http://dx.doi.org/10.15407/dopovidi2016.05.058

УДК 517.9+531.19+530.145

В. І. Герасименко

Інститут математики НАН України, Київ
E-mail: gerasym@imath.kiev.ua

Процеси народження та поширення кореляцій в квантових системах багатьох частинок

(Представлено академіком НАН України А. Г. Загороднім)

Розглянуто проблему строгого опису еволюції станів квантових систем багатьох частинок за допомогою кореляційних операторів. Побудовано непертурбативний розв'язок задачі Коші для ієрархії нелінійних еволюційних рівнянь для послідовності маргінальних кореляційних операторів, якими описуються процеси народження та поширення кореляцій. Також в границі самоузгодженого поля встановлено асимптотичну поведінку побудованих маргінальних кореляційних операторів.

Ключові слова: кореляційний оператор, група нелінійних операторів, нелінійна ієрархія ББГКІ, квантове кінетичне рівняння, границя самоузгодженого поля.

Відомо, що еволюція станів квантових систем багатьох частинок може бути описана за допомогою маргінальних (s-частинкових) операторів густини або в термінах маргінальних кореляційних операторів. Традиційно маргінальні кореляційні оператори визначаються кластерними розкладами маргінальних операторів густини. Фізична інтерпретація маргінальних кореляційних операторів пов'язана з тією обставиною, що макроскопічні характеристики відхилень від середніх значень спостережуваних в мікроскопічному масштабі визначаються такими операторами [1, 2].

В повідомленні розглядається проблема строгого опису еволюції станів квантових систем багатьох частинок за допомогою маргінальних кореляційних операторів, якими описуються процеси народження та поширення кореляцій. Одна з відкритих проблем теорії еволюційних рівнянь систем багатьох частинок полягає в побудові розв'язку задачі Коші для ієрархії нелінійних еволюційних рівнянь для послідовності маргінальних кореляційних операторів і дослідженні його властивостей, зокрема, скейлінгової асимптотичної поведінки.

Зауважимо, що загально прийнятий підхід до встановлення скейлінгової асимптотичної поведінки квантових систем багатьох частинок грунтується на дослідженні скейлінгової границі розв'язку квантової ієрархії рівнянь ББГКІ для маргінальних операторів густини побудованого методами теорії збурень [3, 4] (строгі результати з кінетичної теорії зіткнень — [5, 6]).

Нехай простір $\mathfrak{L}^1(\mathcal{F}_\mathcal{H}) = \bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} \mathfrak{L}^1(\mathcal{H}^{\otimes n})$ — простір послідовностей $f = (f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots)$ ядерних операторів, $f_0 \in \mathbb{C}$, визначених на просторі Фока $\mathcal{F}_\mathcal{H}$ з такою нормою: $\|f\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{F}_\mathcal{H})} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathrm{Tr}_{1,\ldots,n}|f_n(1,\ldots,n)|$, де символом $\mathrm{Tr}_{1,\ldots,n}$ позначено частинні сліди оператора $f_n \equiv f_n(1,\ldots,n) \in \mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_n)$, визначеного на n-частинковому гільбертовому просторі $\mathcal{H}_n = \mathcal{H}^{\otimes n}$.

Підпростір фінітних послідовностей вироджених операторів із нескінченно диференційованими ядрами з компактними носіями позначимо $\mathfrak{L}^1_0(\mathcal{F}_\mathcal{H})$.

На просторі $\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_n)$ визначено однопараметричне відображення

$$\mathbb{R}^1 \ni t \mapsto \mathcal{G}^*_n(t) f_n \doteq e^{-itH_n} f_n e^{itH_n}, \tag{1}$$

де самоспряжений оператор H_n — гамільтоніан системи n частинок, які задовольняють статистику Максвелла — Больцмана, і використано систему одиниць, де $h = 2\pi\hbar = 1$ — постійна Планка, $m = 1$ — маса частинок. Обернену групу операторів до групи $\mathcal{G}^*_n(t)$ будемо позначати $(\mathcal{G}^*_n)^{-1}(t) = \mathcal{G}^*_n(-t)$.

На підпросторі $\mathfrak{L}^1_0(\mathcal{H}_n)$ інфінітезимальний генератор $\mathcal{N}^*_n$ групи операторів (1) визначається в сенсі сильної збіжності простору $\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_n)$ оператором

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(\mathcal{G}^*_n(t) f_n - f_n) = -i(H_n f_n - f_n H_n) \doteq \mathcal{N}^*_n f_n, \tag{2}$$

який має таку структуру:

$$\mathcal{N}^*_n = \sum_{j=1}^{n} \mathcal{N}^*(j) + \epsilon \sum_{j_1<j_2=1}^{n} \mathcal{N}^*_{\mathrm{int}}(j_1, j_2),$$

де оператор $\mathcal{N}^*(j)$ — генератор рівняння фон Неймана у випадку вільної еволюції; оператор $\mathcal{N}^*_{\mathrm{int}}$ визначається через оператор парного потенціалу взаємодії Φ такою формулою: $\mathcal{N}^*_{\mathrm{int}}(j_1, j_2) f_n \doteq -i(\Phi(j_1, j_2) f_n - f_n \Phi(j_1, j_2))$ та $\epsilon > 0$ — скейлінговий параметр [2].

На просторі $\mathfrak{L}^1(\mathcal{F}_\mathcal{H})$ визначено таке однопараметричне нелінійне відображення:

$$\mathcal{G}(t; 1, \ldots, s \mid f) \doteq \sum_{\mathrm{P}:\, (1,\ldots,s) = \bigcup_j X_j} \mathfrak{A}_{|\mathrm{P}|}(t, \{X_1\}, \ldots, \{X_{|\mathrm{P}|}\}) \prod_{X_j \subset \mathrm{P}} f_{|X_j|}(X_j), \qquad s \geqslant 1, \tag{3}$$

де символом $\sum_{\mathrm{P}:\, (1,\ldots,s) = \bigcup_j X_j}$ позначено суму за всіма можливими розбиттями Р множини індексів $(1, \ldots, s) \equiv Y$ на $|\mathrm{P}|$ непорожніх підмножин $X_j \subset Y$, які не перетинаються, множина $(\{X_1\}, \ldots, \{X_{|\mathrm{P}|}\})$ складається з елементів, які є підмножинами $X_j \subset Y$, тобто $|(\{X_1\}, \ldots, \{X_{|\mathrm{P}|}\})| = |\mathrm{P}|$. Твірним оператором $\mathfrak{A}_{|\mathrm{P}|}(t)$ розкладу (3) є $|\mathrm{P}|$-го порядку кумулянт груп операторів (1), який визначено таким розкладом:

$$\mathfrak{A}_{|\mathrm{P}|}(t, \{X_1\}, \ldots, \{X_{|\mathrm{P}|}\}) \doteq \sum_{\mathrm{P}':\, (\{X_1\}, \ldots, \{X_{|\mathrm{P}|}\}) = \bigcup_k Z_k} (-1)^{|\mathrm{P}'|-1} (|\mathrm{P}'| - 1)! \prod_{Z_k \subset \mathrm{P}'} \mathcal{G}^*_{|\theta(Z_k)|}(t, \theta(Z_k)), \tag{4}$$

де відображення декластерізації θ визначено формулою $\theta(\{X_1\}, \ldots, \{X_{|\mathrm{P}|}\}) = (1, \ldots, s)$.

На просторі $\mathfrak{L}^1(\mathcal{F}_\mathcal{H})$ відображення (3) утворює обмежену сильно неперервну групу нелінійних операторів, інфінітезимальний генератор якої визначається формулою

$$\begin{aligned} &\mathcal{N}(1, \ldots, s \mid g(t)) \doteq \mathcal{N}^*_s g_s(t, 1, \ldots, s) + \\ &\quad + \epsilon \sum_{\mathrm{P}:\, (1,\ldots,s) = X_1 \bigcup X_2} \sum_{i_1 \in X_1} \sum_{i_2 \in X_2} \mathcal{N}^*_{\mathrm{int}}(i_1, i_2) g_{|X_1|}(t, X_1) g_{|X_2|}(t, X_2), \end{aligned} \tag{5}$$

де $\epsilon > 0$ — скейлінговий параметр, символом $\sum\limits_{\mathrm{P}:\, Y=X_1\bigcup X_2}$ позначено суму за всіма можливими розбиттями P множини індексів $(1, \ldots, s) \equiv Y$ на дві непорожні підмножини $X_1 \subset Y$ і $X_2 \subset Y$, які не перетинаються, та оператор $\mathcal{N}_s^*$ визначено на підпросторі $\mathfrak{L}_0^1(\mathcal{H}_s)$ формулою (2).

Для початкових даних з простору $\mathfrak{L}^1(\mathcal{F}_\mathcal{H})$ групою нелінійних операторів (3) визначається непертурбативний розв'язок задачі Коші для ієрархії рівнянь фон Неймана для послідовності кореляційних операторів [7]:

$$g(t, 1, \ldots, s) = \mathcal{G}(t; 1, \ldots, s \mid g(0)), \qquad s \geqslant 1, \tag{6}$$

де $g(0) = (g_0, g_1^{0,\epsilon}, \ldots, g_n^{0,\epsilon}, \ldots)$ — послідовність кореляційних операторів, якою описується початковий стан квантової системи не фіксованої (довільної) кількості частинок. Зауважимо, що кореляційні оператори визначаються кластерними розкладами операторів густини (ядра операторів густини відомі як матриці густини), які є розв'язком рівнянь фон Неймана [2].

В термінах послідовності кореляційних операторів (6) маргінальні (s-частинкові) кореляційні оператори визначаються такими розкладами в ряд:

$$G_s(t, 1, \ldots, s) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathrm{Tr}_{s+1,\ldots,s+n} \mathcal{G}(t; 1, \ldots, s+n \mid g(0)), \qquad s \geqslant 1. \tag{7}$$

Згідно з оцінкою: $\|\mathcal{G}(t; 1, \ldots, s \mid f)\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_s)} \leqslant s! e^{2s} c^s$, де $c \equiv e^3 \max\Big(1, \max\limits_{\mathrm{P}:\, Y=\bigcup_i X_i} \|f_{|X_i|}\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_{|X_i|})}\Big)$, ряд (7) існує і справедлива така нерівність: $\|G_s(t)\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_s)} \leqslant s!(2e^2)^s c^s \sum\limits_{n=0}^{\infty} (2e^2)^n c^n$.

Еволюція всіх можливих станів квантових систем багатьох частинок, які задовольняють статистику Максвелла–Больцмана, описується за допомогою послідовності $G(t) = (I, G_1(t), G_2(t), \ldots, G_s(t), \ldots) \in \mathfrak{L}^1(\mathcal{F}_\mathcal{H})$ маргінальних кореляційних операторів (7), яка задовольняє задачу Коші для ієрархії нелінійних еволюційних рівнянь (нелінійна ієрархія ББГКІ):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} G_s(t, Y) = \mathcal{N}(Y \mid G(t)) + \mathrm{Tr}_{s+1} \sum_{i \in Y} \mathcal{N}_{\mathrm{int}}^*(i, s+1) \times \\ \times \Bigg(G_{s+1}(t, Y, s+1) + \epsilon \sum_{\substack{\mathrm{P}:\, (Y,s+1)=X_1\bigcup X_2, \\ i\in X_1; s+1 \in X_2}} G_{|X_1|}(t, X_1) G_{|X_2|}(t, X_2)\Bigg), \end{aligned} \tag{8}$$

$$G_s(t)\big|_{t=0} = G_s^{0,\epsilon}, \qquad s \geqslant 1. \tag{9}$$

У ієрархії еволюційних рівняннь (8) оператор $\mathcal{N}(Y \mid G(t))$ визначається формулою (5), $\epsilon > 0$ — скейлінговий параметр та використано введені вище позначення.

Непертурбативний розв'язок задачі Коші (8), (9) зображується такою послідовністю самоспряжених операторів:

$$G_s(t, Y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathrm{Tr}_{s+1,\ldots,s+n} \mathfrak{A}_{1+n}(t; \{Y\}, s+1, \ldots, s+n \mid G(0)), \qquad s \geqslant 1, \tag{10}$$

де $G(0) = (I, G_1^{0,\epsilon}(1), \ldots, G_s^{0,\epsilon}(1,\ldots,s),\ldots)$ — послідовність початкових маргінальних кореляційних операторів. Твірний оператор $\mathfrak{A}_{1+n}(t;\{Y\},s+1,\ldots,s+n \mid G(0))$ розкладу в ряд (10) визначається кумулянтом $(1+n)$-го порядку груп нелінійних операторів (3)

$$\mathfrak{A}_{1+n}(t;\{Y\},s+1,\ldots,s+n \mid G(0)) \doteq$$
$$\doteq \sum_{\mathrm{P}\colon (\{Y\},s+1,\ldots,s+n)=\bigcup_k X_k} (-1)^{|\mathrm{P}|-1}(|\mathrm{P}|-1)!\mathcal{G}(t;\theta(X_1) \mid \ldots \mathcal{G}(t;\theta(X_{|\mathrm{P}|}) \mid G(0))\ldots), \quad (11)$$

де $\mathcal{G}(t;\theta(X_1) \mid \ldots \mathcal{G}(t;\theta(X_{|\mathrm{P}|}) \mid G(0))\ldots)$ — композиція нелінійних відображень (3) відповідних невзаємодіючих підсистем частинок, наприклад,

$$\mathcal{G}(t;1 \mid \mathcal{G}(t;2 \mid f)) = \mathfrak{A}_1(t,1)\mathfrak{A}_1(t,2)f_2(1,2),$$
$$\mathcal{G}(t;1,2 \mid \mathcal{G}(t;3 \mid f)) =$$
$$= \mathfrak{A}_1(t,\{1,2\})\mathfrak{A}_1(t,3)f_3(1,2,3) + \mathfrak{A}_2(t,1,2)\mathfrak{A}_1(t,3)(f_1(1)f_2(2,3) + f_1(2)f_2(1,3)).$$

Наведемо приклади розкладів (11). Кумулянт першого порядку груп нелінійних операторів (3) є групою нелінійних операторів (3), тобто

$$\mathfrak{A}_1(t;\{1,\ldots,s\} \mid G(0)) = \mathcal{G}(t;1,\ldots,s \mid G(0)),$$

у випадку $s = 2$ кумулянт другого порядку груп нелінійних операторів (1) зображується таким розкладом:

$$\mathfrak{A}_{1+1}(t;\{1,2\},3 \mid G(0)) = \mathcal{G}(t;1,2,3 \mid G(0)) - \mathcal{G}(t;1,2 \mid \mathcal{G}(t;3 \mid G(0))) =$$
$$= \mathfrak{A}_{1+1}(t,\{1,2\},3)G_3^{0,\epsilon}(1,2,3) +$$
$$+ (\mathfrak{A}_{1+1}(t,\{1,2\},3) - \mathfrak{A}_{1+1}(t,2,3)\mathfrak{A}_1(t,1))G_1^{0,\epsilon}(1)G_2^{0,\epsilon}(2,3) +$$
$$+ (\mathfrak{A}_{1+1}(t,\{1,2\},3) - \mathfrak{A}_{1+1}(t,1,3)\mathfrak{A}_1(t,2))G_1^{0,\epsilon}(2)G_2^{0,\epsilon}(1,3) +$$
$$+ \mathfrak{A}_{1+1}(t,\{1,2\},3)G_1^{0,\epsilon}(3)G_2^{0,\epsilon}(1,2) + \mathfrak{A}_3(t,1,2,3)G_1^{0,\epsilon}(1)G_1^{0,\epsilon}(2)G_1^{0,\epsilon}(3),$$

де оператор $\mathfrak{A}_3(t,1,2,3) = \mathfrak{A}_{1+1}(t,\{1,2\},3) - \mathfrak{A}_{1+1}(t,2,3)\mathfrak{A}_1(t,1) - \mathfrak{A}_{1+1}(t,1,3)\mathfrak{A}_1(t,2)$ — кумулянт третього порядку груп операторів (1).

Один з підходів до побудови розкладу в ряд (10) для маргінальних кореляційних операторів полягає в застосуванні до їх визначення (7) кластерних розкладів груп нелінійних операторів (3) за кумулянтами (11). Дійсно, зображуючи твірні оператори ряду (10) у формі кластерних розкладів:

$$\mathcal{G}(t;1,\ldots,s+n \mid f) = \sum_{\mathrm{P}\colon (1,\ldots,s+n)=\bigcup_k X_k} \mathfrak{A}_{|X_1|}(t;X_1 \mid \ldots \mathfrak{A}_{|X_{|\mathrm{P}|}|}(t;X_{|\mathrm{P}|} \mid f)\ldots), \quad n \geqslant 0, \quad (12)$$

згідно з визначенням послідовності початкових кореляційних операторів $g(0) = (I, g_1^{0,\epsilon}(1), \ldots, g_n^{0,\epsilon}(1,\ldots,n),\ldots)$ в термінах початкових маргінальних кореляційних операторів виводимо вираз (10). Розв'язки рекурсивних співвідношень (12) зображуються розкладами (11).

Справедливе таке твердження. Якщо $\max\limits_{n\geqslant 1}\|G_n^{0,\epsilon}\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_n)} < (2e^3)^{-1}$, тоді у випадку обмеженого потенціалу взаємодії для $t \in \mathbb{R}$ розв'язок задачі Коші для нелінійної ієрархії ББГКІ (8), (9) визначається послідовністю маргінальних кореляційних операторів, які зображуються розкладами в ряд (10). Якщо $G_n^{0,\epsilon} \in \mathfrak{L}_0^1(\mathcal{H}_n)$, $n \geqslant 1$, тоді така послідовність є сильним розв'язком, для довільних початкових даних $G_n^{0,\epsilon} \in \mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_n)$, $n \geqslant 1$, — слабким розв'язком.

Наведемо деякі властивості маргінальних кореляційних операторів (10), якими описуються процеси народження та поширення кореляцій.

У випадку початкових станів, які визначаються послідовністю маргінальних кореляційних операторів $G^{(c)} = (0, G_1^{0,\epsilon}, 0, \ldots, 0, \ldots)$, тобто станів статистично незалежних частинок, згідно з визначенням (11), маргінальні кореляційні оператори (10) зображуються такими розкладами:

$$G_s(t, 1, \ldots, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathrm{Tr}_{s+1,\ldots,s+n} \mathfrak{A}_{s+n}(t; 1, \ldots, s+n) \prod_{i=1}^{s+n} G_1^{0,\epsilon}(i), \qquad s \geqslant 1, \tag{13}$$

де твірним оператором $\mathfrak{A}_{s+n}(t)$ ряду (13) є $(s+n)$-го порядку кумулянт груп операторів (1). У термінах маргінальних (s-частинкових) операторів густини, кластерні розклади яких визначаються маргінальними кореляційними операторами:

$$F_s^{0,\epsilon}(1, \ldots, s) = \sum_{\mathrm{P}\colon (1,\ldots,s)=\bigcup_i X_i} \prod_{X_i \subset \mathrm{P}} G_{|X_i|}^{0,\epsilon}(X_i), \qquad s \geqslant 1,$$

зазначений початковий стан описується послідовністю $F^{(c)} = \Big(I, F_1^{0,\epsilon}(1), \ldots, \prod\limits_{i=1}^{n} F_1^{0,\epsilon}(i), \ldots\Big)$, і у випадку послідовності (13) маргінальні оператори густини зображуються такими розкладами в ряд (непертурбативний розв'язок задачі Коші для квантової ієрархії ББГКІ [2]):

$$F_s(t, 1, \ldots, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathrm{Tr}_{s+1,\ldots,s+n} \mathfrak{A}_{1+n}(t; \{Y\}, s+1, \ldots, s+n) \prod_{i=1}^{s+n} F_1^{0,\epsilon}(i), \qquad s \geqslant 1,$$

де твірним оператором $\mathfrak{A}_{1+n}(t)$ є $(1+n)$-го порядку кумулянт груп операторів (1).

У просторі $\mathfrak{L}^1(\mathcal{F}_\mathcal{H})$ твірні оператори (11) розкладу в ряд (10) можуть бути зображені в формі редукованих кумулянтів груп нелінійних операторів (3), а саме [8],

$$\begin{aligned} U_{1+n}(t; \{1, \ldots, s\}, s+1, \ldots, s+n \mid G(0)) \doteq \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \\ \times \sum_{\mathrm{P}\colon (\theta(\{1,\ldots,s\}), s+1,\ldots,s+n-k)=\bigcup_i X_i} \mathfrak{A}_{|\mathrm{P}|}(t, \{X_1\}, \ldots, \{X_{|\mathrm{P}|}\}) \sum_{k_1=0}^{k} \frac{k!}{k_1!(k-k_1)!} \ldots \times \\ \times \sum_{k_{|\mathrm{P}|-1}=0}^{k_{|\mathrm{P}|-2}} \frac{k_{|\mathrm{P}|-2}!}{k_{|\mathrm{P}|-1}!(k_{|\mathrm{P}|-2}-k_{|\mathrm{P}|-1})!} G_{|X_1|+k-k_1}^{0,\epsilon}(X_1, s+n-k+1, \ldots, s+n-k_1) \ldots \times \\ \times G_{|X_{|\mathrm{P}|}|+k_{|\mathrm{P}|-1}}^{0,\epsilon}(X_{|\mathrm{P}|}, s+n-k_{|\mathrm{P}|-1}+1, \ldots, s+n). \end{aligned} \tag{14}$$

Зауважимо, що непертурбативний розв'язок (10) задачі Коші для нелінійної ієрархії ББГКІ (8) або в формі (14) може бути перетворено до ряду теорії збурень внаслідок застосування аналогів рівнянь Дюамеля для кумулянтів (4) груп операторів (1).

Опишемо процеси народження та поширення кореляцій квантових систем багатьох частинок в наближенні самоузгодженого поля. З цією метою встановимо асимптотичну поведінку в скейлінговій границі самоузгодженого поля маргінальних кореляційних операторів (10).

Розглянемо початкові стани, які визначаються одночастинковим (маргінальним) оператором густини та кореляційними операторами

$$G^{(cc)} = \Big(I, G_1^{0,\epsilon}(1), g_2^{\epsilon}(1,2)\prod_{i=1}^{2} G_1^{0,\epsilon}(i), \ldots, g_n^{\epsilon}(1,\ldots,n)\prod_{i=1}^{n} G_1^{0,\epsilon}(i), \ldots\Big), \tag{15}$$

де операторами $g_n^{\epsilon}(1,\ldots,n) \equiv g_n^{\epsilon} \in \mathfrak{L}_0^1(\mathcal{H}_n)$, $n \geqslant 2$, визначаються кореляції початкових станів. Підкреслимо, що зазначене припущення (15) стосовно початкового стану є типовим для кінетичного опису систем багатьох частинок, зокрема, конденсовані стани систем частинок характеризуються кореляціями [1].

Нехай існує границя самоузгодженого поля початкового одночастинкового оператора густини в такому сенсі

$$\lim_{\epsilon\to 0} \|\epsilon G_1^{0,\epsilon} - g_1^0\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H})} = 0, \tag{16}$$

і відповідно для початкових кореляційних операторів:

$$\lim_{\epsilon\to 0} \|g_n^{\epsilon} - g_n\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_n)} = 0, \qquad n \geqslant 2. \tag{17}$$

У випадку початкових станів (15) для одночастинкового кореляційного оператора (10), тобто,

$$G_1(t,1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathrm{Tr}_{2,\ldots,1+n} \mathfrak{A}_{1+n}(t) g_{n+1}^{\epsilon}(1,\ldots,n+1) \prod_{i=1}^{n+1} G_1^{0,\epsilon}(i),$$

де твірний оператор $\mathfrak{A}_{1+n}(t) \equiv \mathfrak{A}_{1+n}(t,1,\ldots,n+1)$ є $(n+1)$-го порядку кумулянтом груп операторів (1), існує границя самоузгодженого поля в такому сенсі

$$\lim_{\epsilon\to 0} \|\epsilon G_1(t) - g_1(t)\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H})} = 0,$$

де граничний одночастинковий кореляційний оператор зображується розкладом в ряд

$$\begin{aligned} g_1(t,1) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t dt_1 \ldots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \mathrm{Tr}_{2,\ldots,n+1} \mathcal{G}_1^*(t-t_1,1) \mathcal{N}_{\mathrm{int}}^*(1,2) \times \\ \times \prod_{j_1=1}^{2} \mathcal{G}_1^*(t_1-t_2,j_1) \ldots \prod_{i_n=1}^{n} \mathcal{G}_1^*(t_n-t_n,i_n) \sum_{k_n=1}^{n} \mathcal{N}_{\mathrm{int}}^*(k_n,n+1) \prod_{j_n=1}^{n+1} \mathcal{G}_1^*(t_n,j_n) \times \\ \times \sum_{\mathrm{P}:\,(1,\ldots,n+1)=\bigcup_i X_i} \prod_{X_i\subset \mathrm{P}} g_{|X_i|}(X_i) \prod_{i=1}^{n+1} g_1^0(i), \end{aligned} \tag{18}$$

який для обмежених потенціалів взаємодії є збіжним за нормою простору $\mathfrak{L}^1(\mathcal{H})$ на скінченому проміжку часу: $t < t_0 \equiv (2\|\Phi\|_{\mathfrak{L}(\mathcal{H}_2)}\|g_1^0\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H})})^{-1}$.

Оператор (18) є слабким розв'язком задачі Коші для квантового кінетичного рівняння з початковими кореляціями типу кінетичного рівняння Власова:

$$\frac{\partial}{\partial t}g_1(t,1) = \mathcal{N}^*(1)g_1(t,1) + \\ + \mathrm{Tr}_2\mathcal{N}^*_{\mathrm{int}}(1,2)\prod_{i_1=1}^{2}\mathcal{G}_1^*(t,i_1)(g_2(1,2)+I)\prod_{i_2=1}^{2}(\mathcal{G}_1^*)^{-1}(t,i_2)g_1(t,1)g_1(t,2), \tag{19}$$

$$g_1(t)|_{t=0} = g_1^0, \tag{20}$$

де оператори $\mathcal{N}^*(1)$ та $\mathcal{N}^*_{\mathrm{int}}(1,2)$ визначені згідно з формулою (2). Зазначимо, що виведене кінетичне рівняння є немарковським квантовим кінетичним рівнянням. Для чистих станів рівняння (19) зводиться до кінетичного рівняння Хартрі з початковими кореляціями.

За сформульованих вище умов (16), (17) на початковий стан (15) існує границя самоузгодженого поля маргінальних кореляційних операторів (10):

$$\lim_{\epsilon\to 0}\|\epsilon^s G_s(t) - g_s(t)\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_s)} = 0, \qquad s \geqslant 2,$$

де граничний маргінальний кореляційний оператор $g_s(t)$ визначається такою формулою:

$$g_s(t,1,\ldots,s) = \prod_{i_1=1}^{s}\mathcal{G}_1^*(t,i_1)g_s(1,\ldots,s)\prod_{i_2=1}^{s}(\mathcal{G}_1^*)^{-1}(t,i_2)\prod_{j=1}^{s}g_1(t,j), \qquad s \geqslant 2, \tag{21}$$

в якій граничний одночастинковий кореляційний оператор $g_1(t)$ зображується рядом (18).

Отже, в наближенні самоузгодженого поля в процесі еволюції системи нові кореляції не народжуються за виключенням тих, які породжуються початковими кореляціями. У випадку початкових станів системи статистично незалежних частинок кінетичне рівняння (19) є квантовим рівнянням Власова, а властивість (21) описує процес поширення початкового хаосу.

Доведення отриманих результатів (18) та (21) грунтується на відповідних граничних формулах для кумулянтів асимптотично збурених груп операторів (1) та використанні явного вигляду твірних операторів розкладу в ряд (10) маргінальних кореляційних операторів. Отримані результати можуть бути поширені на системи багатьох бозонів або ферміонів подібно до роботи [7].

Зауважимо, що послідовність граничних маргінальних кореляційних операторів (18), (21) є розв'язком квантової ієрархії рівнянь Власова [8], якою в границі самоузгодженого поля описується послідовність маргінальних кореляційних операторів (10) у випадку довільних початкових станів.

Відмітимо також, що в роботах [9, 10] було розвинуто два інших підходи до опису процесу поширення початкових кореляцій в скейлінговій границі самоузгодженого поля. В роботі [9] властивість поширення початкових кореляцій було встановлено за допомогою опису еволюції квантової системи багатьох частинок в термінах маргінальних спостережуваних, а в роботі [10] така властивість доведена в інший спосіб, а саме, в термінах одночастинкового оператора густини, який визначався розв'язком узагальненого квантового кінетичного рівняння з початковими кореляціями.

Цитована література

1. *Боголюбов М. М.* Лекції з квантової статистики. Питання статистичної механіки квантових систем. – Київ: Рад. школа, 1949. – 228 с.
2. *Gerasimenko V. I.* Hierarchies of quantum evolution equations and dynamics of many-particle correlations // Statistical Mechanics and Random Walks: Principles, Processes and Applications. – New York: Nova Science, 2013. – P. 233–288.
3. *Erdös L., Schlein B., Yau H.-T.* Derivation of the cubic nonlinear Schrödinger equation from quantum dynamics of many-body systems // Invent. Math. – 2007. – **167**. – P. 515–614.
4. *Chen X., Guo Y.* On the weak coupling limit of quantum many-body dynamics and the quantum Boltzmann equation // Kinetic and Related Models. – 2015. – **8**, No 3. – P. 443–465.
5. *Cercignani C., Gerasimenko V., Petrina D.* Many-Particle Dynamics and Kinetic Equations. – Berlin: Springer, 2012. – 248 p.
6. *Gallagher I., Saint-Raymond L., Texier B.* From Newton to Boltzmann: Hard Spheres and Short-Range Potentials. – Zürich: EMS, 2014. – 124 p.
7. *Gerasimenko V. I., Polishchuk D. O.* Dynamics of correlations of Bose and Fermi particles // Math. Meth. Appl. Sci. – 2011. – **34**, No 1. – P. 76–93.
8. *Gerasimenko V. I., Polishchuk D. O.* A nonperturbative solution of the nonlinear BBGKY hierarchy for marginal correlation operators // Math. Meth. Appl. Sci. – 2013. – **36**, No 17. – P. 2311–2328.
9. *Gerasimenko V. I.* New approach to derivation of quantum kinetic equations with initial correlations // Carpathian Math. Publ. – 2015. – **7**, No 1. – P. 38–48.
10. *Gerasimenko V. I., Tsvir Zh. A.* On quantum kinetic equations of many-particle systems in condensed states // Phys. a A: Stat. Mech. Appl. – 2012. – **391**, No 24. – P. 6362–6366.

References

1. *Bogolyubov M. M.* Lectures on Quantum Statistics. Problems of Statistical Mechanics of Quantum Systems, Kiev: Rad. Shkola, 1949 (in Ukrainian).
2. *Gerasimenko V. I.* Statistical Mechanics and Random Walks: Principles, Processes and Applications, New York: Nova Science, 2013.
3. *Erdös L., Schlein B., Yau H.-T.* Invent. Math., 2007, **167**: 515–614.
4. *Chen X., Guo Y.* Kinetic and Related Models, 2015, **8**, No 3: 443–465.
5. *Cercignani C., Gerasimenko V., Petrina D.* Many-Particle Dynamics and Kinetic Equations. Berlin: Springer, 2012.
6. *Gallagher I., Saint-Raymond L., Texier B.* From Newton to Boltzmann: Hard Spheres and Short-Range Potentials, Zürich: EMS, 2014.
7. *Gerasimenko V. I., Polishchuk D. O.* Math. Meth. Appl. Sci., 2011, **34**, No 1: 76–93.
8. *Gerasimenko V. I., Polishchuk D. O.* Math. Meth. Appl. Sci., 2013, **36**, No 17: 2311–2328.
9. *Gerasimenko V. I.* Carpathian Math. Publ., 2015, **7**, No 1: 38–48.
10. *Gerasimenko V. I., Tsvir Zh. A.* Phys. A: Stat. Mech. Appl., 2012, **391**, No 24: 6362–6366.

Надійшло до редакції 22.12.2015

В. И. Герасименко

Институт математики НАН Украины, Киев

E-mail: gerasym@imath.kiev.ua

Процессы рождения и распространения корреляций в квантовых многочастичных системах

В сообщении рассмотрена проблема строгого описания эволюции состояний многочастичных систем на основе корреляционных операторов. Построено непертурбативное решение задачи Коши для иерархии нелинейных эволюционных уравнений дляпоследовательности *маргинальных корреляционных операторов, которыми описываются процессы рождения и распространения корреляций. Также установлено асимптотическое поведение в пределе самосогласованного поля построенных маргинальных корреляционных операторов.*

Ключевые слова: корреляционный оператор, группа нелинейных операторов, нелинейная иерархия ББГКИ, квантовое кинетическое уравнение, предел самосогласованного поля.

V. I. Gerasimenko

Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kiev

E-mail: gerasym@imath.kiev.ua

Processes of creation and propagation of correlations in quantum many-particle systems

The communication deals with the problem of a rigorous description of the evolution of states of quantum many-particle systems by means of the correlation operators. We construct a nonperturbative solution of the Cauchy problem of the hierarchy of nonlinear evolution equations for a sequence of marginal correlation operators, which describe the processes of creation and propagation of correlations. Moreover, the mean field asymptotic behavior of the constructed marginal correlation operators is established.

Keywords: correlation operator, group of nonlinear operators, nonlinear BBGKY hierarchy, quantum kinetic equation, mean field limit.