_j - g^2\xi^2\eta^6 f_j, \tag{5}$$

де

$$D_j = (1 - A_j)^{-1/2}(1 - B_j)^{-3/2} - 1 - \frac{1}{2}A_j - \frac{3}{2}B_j,$$

$$f_j = g^2 \sum_{1 \leqslant k \leqslant n,\, k \neq j} [(r_j - r_k - g\xi^4(A_j - A_k))^{-1/2}(|r_j^* - r_k^* - g\eta^4(B_j - B_k)|)^{-3/2} -$$

$$- (r_j - r_k - g\xi^4 A_j)^{-\frac{1}{2}}(|r_j^* - r_k^* - g\eta^4 B_j|)^{-3/2}] + (\xi^2\eta^6)^{-1} h^0 e_0 \zeta_{10} \times$$

$$\times \left(1 + \sum_{k,l} (2l+1) a_{j,kl} \zeta_{kl}\right).$$

З (5) та подання

$$D_j - \xi^2\eta^6 f_j = \sum_{k,l} \rho_{j,kl}\zeta_{kl}, \qquad \widetilde{D}_j - \xi^2\eta^6 \widetilde{f}_j = \sum_{k,l} \rho_{j,k,-l}\zeta_{kl}, \qquad \rho_{kl} = \rho_{k,l}, \tag{6}$$

де функції з тільдою отримані з функцій без неї перестановкою A та B ми отримуємо рівняння для $a_{j,kl} = a_{j,k,l}$

$$\left[(2l+1)^2 + \frac{1}{2}\right] a_{j,kl} + \frac{3}{2} a_{j,k,-l} = \rho_{j,kl}, \qquad a_{j,k0} = \frac{1}{3}\rho_{j,k0},$$

$$\left[(2l-1)^2 + \frac{1}{2}\right] a_{j,k,-l} + \frac{3}{2} a_{j,kl} = \rho_{j,k,-l}.$$

Зазначимо, що $\rho_{j,kl}$, $\rho_{j,k,-l}$ залежить від $a_{j,rl}$, $r < k$ через те, що розклад в D_j починається з других степенів A_j, B_j і що вираз $\xi^2\eta^6$ присутній в лівих частинах рівностей в (6). Таким чином, це рівняння є рекурентним співвідношенням та просто розв'язується як неоднорідне несингулярне лінійне рівняння

$$a_{j,kl} = \frac{\left[(2l-1)^2 + \frac{1}{2}\right]\rho_{j,kl} - \frac{3}{2}\rho_{j,k,-l}}{4l^2(4l^2-1)}, \qquad l \neq 0.$$

З цієї рівності випливає, що

$$|(2l+1) a_{j,kl}| \leqslant \frac{c_1}{2|2l+1|}(|\rho_{j,kl}| + |\rho_{j,k,-l}|). \tag{7}$$

Тепер доведемо, що ряди в (3), (4) збігаються. Ми це зробимо за допомогою мажорантної техніки Коші, яка близька до мажорантної техніки, винайденої Зігелем для розв'язку задачі Хілла [4].

Нерівність для степеневих рядів $f \ll F$ означає, що коефіцієнти в розкладі для F є додатними та більшими за модулі коефіцієнтів у розкладі для f.

Нехай $\xi = \eta$ та

$$Z_j = \sum_{k,l} |a_{j,kl}|\zeta^{3k}, \qquad Z = \sum_{j=1}^{n} Z_j$$

для нульового магнітного поля і для ненульового поля

$$Z_j = \sum_{k,l} |(2l+1) a_{j,kl}|\zeta^{3k}.$$

Тоді

$$\zeta_{k,l} = \zeta^{3k}, \quad \zeta = \xi^2, \quad A_j, B_j \ll Z_j$$

та

$$D_j \ll (1 - Z_j)^{-2} - 1 - 2Z_j \ll (1 - 2Z_j)^{-1} - 1 - 2Z_j = \frac{4Z_j^2}{1 - 2Z_j},$$

$$f_j - (\xi^2\eta^6)^{-1} e_0 \zeta_{10} \left(1 + \sum_{k,l} (2l+1) a_{j,kl} \zeta_{kl}\right) \ll$$

$$\ll g^2 \sum_{1 \leqslant k \leqslant n, k \neq j} r_0^{-2} \{[(1 - g_0 \zeta^2 (Z_j + Z_k))^{-2} - 1] + [(1 - g_0 \zeta^2 Z_j)^{-2} - 1]\} \ll$$

$$\ll (n-1) \frac{4g_0^3 \zeta^2 Z}{1 - 2g_0 \zeta^2 Z}, \qquad g_0 = r_0^{-1} g.$$

Відзначимо, що умова нейтральності дала нам змогу ввести доданок -1 у дві квадратні дужки, що приведе до доведення збіжності рядів в (3), (4). Останні дві нерівності, нерівність $|2l+1| \geqslant 1$ та (6) дають ($h_0 = |h^0| e_0$)

$$\sum_{k,l} \frac{\rho_{j,kl}}{|2l+1|} \zeta_{kl} \ll 4 \left[\frac{Z_j^2}{1 - 2Z_j} + (n-1) \frac{\zeta_0^6 Z}{1 - 2\zeta_0^2 Z}\right] + h_0 \zeta^3 (1 + Z_j), \qquad \zeta_0 = \sqrt{g_0}\zeta.$$

Таким чином, з (7) отримуємо

$$Z_j \ll 4c_1 \left[\frac{Z_j^2}{1 - 2Z_j} + (n-1) \frac{\zeta_0^6 Z}{1 - 2\zeta_0^2 Z}\right] + h_0 c_1 \zeta^3 (1 + Z_j), \qquad \zeta_0 = \sqrt{g_0}\zeta.$$

Як наслідок,

$$Z \ll c_1 n \left[\frac{4Z^2 + h_0 \zeta^3}{1 - 2Z} + (n-1) \frac{4\zeta_0^6 Z}{1 - 2\zeta_0^2 Z}\right] \ll c_1 n \frac{4Z^2 + h_0 \zeta^3 + 4(n-1)\zeta_0^6 Z}{1 - 2(\zeta_0^2 + Z)} \ll$$

$$\ll c_1 n \frac{4(Z + 2^{-1}(n-1)\zeta_0^6)^2 + h_0 \zeta^3}{1 - 2(\zeta_0^2 + Z)} \ll c_1 n \frac{4V^2 + h_0 \zeta^3}{1 - 2V},$$

де

$$V = Z + c_*, \qquad c_* = 2^{-1}(n-1)\zeta_0^6 + \zeta_0^2.$$

Покладаючи $c = e_0 \zeta^3 + c_*$, отримуємо

$$V \ll W, \qquad W = \frac{c + 4c_1 n W^2}{1 - 2W}, \qquad 4(2c_1 n + 1)W^2 - 2W + 2c = 0.$$

Для квадратного рівняння для W знаходимо розв'язок

$$W = (8c_1 n + 4)^{-1} (1 + \sqrt{1 - 8c(2c_1 n + 1)}).$$

Нехай $a = 4(2c_1 n + 1)$, тоді

$$a^{-1}(1 - aW)^2 + 2c - a^{-1} = 0, \qquad (1 - aW)^2 = 1 - 2ac.$$

Як наслідок,

$$2aW \ll (1 - aW)^{-2} - 1 = (1 - 2ac)^{-1} - 1 = \frac{2ac}{1 - 2ac}.$$

W — голоморфна функція ζ у нулі, якщо

$$|2c| = |(n-1)\zeta_0^6 + 2\zeta_0^2 + 2h_0\zeta_0^3| < (8c_1 n + 4)^{-1}, \qquad |\zeta_0| < ((n + 1 + 2h_0)(8c_1 n + 4))^{-1/2}$$

чи

$$|\zeta| < \left(\frac{r_0}{g}\right)^{1/2} ((n + 1 + 2h_0)(8c_1 n + 4))^{-1/2}, \qquad |\xi|, |\eta| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}|\zeta|. \tag{8}$$

Для цих значень $|\zeta|$ справедливі такі нерівності:

$$0 < W(|\zeta|) \leqslant (4c_1 n + 2)^{-1}, \qquad Z(|\zeta|) \leqslant W(|\zeta|) + |c|, \qquad Z_j(|\zeta|) \leqslant Z(|\zeta|).$$

Отже,

$$|x_j| \leqslant |\zeta|^2(1 + Z_j) \leqslant |\zeta|^2(1 + Z) < 2|\zeta|^2 < \frac{r_0}{g}((n + 1 + 2h_0)(4c_1 n + 2))^{-1}$$

і ми довели, що при умові (8) координати в (3), (4) є голоморфними функціями ξ, η в нулі, що вони є розв'язком (1) при умовах (2), $x_j^* = \widetilde{x}_j$ та $\eta = \xi^*$ і що має місце нижчесформульований висновок.

Висновок. *Для координат x_j негативних зарядів справедлива така нерівність:*

$$|r_j - x_j| < \frac{r_0}{2(n + 1 + 2h_0)(2c_1 n + 1)},$$

яка виключає їх зіткнення.

Таким чином, ми побудували розв'язок рівнянь руху нашої системи зарядів за допомогою таких дій:

1) зсунули координату кожного негативного заряду на координату (свого) позитивного фіксованого заряду та переписали рівняння руху для таких змінних у комплексній формі (1);

2) отримали нові змінні у вигляді рядів (розкладів) (3), (4) за степепнями функцій ξ, η, що підкоряються рівнянням руху (2) кожного заряду без урахування взаємодії з усіма зарядами, крім одного фіксованого позитивного найближчого заряду;

3) вивели рекурентне рівняння для коефіцієнтів $a_{j,kl}$ розкладів (3), (4) та розв'язали його;

4) довели збіжність рядів (3), (4) за допомогою мажорантного методу теорії голоморфних функцій. При цьому умова нейтральності відіграє суттєву роль.

Відзначимо, що Зігель запропонував оригінальний метод доведення центральної теореми Ляпунова [4], який є аналогом його методу розв'язку задачі трьох тіл небесної механіки, узагальненого нами в цій роботі.

Цитована література

1. *Скрипник В.І.* Про голоморфні розв'язки гамільтонових рівнянь руху точкових зарядів // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 2. – С. 270–280.
2. *Скрипник В.І.* Про голоморфні розв'язки рівнянь руху Дарвіна точкових зарядів // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 4. – С. 546–564.
3. *Скрипник В.І.* Періодичні та обмежені розв'язки рівнянь руху Кулона двох та трьох точкових зарядів з рівновагою на прямій // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 5. – С. 668–682.
4. *Siegel C. L., Moser J. K.* Lectures on celestial mechanics. – Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1971. – 290 p.

References

1. *Skrypnik W. I.* Ukr. Math. J., 2011, **63**, No 2: 270–280 (in Ukrainian).
2. *Skrypnik W. I.* Ukr. Math. J., 2013, **65**, No 4: 546–564 (in Ukrainian).
3. *Skrypnik W. I.* Ukr. Math. J., 2014, **66**, No 5: 668-682 (in Ukrainian).
4. *Siegel C. L., Moser J. K.* Lectures on celestial mechanics, Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1971.

Надійшло до редакції 13.07.2015

В. И. Скрипник

Институт математики НАН Украины, Киев

E-mail: volodymyr_skrypnyk@ukr.net

Кулоновская плоская периодическая динамика одинаковых зарядов в поле притягивающих центров и постоянном магнитном поле

Рассматривается кулоновская нейтральная плоская система n отрицательных зарядов в постоянном магнитном поле и поле n одинаковых фиксированных положительных зарядов и строится периодическое решение уравнения движения такое, что каждый отрицательный заряд является близъким к своему положительному фиксированному заряду.

Ключевые слова: уравнение движения Кулона, отрицательные заряды, внешние поля.

W. I. Skrypnik

Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kiev

E-mail: volodymyr_skrypnyk@ukr.net

Coulomb planar periodic motion of equal charges in the field of attractive centers and a constant magnetic field

We consider a neutral Coulomb planar system of n equal negative charges in a constant magnetic field and the field of n equal fixed positive charges and construct a periodic solution of the equation of motion such that each negative charge is close to its own positive fixed charge.

Keywords: Coulomb equation of motion, negative charges, external fields.